Éléments de la théorie classique du potentiel

Vie et œuvre de Marcel Brelot *par* Gustave Choquet
Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel

Marcel Brelot

© Spartacus-Idh 2019

Spartacus Supérieur

Niveau Master
Collection Recherche

Éléments de la théorie classique du potentiel

Vie et œuvre de Marcel Brelot
par Gustave Choquet

Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel
par Marcel Brelot

Préface de Claude Dellacherie

Marcel Brelot

2017

Spartacus IDH

© Spartacus-Idh 2019



Marcel Brelot en 1984 à l'institut de recherches mathématiques d'Oberwolfach (1)

https://spartacus-idh.com

Cette réédition reprend celle de l'Association Laplace-Gauss de 1997, elle-même constituée d'une « *remise en page et réimpression effectuées d'après un exemplaire du cours du CDU, 3e édition, d'un exemplaire de l'Enseignement mathématique (Genève, 1972), et d'un texte obligeamment fourni par Gustave Choquet.* »

Nous remercions chaleureusement l'Association Laplace-Gauss pour avoir permis cette réédition, et plus particulièrement Nicolas Bouleau pour son rôle important dans celle-ci, ainsi que Arnaud de La Pradelle pour sa relecture attentive et avertie.

ISBN : 978-2-36693-032-0
© Spartacus-idh, Paris 2019

(1) CC BY-SA 2.0 de, Konrad Jacobs, Erlangen.

Préface

Marcel Brelot (1903-1987), Gustave Choquet (1915-2006), Jacques Deny (1916-2016), le brelan à l'origine de l'école française de théorie du potentiel. Brelot, de loin l'aîné, avait su attirer les deux autres. Mais je ne vais pas paraphraser le long et passionnant article de Choquet (dans ce volume) ; j'ai rencontré physiquement plusieurs fois Brelot mais je n'ai jamais été un de ses familiers. Cependant il a notablement marqué ma vie de mathématicien en ce qui concerne la théorie du potentiel et c'est ce que je vais évoquer ici.

Première rencontre (typographique) de Brelot : encore normalien, j'ai suivi le cours de théorie du potentiel de Deny à Orsay. Deny était un conférencier magnifique mais laissait de côté, malgré lui, des développements intéressants (par exemple, les inégalités de Harnack), et j'ai été ainsi amené, sans doute suivant un conseil de Deny, à compléter ce cours en lisant « la théorie classique du potentiel » de Brelot (dans ce volume), qui m'a passionné. Et c'est ainsi que je conserve dans mes archives ma rédaction manuscrite du cours de Deny agrémentée de longs passages copiés dans Brelot (dont les inégalités de Harnack...).

Deuxième rencontre (presque physique) : intéressé par la théorie du potentiel, j'ai tenté ensuite de suivre un cours de Brelot à Paris. Mais Brelot était terriblement myope et parsemait le tableau de petits graffiti cachés par sa tête très proche de ce qu'il écrivait (du moins, c'est mon souvenir de sourd) — bref, j'ai abandonné malgré que j'en eusse.

Mais les écrits de Brelot sont magnifiques. Plus tard j'ai lu par exemple avec grand intérêt ses notices historiques, dont « Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel » (dans ce volume). On y trouve en particulier de précieuses remarques sur le travail fondamental de Gauss « Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte » dont déjà le titre m'est obscur.

Autre rencontre (physique) : l'article historique précédemment cité admet une version antérieure, en anglais, dans le cours d'été du CIME « Potential theory » de 1969, dont Brelot fut le coordinateur (auteurs par ordre alphabétique : Bauer, Bony, Brelot, Deny, Doob, Mokobodzki — excusez du peu) et réédité récemment par Springer. Cette école d'été fut pour moi, et sans doute beaucoup d'autres, un régal.

Rencontre (mathématique) inopinée : jeune, j'avais appris dans « Processus de Markov » de P.-A. Meyer, que je cite, « *Nous signalerons, comme une curiosité mathématique sans intérêt pratique, le fait que la topologie fine possède la propriété de Baire* », un résultat de Brelot parmi ses nombreux résultats sur la topologie fine. Bien plus tard j'ai utilisé ce résultat de manière essentielle dans mon

© Spartacus-Idh 2019

étude des ensembles semi-polaires (et, indépendamment, Feyel en faisait aussi un usage crucial). La propriété de Baire était l'un des chevaux de bataille de Choquet.

Meyer m'a raconté un jour qu'il aidait Brelot qui, quoique très âgé, continuait à travailler avec ardeur.

Enfin, le travail de Brelot est immortalisé, entr'autres, dans le sigle PWB (Perron, Wiener, Brelot), notant l'achèvement optimal de l'étude du problème de Dirichlet dans la théorie classique comme dans la théorie axiomatique dont il fut l'initiateur.

C'était un grand homme.

Paris, le 11 octobre 2017
C. Dellacherie

https://spartacus-idh.com

Avant-propos

Marcel Brelot fut l'un des grands rénovateurs de la théorie du potentiel de cette deuxième moitié du xx^{e} siècle. Son ouvrage didactique le plus original fut sans doute son cours de troisième cycle qu'il fit paraître à partir de 1959 dans la collection « Les cours de Sorbonne » publiée au CDU, et qui donna lieu à plusieurs éditions (dont une en russe).

Tout en n'exposant que la « théorie classique », c'est-à-dire celle des fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^n$ (définies par l'équation de Laplace $\Delta = 0$), et celle du potentiel newtonien pour $\mathbb{R}^3$, logarithmique pour $\mathbb{R}^2$, et leur généralisation à $\mathbb{R}^n$, Marcel Brelot prépare le lecteur à un point de vue « axiomatique ». Les structures et les méthodes qu'il met en relief (problème de Dirichlet, notions de réduite et de balayée, potentiels abstraits, noyaux, ensembles polaires, énergie, représentation intégrale) serviront dans une théorie beaucoup plus générale (publiée ultérieurement aux Presses de l'Académie de Montréal) permettant de nombreuses applications (équations aux dérivées partielles, probabilités, etc.).

Il nous a donc paru important de rééditer ce cours qui est toujours d'actualité presque quarante ans après, tant il est vrai que ce qui survit à un homme, ce sont ses travaux et ses idées.

Nous avons ajouté un historique très complet écrit par Marcel Brelot lui-même, retraçant l'état de la théorie en 1972, et dont l'intérêt n'a pas diminué, malgré les progrès réalisés depuis.

Enfin, Gustave Choquet, Membre de l'Institut, qui a bien connu l'homme et le mathématicien, nous a permis de publier le texte d'une conférence qu'il avait faite après la disparition de Marcel Brelot. Nous l'en remercions ici très vivement.

L'Association Laplace-Gauss se propose ainsi d'éditer ou de rééditer un certain nombre de textes ayant trait de près ou de loin à la théorie du potentiel. L'ouvrage présent est le premier d'une série dont on espère qu'elle aura du succès.

Samois, le 28 juin 1997
D. Feyel
Association Laplace-Gauss

© Spartacus-Idh 2019

Première partie

Vie et œuvre de Marcel Brelot (1903-1987) (1)

© Spartacus-Idh 2019

⁂

(1) *par* Gustave Choquet.

Conférence de Gustave Choquet
au Séminaire de Théorie du potentiel du jeudi 8 octobre 1987

Marcel Brelot nous a quittés : il est mort le 3 août 1987 à Paris. Il était l'un des membres fondateurs de notre Séminaire, le véritable créateur des Annales de l'Institut Fourier, et tous les membres du Séminaire ont subi, de près ou de loin son influence, soit comme élèves ou collaborateurs, soit par ses conversations, publications ou lettres. Mais il était surtout, dans le monde entier, la figure la plus représentative de la Théorie du Potentiel. Je l'ai rencontré pour la première fois, fin 1947, à l'université de Grenoble où je venais d'être nommé. Aussitôt il me prit en charge et s'efforça de m'apprendre de la théorie du potentiel, en m'exposant ses problèmes en cours avec certainement comme objectif de m'intriguer et m'inciter à les faire miens. Son accueil était chaleureux ; tout de suite il me mit sur un pied d'égalité avec lui et m'aida désormais dans diverses circonstances de ma vie, avec une affection discrète et un grand désintéressement.

Il travaillait souvent dans son splendide bureau de l'Institut Fourier, où, quand il voulait accoucher d'une idée presque mûre, il se préparait un thé bien fort car, disait-il, les découvertes se font lors de pointes de l'activité cérébrale, après un long travail de défrichement.

Nous écrivîmes ensemble trois mémoires, à Grenoble d'abord, puis à Paris ; et mon travail sur la Théorie des capacités lui doit beaucoup pour l'intérêt qu'il attachait à mes progrès.

Je pense qu'il n'est pas possible de séparer l'œuvre scientifique d'un chercheur, de sa vie et de sa formation ; aussi parlerai-je d'abord avec quelque détail de sa biographie.

Il est né le 29 décembre 1903 à Châteauneuf-sur-Loire (Loiret) ; ses parents étaient tous deux instituteurs, sortis premiers de leur École Normale ; sa mère, passionnée d'histoire, avait peu de goût pour la vie ménagère. Il resta enfant unique et fut confié très tôt à une nourrice chez laquelle à l'âge de 3 ans, il tomba un jour dans une bassine d'eau bouillante ; l'arrivée miraculeuse de sa mère qui venait le voir ce jour-là, le sauva d'une mort cruelle. Sa vie, par la suite, devait être émaillée d'autres tels miracles et il survécut plusieurs fois à de graves accidents. Une mutation de ses parents à Aulnay-la-Rivière le conduisit à Cépoy, près de Montargis, chez sa grand-mère où il vécut jusqu'à son entrée comme pensionnaire au lycée de Sens.

Il fait ensuite ses études secondaires, d'abord au collège de Montargis qu'il rejoint chaque jour à vélo, puis au Lycée de Sens, enfin au Lycée Saint-Louis. En taupe (ou hypotaupe) il attrape en novembre une grippe intestinale, puis une endocardite chez ses parents où il est rentré soigner sa grippe ; il reste neuf mois allongé sur le dos, ce qui ne l'empêche pas, l'année suivante, d'être reçu aux concours de Polytechnique et de l'E.N.S. ; il entre à l'E.N.S., en 1924.

Il a dans sa promotion, R. Aron, Dieudonné, Ehresmann, Néel, Sartre ; mais il fréquente aussi Delsarte, A. Weil (promo 1922) ; Cartan, Coulomb, Dubreil, de Possel, Wyart (1923) ; Bourion, Herbrand, Nicolesco (1925) ; Chevalley, Leray (1926).

Mais ses camarades le voient peu, car il passe beaucoup de temps à l'infirmerie. Il est agrégé en 1927 et ne fait pas de Service Militaire, étant réformé ;

https://spartacus-idh.com

puis boursier Arconati-Visconti (1927-1929) en un temps où le C.N.R.S. n'existe pas ; enfin boursier Rockefeller, d'abord à Rome chez Volterra (1929-1930), puis à Berlin chez Erhardt Schmidt (1930-1931).

Il soutient sa thèse en 1931 sur un sujet proposé par Émile Picard : Étude des solutions u de l'équation $\Delta u = C(x)u(x)$ où C est une fonction > 0, au voisinage d'un point singulier de C ; il reconnaît à cette occasion le rôle des fonctions sous-harmoniques récemment introduites par Frédéric Riesz. En 1931-33, d'abord un an au C.N.R.S. nouvellement créé (sous le nom de Caisse des Sciences), puis un an à l'Institut Français de Berlin.

En 1933-38 il est chargé de cours, puis Maître de Conférences à Alger où il rencontre dans un bal en 1933 sa future épouse, Alice Bautrant, qu'il épouse en 1935. De 1938 à 1942 il est professeur de Math. Géné. à Bordeaux.

Puis, pour des raisons familiales de santé, il se dirige vers Grenoble où pendant deux ans il enseigne d'abord la Mécanique Rationnelle ; à cette occasion, il cherche à donner un exposé plus rigoureux des notions de travail, forces intérieures, travaux virtuels, à partir de la notion de mesure ; cette axiomatique, complétée plus tard par René de Possel, est exposée dans un fascicule d'une cinquantaine de pages.

Il est nommé à Paris en 1953, Maître de Conférences d'abord suivant la coutume d'alors, puis Professeur.

En 1974 il est élu Correspondant de l'Académie des Sciences, dont il a été — fait exceptionnel — quatre fois lauréat de 1939 à 1968 ; c'est hélas, aussi l'année où disparaît son fils Alain, physicien des solides, tué dans un accident d'avion.

© Spartacus-Idh 2019

Ses travaux

La liste de ses publications comporte plus de 150 titres ; la première est une Note aux CRAS en 1929.

C'était un perfectionniste ; aussi n'écrivit-il aucun vrai livre qui soit une Somme ; mais il a écrit de nombreux fascicules qui eurent une grande influence par leur élégance et leur contenu scientifique :

- ***un cours de 2e cycle (1954)*** : « Notions sur les fonctions harmoniques »
- ***un cours de 3e cycle (1959)*** rédigé d'abord par Houzel : « Éléments de la Théorie du Potentiel ».

  Ce cours qui eut un très grand succès fut traduit en russe.
- ***un cours du Tata Institute (1960)*** et ***un cours de Montréal (1965)*** où il développe son axiomatique.
- ***un cours de Stresa (1969)*** qui contient un bref historique de la Théorie du Potentiel.
- ***le fascicule 175, (1970) des Lecture Notes in Maths*** : « On topologies and boundaries in potential theory ».

La plupart des travaux de Brelot concernent la Théorie du Potentiel ; mais ceux qui ne la concernent pas montrent qu'il savait très vite assimiler une nouvelle théorie et y apporter une contribution intéressante : j'ai déjà mentionné ses recherches sur la Mécanique. Mais précédemment, à Alger, il avait fait 8 publications sur la statistique, probabilités, erreurs, et antérieurement amélioré

le schéma de la lutte pour la vie de Volterra. Signalons encore un travail qu'il fit sur l'intégrale de Daniell à une époque où Bourbaki hésitait entre cette intégrale et celle de Radon. Et enfin une étude théorique et numérique des intégrales de Fresnel.

Brelot fut toute sa vie un grand travailleur ; il se plaignait d'être lent, mais... les résultats sont là ! Dès son entrée dans la vie de chercheur, dans les années 30, il se chargea de la rédaction de cours :

- ***cours de Picard*** : « Problèmes aux limites des équations différentielles » ;
- ***cours de Volterra*** : « Théorie mathématique de la lutte pour la vie » ;
- ***deux cours de Julia*** (en collaboration) : « Principes géométriques de l'Analyse » et « Représentation conforme » ;
- ***traduction d'un livre de Levi-Civita***.

Je veux enfin souligner l'importance et l'utilité de deux Notices historiques sur le développement de la Théorie du Potentiel que lui seul, avec sa connaissance globale de la théorie, pouvait écrire :

1. aux Annales de l'Institut Fourier 1952, T. 4, en 28 pages : « La théorie moderne du potentiel (de Gauss 1840 à 1952) ;
2. à l'Ens. Math. de Genève 1972, en 36 pages : « Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel ».

Ajoutons-y ses brefs exposés historiques du cours d'été de Montréal (1965) et du cours d'été de Stresa (1969).

Je veux citer ici une très belle Notice similaire de Heinz Bauer, en 34 pages : « Harmonie spaces, a survey » au Séminaire de Mathématiques, Université de Bari (Italie). On aurait besoin maintenant d'un exposé historique analogue concernant le développement récent des liens entre Théorie du potentiel, processus de Markov, semi-groupes, familles résolvantes ; en attendant, les brefs « Commentaires et Notes historiques » de l'ouvrage monumental de P. A. Meyer et Cl. Dellacherie rendent bien des services.

Son activité sociale

Certes, Brelot consacrait le meilleur de son temps à la recherche mathématique, mais il ne se dérobait jamais aux tâches d'intérêt collectif et se les imposait même parfois quand il le croyait nécessaire : j'ai déjà parlé de ses rédactions de cours, et de Notices historiques.

Il fut Secrétaire adjoint, puis Secrétaire du Comité National Français des Mathématiciens pendant une vingtaine d'années. Il fut président de la S.M.F. en 1960.

Mais surtout il fut le véritable fondateur des « Annales de l'Institut Fourier » qui, de petite revue pluridisciplinaire (appelée Annales de Grenoble) devint sous son impulsion en quelques années l'un de nos meilleurs journaux mathématiques, de lecture particulièrement agréable.

Parti de rien, il sut avec opiniâtreté trouver une multitude de petites aides financières, locales ou nationales, et susciter des articles mathématiques de grande qualité. En même temps il faisait de ces Annales, par un vaste système

https://spartacus-idh.com

d'échanges, un outil incomparable d'enrichissement de la bibliothèque du Département de Mathématiques de Grenoble. Une telle réussite n'aurait pas été possible s'il n'avait pas eu obstination, esprit d'initiative, et une facilité épistolaire exceptionnelle. Dois-je ajouter qu'il utilisait aussi cette facilité pour faire savoir à des collègues, ou à des responsables administratifs ce qu'il pensait de leur action, ou de la valeur scientifique ou morale de tel ou tel candidat.

Il était donc bien loin d'être un Professeur Nimbus ; il avait au contraire, quand il y appliquait son esprit, un sens aigu des réalités et de la vie quotidienne ; c'est ainsi que, sous l'occupation allemande, il était passé maître dans la fabrication de fausses cartes d'identité, dont les bénéficiaires lui gardent une grande reconnaissance.

Son influence scientifique

Elle s'exerçait, bien sûr par ses publications, mémoires ou monographies ; mais aussi dans une certaine mesure par ses cours. Il n'aimait pas l'enseignement aux grandes masses ; c'était un élitiste ; il préparait très soigneusement ses cours, quel qu'en fût le niveau, avec une grande exigence de rigueur, mais il estimait que seul un petit nombre d'étudiants pouvait apprécier l'intérêt de cette rigueur. On comprendra donc qu'on ne pouvait pas l'accuser de laxisme aux examens. Par contre l'auditoire restreint qui le suivait jusqu'au bout en tirait un grand profit. A l'examen, il s'intéressait spécialement aux étudiants qui, ne serait-ce que dans une seule question manifestaient, soit un souci de rigueur, soit un peu d'originalité.

Je pense intéressant de citer ici un extrait d'un témoignage de Jean-Claude Necker, astronome, qui fut étudiant de Brelot, à Bordeaux (1940-42) puis à Grenoble (1942-44). « Quels souvenirs garderai-je du Brelot de cette époque ? Brelot était plus bourbakiste que Bourbaki. Déjà, dans mon année de mathématiques générales, nous avions entendu beaucoup parler de l'axiomatisation bourbakiste, et l'enthousiasme de Brelot était pour moi très contagieux. Il n'était pas, je dois le dire, largement communicatif, dans la mesure où sur une centaine d'élèves inscrits au certificat de mathématiques générales, je crois que nous fûmes seulement une dizaine à franchir les barrières de l'examen. Ce sont des proportions analogues qui caractérisent les hécatombes pour lesquelles Brelot était célèbre à l'université de Grenoble. En mécanique rationnelle, nous eûmes une vision très personnelle de la mécanique, où Brelot introduisait sa théorie des dynames ; cela me paraissait personnellement une façon astucieuse et originale de concevoir un enseignement. Je vois encore Brelot se promener en long et en large devant le tableau noir, interrompre ses phrases, en recommencer d'autres, et désespérer la plupart des étudiants. Je dois dire que, moi, j'adorais ce type d'enseignement, qui me changeait heureusement du cours dicté de taupe, et qui me forçait à réfléchir un peu par moi-même sur des idées qui, il faut bien le dire, étaient fort riches. Il était très amusant d'entendre cet homme, qui n'appartenait pas au groupe Bourbaki, être plus bourbakiste que Bourbaki, dans sa façon d'envisager l'axiomatique mathématique, son extension du bourbakisme à la mécanique physique, à la mécanique des fluides, à la mécanique rationnelle ».

© Spartacus-Idh 2019

Ses élèves de recherches et ceux qu'il a influencés directement

C'est surtout après sa nomination à Paris et le développement de son axiomatique qu'il eut de nombreux élèves ; ce furent successivement : Godefroid 1951, à Grenoble ; M. Arsove, 1951, à Grenoble ; Linda Lumer-Naïm, 1957, à Grenoble puis à Paris (sur la frontière de Martin) ; Anger, de l'Allemagne de l'Est, 1958 ; Rose-Marie Hervé 1958 (Axiomatique des fonctions sur harmoniques) ; Ramaswamy, de Madras, 1959 ; Joane Elliot (nièce de Feller) 1961 (Espaces de Dirichlet) ; Cowrisankaran, de l'Inde, puis Canada, 1962 (étude à la frontière) ; Bernadette Brelot-Collin, épouse d'Alain Brelot (équation de type Tricomi) ; de La Pradelle 1967 (quasi-analyticité en théorie axiomatique) ; Guessous 1967 ; Anandam 1969 (axiomatique sans potentiel > 0) ; Smyrnelis 1970 (axiomatique des fonctions biharmoniques) ; M. Cabellero, du Mexique 1973 (elle travailla aussi avec Malliavin) ; Guillerme 1973.

Déjà ses petits-fils spirituels ne se comptent plus, et ses arrière-petits fils sont nombreux ; ainsi s'accélère le développement des Mathématiques !

Il avait une façon personnelle de prospecter et former ses élèves de recherche : bien souvent il les repérait chez ses étudiants par leurs mini-étincelles d'originalité, sans tenir compte de leur absence de culture générale. Puis il savait les retenir par une patience sans faille, par sa gentillesse et sa modestie : en s'effaçant devant eux, il leur faisait oublier leurs complexes et leur timidité ; il parvenait ainsi à tirer de chacun le meilleur, comme le tailleur de diamants qui s'adapte à la structure de la pierre brute qu'on lui a confiée.

Mais il ne supportait pas l'incompétence chez ceux qui se prétendent compétents, ni surtout l'arrivisme et le cheminement tortueux des arrivistes, ce qui lui attira quelques inimitiés, et une certaine réputation de misanthropie.

Il avait de la recherche et de l'éthique du chercheur, une conception exigeante qu'il a transmise à ses élèves ; je n'ai jamais rencontré quelqu'un qui, plus que lui, cite scrupuleusement ses sources d'inspiration, ses prédécesseurs, et fournisse une riche bibliographie. L'un de ses élèves dit de lui : « Au moment où les crédits et les postes sont plus rares et la concurrence plus farouche, nous avons été parfois pris de doute sur la valeur de notre profession. Heureusement l'exemple de notre Maître était là pour nous prouver que nous ne nous étions pas trompés, et nous redonner le courage de persévérer. Nombreux sont ceux qui, dans le couloir de notre Équipe, le savent et ont pour lui de la vénération ».

Son influence s'est aussi exercée — et peut-être surtout — sur des mathématiciens déjà formés, qu'il réussissait à attirer dans ses rets par un art de poser des questions adaptées à l'interlocuteur, en lui laissant entendre que lui seul pouvait résoudre le problème, dont la solution lui serait d'un grand secours, en même temps qu'un grand pas pour la théorie du potentiel. Que de fois j'ai reçu de lui un coup de téléphone pour me dire « voici un problème dont je suis sûr que tu vas me trouver la solution ; j'ai cherché partout des références et je n'ai rien trouvé ». Comment alors ne pas étudier le problème posé ?

C'est ainsi que tombèrent dans ses rets : H. Cartan, Doob, Choquet, Deny, H. Bauer (1966), Bony (1966 et 1968), l'Équipe roumaine (Constantinescu, Cornea, Boboc, Bucur), Stampacchia, Loeb, B. Walsh (1969), Bertin (1969),

https://spartacus-idh.com

P.-A. Meyer, Mokobodzki, Courrège, D. Sibony, Feyel (1971), Jackson, Michel Hervé 1972, John Taylor, Fuglede, l'Équipe tchèque (Kräl, Lukès, Netuka, Vesely) ; Ben Saad 1982. Que de conversations et d'échanges de lettres supposent ces nombreux contacts !

Le séminaire de théorie du potentiel

Dès son arrivée à Paris, en 1953, Brelot participa au Séminaire d'Analyse aux objectifs variés, analyse fonctionnelle et potentiel, que j'avais organisé vers 1951, mais dont les conférences n'étaient pas publiées ; bientôt Brelot suggéra pour la partie Potentiel une publication qui serait éditée par Belgodère-Lardeux ; il se chargea des questions matérielles, et la publication commença en 1957 sous le nom de Séminaire B.C. qui, l'année suivante, dès la nomination de Deny à Paris devint le Séminaire B.C.D. Jusqu'à la publication séparée du Séminaire d'Initiation à l'Analyse, en 1962, il accueillit aussi de nombreux articles sur la convexité.

Le volume 1 contient le premier exposé de Brelot sur son axiomatique du problème de Dirichlet, ainsi que la seconde publication de Deny sur la théorie Beurling-Deny des espaces de Dirichlet. C'est dans le volume 5, en 1960, que P.-A. Meyer, tout frais émoulu du cours et du Séminaire de Loève, publia sa série d'exposés probabilistes qui eut un succès considérable et dont l'action séminale donna naissance à l'École probabiliste de Strasbourg.

Ce Séminaire eut une grande influence sur le développement de la théorie du potentiel en France et fit de Paris le centre mondial de cette théorie ; les nombreux centres potentialistes ou proba-potentialistes existant actuellement dans le monde — Erlangen, Prague, Bucarest, Copenhague, etc. ont, à un plus ou moins grand degré, une dette envers ce Séminaire. Brelot avait clairement vu que des exposés oraux, aussi bons soient-ils, doivent être prolongés par une publication de haute qualité pour avoir un écho durable : « *verba volant, scripta manent* ».

L'homme Brelot

Avant de passer à une brève analyse de son œuvre mathématique, je voudrais évoquer l'homme qu'il fut. Certes, la grande passion de sa vie fut la recherche mathématique, mais s'il n'était ni joueur d'échecs, ni mycologue amateur comme notre ami commun Deny, il avait aussi des intérêts variés : il raffolait de grande musique, qu'il écoutait religieusement avec un ami, sur une très bonne chaîne Hi-Fi ; il aimait relire quelques bons auteurs, tels A. France, Gide, Proust, J. Romains,… ; et en digne fils de sa mère, il s'intéressait à la civilisation gréco-romaine. Il avait une grande facilité pour apprendre les langues (il l'a transmise à sa fille Claude) et lisait avec plaisir allemand, anglais, italien, espagnol.

La politique l'intéressait beaucoup, mais il n'était inscrit à aucun parti, et avait une piètre estime pour la plupart des hommes politiques. Comme père et mère il était agnostique, mais sans agressivité.

Il savait apprécier la vie ; il avait été bon danseur, aimait les voyages, les

© Spartacus-Idh 2019

belles voitures (qu'il conduisait vite malgré une très mauvaise vue : « Je vois les grandes masses » disait-il) ; et c'était un convive apprécié que ses élèves aimaient emmener au restaurant après notre Séminaire du jeudi.

Il reprochait aux médecins de ne pas savoir empêcher la décrépitude, intellectuelle et physique. Quant à lui, malgré une mémoire diminuée et moins de résistance pour un travail prolongé, il garda jusqu'au dernier jour intelligence, sens critique et goût pour la recherche mathématique.

Il avait une grande confiance dans l'énergie de sa femme et son aptitude à le sortir de ses ennuis de santé ; il lui disait qu'elle était son pilier, et que grâce à elle il vivrait cent ans. De fait, en dépit de multiples accidents graves qu'il racontait avec un humour tranquille, et de maux chroniques qui l'accompagnèrent toute sa vie, une constitution somme toute robuste et la vigilance de son épouse le remettaient toujours en selle. Il mourut à 83 ans, après un séjour au Centre mathématique d'Oberwolfach qu'il aimait beaucoup.

C'est un des hommes dont j'ai le plus admiré le caractère.

Son style de travail

La source de sa patience et sans doute aussi de sa modestie me semble avoir été sa conviction, qu'il m'a souvent exprimée, qu'il avait besoin de beaucoup de temps pour comprendre un problème, un exposé ; je le rassurais alors en lui disant qu'il n'était pas seul dans ce cas, car il y a loin entre compréhension superficielle et compréhension profonde.

Sa grande honnêteté intellectuelle et son exigence lui imposaient un incessant travail d'information scientifique, tel celui qu'il fit, en 1945, puis en 1955 lorsqu'il s'aperçut que ses recherches ne pouvaient s'épanouir sans des connaissances plus approfondies en topologie, il se plongea alors dans les Bourbaki de Topologie générale et Espaces fonctionnels.

Il avait progressivement acquis, par amour de l'essentiel, un style nerveux, et dépouillé à un point tel que souvent, relisant après plusieurs années un de ses propres travaux, il avait bien du mal à en comprendre les démonstrations !

Ses travaux en théorie du potentiel

Soixante années de recherches ne se résument pas aisément, d'autant plus qu'une partie de ses résultats sont rapidement devenus classiques, se sont incorporés au « corpus » potentialiste, et ont subi des remaniements successifs. Je n'analyserai donc que les plus originales de ses contributions à une théorie qu'il commença à étudier environ 150 ans après que Lagrange eut reconnu, en 1773, que l'attraction newtonienne $\frac{\vec{u}}{r^2}$ par une masse ponctuelle au point 0, était le gradient de la fonction $\frac{1}{r}$, et que Laplace eut reconnu l'harmonicité des potentiels hors du support des masses.

Quand Brelot arrive sur la scène potentialiste, des idées-clefs ont été introduites en potentiel newtonien : Gauss d'abord (1840) puis avec plus de rigueur Dirichlet, Riemann et enfin Hilbert (1900) ont résolu par une méthode variationnelle utilisant une forme quadratique, les problèmes de l'équilibre,

https://spartacus-idh.com

de Dirichlet et du balayage, du moins pour des données assez régulières. Perron (1923) et Wiener (vers 1924) ont introduit de nouvelles méthodes, plus linéaires, pour résoudre le problème de Dirichlet à donnée continue ; et Wiener a défini la capacité des compacts. Mais surtout, F. Riesz (1925 et 1930) a introduit, à partir de l'étude des fonctions $f(z)$, les fonctions surharmoniques (initialement, plutôt les sous-harmoniques) et montré que localement elles sont identiques à des potentiels de mesures $\geqslant 0$, à l'addition près d'une fonction harmonique.

C'est alors que Frostman et Brelot entrent en scène, toujours dans le cadre des potentiels newtoniens dans $\mathbb{R}^n$ (où $n > 2$). Les outils de Frostman sont les mesures de Radon $\geqslant 0$ et leur topologie vague, le principe de l'énergie et le principe du maximum ; il remarque d'ailleurs que ses méthodes s'appliquent aussi aux potentiels de M. Riesz. Les outils de Brelot sont fort différents, linéaires et non quadratiques ; ils lui ont été inspirées par son utilisation, dans sa thèse, des fonctions surharmoniques pour l'étude des solutions u de $\Delta u(x) = c(x)u(x)$ pour $c \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$: il étudie le balayage, non plus à partir des masses, mais des potentiels ou des fonctions surharmoniques, ne revenant aux masses qu'à la fin des opérations sur ces fonctions.

© Spartacus-Idh 2019

Son théorème de convergence (1938). Il démontre que dans un domaine, la limite d'une suite décroissante (f_n) de fonctions surharmoniques coïncide, soit avec $-\infty$, soit avec une unique fonction surharmonique, hors d'un ensemble E de capacité **intérieure** nulle. Le mot « intérieure » devait être, en 1942, remplacé par « extérieure » par H. Cartan.

Le Problème de Dirichlet (1939). Brelot lui donne une forme définitive en le posant pour une donnée frontière g quelconque, et non plus continue comme chez Perron-Wiener. La donnée g est résolutive si et seulement si g est μ-intégrable pour la mesure harmonique μ associée à un point du domaine.

Capacité extérieure ; ensemble polaire ; effilement (1939, 40, 41). Presque simultanément il introduit la notion de capacité extérieure (ce que feront aussi indépendamment Beurling et Monna) et de quasi-partout (d'où aussitôt le problème de la capacitabilité des ensembles boréliens).

Puis la notion d'ensemble polaire, défini comme ensemble sur lequel au moins une fonction surharmonique vaut $+\infty$; ce n'est que plus tard que H. Cartan montrera que (X polaire $\iff$ $(C^*(X) = 0)$).

La notion d'ensemble E effilé en un point $a \in E$ était plus cachée ; il la définit ainsi : (E effilé en a) $\iff$ (il existe f surharmonique au voisinage de a telle que $\liminf_{\substack{x \to a \\ x \neq a, x \in E}} f(x) > f(a)$).

Cette condition peut aussi s'exprimer en disant que a est un point isolé de l'adhérence de $E \cup \{a\}$ pour la topologie définie plus tard par Cartan, *i.e.* la moins fine des topologies qui rendent continus tous les potentiels. Brelot montre que pour un point frontière a d'un domaine ω, **l'irrégularité** de a pour le problème de Dirichlet équivaut à l'effilement de ω^c en a.

Extrémisation, réduite (1944). Dans plusieurs mémoires successifs, Brelot met en place sa méthode favorite, celle de l'extrémisation : si $X \subset \overline{X} \subset \omega$ ouvert, et f surharmonique sur ω, l'extrémisée de f par rapport à ω est la plus petite fonction surharmonique g telle que $g \geqslant f$ quasi-partout hors de ω. Brelot montre l'existence de cette extrémisée ; il en résulte par exemple que l'ensemble des points d'un ensemble Y où Y est effilé est polaire.

De façon analogue et plus générale, il définit aussi la réduite associée à une fonction $f \geqslant 0$ quelconque.

Études à la frontière et frontière ramifiée. Une des préoccupations constantes de Brelot depuis les années 40 a été l'étude du comportement des fonctions surharmoniques dans un ouvert ω, de complémentaire non polaire, au voisinage de la frontière. Il était un maître dans ce domaine ; lui et Doob y ont obtenu, avec des méthodes différentes, des résultats très fins qui seront difficilement dépassés.

Cette étude était liée à la ramification de la frontière dans le sens des précurseurs Evans, Perkins, de La Vallée Poussin qui avaient, eux, surtout étudié le cas du plan avec l'outil des fonctions analytiques. Brelot y consacra de nombreux travaux, inspirés en partie par la célèbre frontière Martin (1941) dont les points sont définis au moyen des fonctions harmoniques $\geqslant 0$, extrémales dans le convexe compact des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ prenant la valeur 1 en un point fixé. Cette préoccupation le conduisit à son étude (avec Choquet) des « Espaces et lignes de Green » qui englobent les surfaces de Riemann classiques, et à l'introduction de diverses distances sur ω, par exemple la distance géodésique.

Dans les problèmes de Dirichlet ramifiés s'introduisent un effilement « minimal » et des limites fines aux points frontière ramifiés (voir aussi Naïm).

Les espaces harmoniques de Brelot (1957-58). Dès les années de guerre (1939-45), inspiré par des exposés de Bourbaki, Brelot rêvait d'unifier par une axiomatique l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques ; mais les fervents de l'axiomatisation eux-mêmes l'en avaient détourné. Puis Tautz (1949) et Doob (1954) proposèrent deux axiomatiques, d'inspiration probabiliste chez ce dernier. Pour Brelot, elles manquaient d'élégance ou de généralité, mais elles lui apportèrent une nouvelle motivation ; il travailla, tailla, simplifia, avec le souci de construire une axiomatique adaptée aux opérateurs elliptiques, tout en étant assez riche pour qu'on puisse y définir en termes primitifs les notions de la théorie newtonienne et y démontrer les mêmes théorèmes clefs.

Le miracle est qu'il réussit à atteindre ces deux objectifs ; cela explique la masse des travaux suscités par son axiomatique, et ayant pour but soit l'étude de l'axiomatique elle-même et de ses applications, soit des extensions de cette axiomatique. Pour la définir, le mieux est encore de citer Brelot (1957-58) :

« Dans un espace topologique Ω localement compact mais non compact, connexe et localement connexe, on donne sur chaque ouvert un espace vectoriel de fonctions réelles finies continues dites harmoniques, satisfaisant aux axiomes suivants (de caractère local).

https://spartacus-idh.com

1. (Axiome de faisceau). Toute fonction harmonique dans un ouvert ω est harmonique dans tout ouvert partiel, et inversement toute fonction localement harmonique dans ω est harmonique dans ω.

Appelons maintenant régulier tout ouvert relativement compact ω tel que toute fonction réelle finie continue f sur $\partial\omega$ se prolonge continûment dans ω de façon unique selon une fonction harmonique qui est $\geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.

On peut maintenant énoncer le second axiome.

2. (Axiome de résolubilité locale du problème de Dirichlet). L'espace Ω possède une base d'ouverts réguliers.

3. (Axiome de convergence). Toute suite croissante (f_n) de fonctions harmoniques dans un domaine ω a partout pour limite $+\infty$, ou a une limite harmonique. »

Ces axiomes permettent déjà de définir les fonctions surharmoniques, les potentiels, les ensembles polaires, et de retrouver une grande partie des théorèmes de la théorie newtonienne, y compris (M^me^ Hervé), avec la théorie des éléments extrémaux, une représentation intégrale des fonctions harmoniques $\geqslant 0$, du type Riesz-Martin.

Si l'on ajoute un 4^e^ axiome, à savoir qu'il existe dans Ω au moins un potentiel $\geqslant 0$, on retrouve le théorème de résolubilité de Brelot dans le problème de Dirichlet ; enfin un axiome dit de « domination » permet de retrouver le grand théorème de convergence de Brelot-Cartan.

Plus tard (1962), Heinz Bauer élargit la théorie de Brelot en affaiblissant l'axiome 3 de convergence, de façon à englober l'équation de la chaleur ; et en 1965-1972, Constantinescu et Cornea développent un schéma, en un certain sens final, de la théorie locale du potentiel, tout en n'ayant plus, évidemment, la simplicité de l'axiomatique Brelot.

Je vois deux raisons à l'attrait de cette dernière, en plus de sa simplicité :

1. D'abord la transparence qu'elle apporte aux notions de base et aux démonstrations, même dans le cas classique ; les ressorts qui sous-tendent la théorie deviennent évidents ; dès qu'on a vérifié que les axiomes sont satisfaits, ce qui est souvent élémentaire, la structure euclidienne de l'espace et les propriétés différentielles des fonctions en jeu n'interviennent plus.

2. Ensuite la grande généralité des espaces de Brelot : ils vont des réseaux électriques, de dimension 1 ou plus (Lumer) à des espaces contenant des tores de dimension infinie (Berg 1976), en passant par des ouverts euclidiens munis d'un opérateur elliptique, éventuellement dégénéré.

Comme toute bonne axiomatique, celle de Brelot permet une grande économie de pensée. Une brève revue des principaux exemples connus s'impose ici :

1. (**R. M. Hervé** 1962, puis en collaboration avec **M. Hervé**). J'énoncerai seulement un cas particulier de ses résultats :

Sur l'ouvert Ω euclidien, soit L un opérateur uniformément elliptique (*i.e.* minoré et majoré par un $k\Delta$) de la forme $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, où les, coefficients a_{ij} sont mesurables-Lebesgue et bornés. Alors les solutions u de $Lu = 0$ au sens

© Spartacus-Idh 2019

des distributions sont continues et vérifient l'axiomatique Brelot. Ceci permet de compléter des résultats antérieurs difficiles de Stampacchia (1964).

2. (**Bony** 1967 et 1969). Soit L un opérateur différentiel linéaire sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de la forme canonique $\sum X_i^2 + Y + c$ tel que l'algèbre de Lie engendrée par les coefficients de X_i (resp. des X_i et Y) soit du rang maximum n ; alors les fonctions L-harmoniques vérifient l'axiomatique Brelot (resp. Bauer). Ces conditions sont presque nécessaires (Bony) si l'on se restreint à un sous-ouvert dense de Ω.

3. (**Krylov** et **Safonov**, exposé dans l'édition récente du livre de Gilbarg et Trudinger, « Elliptic partial differential equations of second or der » chez Springer.

Soit L un opérateur uniformément elliptique sur Ω dont les coefficients dans la forme ordinaire de L sont seulement continus ; alors les fonctions L-harmoniques vérifient l'axiomatique Brelot (les auteurs démontrent seulement que des inégalités de type Harnack existent ; mais à partir de là on vérifie les axiomes de Brelot).

Brelot et la théorie locale du potentiel. Les deux Notices historiques de Brelot, la seconde surtout, montrent bien l'intérêt qu'il portait à la théorie non-locale du potentiel. Il admirait tout spécialement le lien spectaculaire établi par G. Hunt (1957, puis 58, 66) entre cette théorie et celle des martingales et processus de Markov. Il en comprenait parfaitement l'agencement interne ; un moment même il envisagea de recommencer vers les probabilités le même effort qu'il avait fait en 1945 et 1955 vers la topologie. Mais, pris d'abord par le développement de son axiomatique dont la formulation est d'ailleurs presque contemporaine des travaux de Hunt, puis conscient ensuite qu'il serait trop tard pour devenir un Maître dans une discipline toute nouvelle pour lui, il préféra — sans doute avec sagesse — utiliser sa maîtrise exceptionnelle de la surharmonicité et de l'extrémisation pour achever son œuvre dans la théorie locale que personne n'a dominée comme lui.

Cette théorie (faut-il le rappeler à des potentialistes ?) était bien digne qu'on lui consacre toute une vie ; depuis deux siècles elle a été un ferment de l'Analyse où, à la fois elle a été la matrice d'où sont sorties des théories nouvelles, et le banc d'essai d'autres théories naissantes ; on peut affirmer que pendant deux siècles, la plupart des grands analystes lui ont consacré une part importante de leur œuvre.

Matrice, elle l'a été pour les méthodes variationnelles, (intégrale de Gauss $\int (U^\mu - 2f)\,\mathrm{d}\mu$ ou de Dirichlet $\int (\mathrm{grad}.u)^2\,\mathrm{d}x$, pour les distributions, pour la théorie des capacités.

Banc d'essai, pour la théorie de Fredholm, l'intégrale de Lebesgue, les mesures de Radon (Frostman), la représentation intégrale dans les cônes faiblement complets.

Le champ de ses applications n'a pas cessé de s'étendre : opérateurs elliptiques, fonctions de plusieurs variables complexes. Elle sait utiliser les jeunes théories qu'elle vient d'engendrer : à peine nées les distributions donnent une belle caractérisation des fonctions surharmoniques par la condition $\Delta T \leqslant 0$, et trouvent dans la thèse de Deny leur première utilisation substantielle ; et

https://spartacus-idh.com

l'interprétation probabiliste de la théorie générale fournit, avec ses trajectoires continues de type brownien, un nouvel outil puissant d'étude de l'effilement, des points-frontière, de la capacité, en même temps qu'une nouvelle vision intuitive des êtres potentialistes.

Cet aspect probabiliste, que Brelot regrettait tant d'être arrivé trop tard pour le maîtriser, est sans doute le plus bel exemple d'interaction féconde entre deux théories : la théorie du potentiel, née dans le ciel (Kepler 1618, Newton 1665) et la théorie des probabilités née d'un coup de dés (Pascal 1654), donc presque simultanément, devaient après trois siècles et des petits pas l'une vers l'autre (Wiener 1923, puis P. Levy, Doob), prendre avec G. Hunt (1957) pleinement conscience que leurs parties les plus vivaces ne sont que deux faces complémentaires d'un même bel objet, et qu'on ne peut bien comprendre l'une sans connaître l'autre (le traité C. Dellacherie–P.-A. Meyer veut en donner la preuve).

« Ainsi ne se ralentit pas la fécondité d'une théorie qui, après avoir compté tant de noms illustres, reste un centre dans l'Analyse contemporaine » (Brelot, fin de sa 1re Notice historique).

Le *curriculum vitæ* et la liste des travaux scientifique de Brelot qui suivent sont dus à Brelot lui-même.

Ont été déposés aux Archives de l'Académie des Sciences :

- « Analyse sommaire des travaux », par Brelot lui-même.
- Un « Rapport sur les travaux de Marcel Brelot », par H. Cartan.

Voir aussi :

- Sa Notice nécrologique, Annuaire E.N.S. 1988 ou 89 par Choquet et Dieudonné.
- Une brève Notice dans la Vie des Sciences de l'Académie 1989 ou 90.
- Une Notice plus détaillée sur sa Vie et son œuvre dans « Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques », Paris.

© Spartacus-Idh 2019

Brelot Marcel, Émile.

Lieu et date de naissance — Curriculum vitae résumé. Titres et responsabilités successives.

- Chateauneuf sur Loire (Loiret 45) le 29 décembre 1903.
- Mathématiques spéciales à Saint-Louis.
- École Normale Supérieure 1924-27
- Agrégation 1927.
- Boursier Arconati Visconti 1927-29.
- Boursier Rockefeller à Rome puis Berlin 1929-31.
- Chargé de Recherches C.N.R.S. 1931-33.
- Thèse 1931.
- Chargé de cours à la Faculté des Sciences d'Alger (1933), puis Maître de conférences.
- Titulaire à Bordeaux (1936), à Grenoble (1942), à Paris (1953).
- Secrétaire du Comité Français de l'Union Mathématique Internationale.
- Président de la S.M.F. (1960), Correspondant de l'Académie (1974).
- Séjours à l'étranger.

Situation de famille.

- Marié en 1933 à Alice Bautrant, 2 enfants : fille Claude Crozier, fils Alain, Docteur en physique, maître-assistant, décédé en 1974.

Décorations, appartenance à des académies étrangères, distinctions et prix, etc.

- Chevalier de la Légion d'Honneur.
- 4 prix de l'Académie des Sciences : Francœur (1939), Saintour (1945), Carrière (1952) et Servant (1968).
- Correspondant de l'Académie des Sciences de Bavière.
- Expert de l'UNESCO et professeur à Buenos Aires (été 1968).
- Membre honoraire de l'Union Mathématique argentine (1968).
- Membre du Comité des Sociétés Savantes (C.T.H.S.).

Discipline scientifique. Thèmes scientifiques abordés et résumé de l'œuvre scientifique (énumération des apports principaux en matière de recherche et applications). Principaux ouvrages.

- Analyse mathématique, surtout théorie du potentiel, environ 150 articles ou ouvrages.

https://spartacus-idh.com

Principaux ouvrages.
1959, cours du C.D.U. 4 éditions, traduit en russe.
1960, 1er cours du Tata Institute ; 2e cours en 1966 dans *Lecture Notes* no 175, traduit en russe.
1965, Cours d'été de l'Université de Montréal : Axiomatique des fonctions harmoniques.

- Approfondissement de la théorie du **balayage** (notions de réduite et balayée d'une fonction).
- Résultat définitif sur le **problème de Dirichlet** (théorème de résolutivité par la méthode dite P.W.B. (méthode Perron-Wiener-Brelot)).
- Notion **d'effilement**, traduite par Cartan en termes de « topologie fine » ; notions de base donnant lieu à des recherches multiples.
- Théorème de **convergence** des fonctions surharmoniques, ou intervient un ensemble exceptionnel de capacité « intérieure » nulle, qui a été montré par Cartan de capacité « extérieure » nulle ; forme définitive fondamentale.
- Notion **d'ensemble polaire** introduite pour remplacer les ensembles de capacités intérieure nulle, et que Cartan à montrée identique à la notion d'ensemble de capacité extérieure nulle. Résolutivité avec la frontière de Martin.
- **Axiomatique** des fonctions harmoniques, complétude, généralisée par de nombreux auteurs. À la base, inspirée par un travail probabiliste de Doob. Devenue une source de travaux multiples.

Je me suis occupé un peu de mécanique (petit ouvrage axiomatique de mécanique classique), des fonctions de Gilbert et spirale de Cornu à propos de problèmes de diffraction large, de questions de théorie des erreurs à propos de statistiques de pêche.

Autres informations jugées désirables (activités divers, etc.).

- Organisation du cours d'été italien de Stresa (1969) (CIME).
- Fondateur avec Choquet-Deny du séminaire parisien de théorie du potentiel.
- Fondateur avec Néel des Annales de l'Institut Fourier à Grenoble.
- Devenu titulaire à Paris de la chaire d'Analyse Supérieure.
- Nombreux séjours à l'étranger : Conférences et Enseignements comme visiting professeur, un ou plusieurs mois :
- U.S.A. et Canada (10 Universités).
- Inde, Tata Institute 1959 et 1966.
- Japon 1962.
- Argentine 1968.

Date et signature. 23 Janvier 1985.

© Spartacus-Idh 2019

Liste des travaux scientifiques

Quelques rédactions ou traductions vers 1930.

- É. Picard, Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles (Cahiers scientifiques V).
- V. Volterra, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie (Cahiers sc. VII) ;
  et, en collaboration avec d'autres auditeurs
- G. Julia, Leçons sur les principes géométriques d'Analyse (1re partie) (Cahiers sc. VI).

Leçons sur le problème de la représentation conforme (Cahiers sc. VIII).
Traduction de l'ouvrage en italien de T. Levi Civita : Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes (Alcan 1932).

Publications personnelles par année du périodique ou de l'ouvrage (parution parfois plus tard).

Les publications les plus importantes sont marquées d'un ou deux astérisques sauf pour les articles aux C.R. peu après repris et développés. Certaines notes aux C.R. se suffisent à elles-mêmes et n'ont pas été développées. Les ouvrages sont marqués du signe •

1929

1. *Sur le problème de Dirichlet extérieur dans le plan relativement à l'équation* $\Delta u = c.u$ (C.R. t. 189 p. 1230).

1930

2. *Sur le problème de Dirichlet extérieur pour l'équation* $\Delta u = c.u$ $(c > 0)$ (C.R. t. 190 p. 201).

3. *Sur l'équation* $\Delta u = c.u$ *où* $c > 0$ *admet des points singuliers et sur une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier.* (C.R. t. 190 p. 286).

4. *Sur l'équation* $\Delta u = c(x,y)u(x,y)$ $(c > 0)$ (C.R. t. 190 p. 411).

5. *Sopra la nozione di sorgente puntuale del calore in un piano irradiante in equilibrio termico* (Rend. dei Lincei XI. fasc. 3 février 1930).

6. *Sopra l'equazione* $\Delta u = c.u$ $(c \geqslant 0)$. (Rend. dei Lincei. XI fasc. 4, février 1930).

7. *Sopra le sorgenti puntuali del calore in un piano irradiente in equilibrio termico* (Rend. dei Lincei XI. fasc. 5, mars 1930).

8. *Sopra gli integrali della* $\Delta u = c(M)u(M)$ $(c > 0)$ *nelle vicinanze di un punto singolare* 0 *della* $c(M)$. (Rend. dei Lincei XI. fasc. 9, mai 1930).

9. *Sopra il problema di Dirichlet generalizzato relativo al dominio limitatopiu generale e all' equazione* $\Delta u = c(M)u + f(M)$ $(c > 0)$. (Rend. dei R. Ist Lombardo 63, fasc. XI-XV).

10. Sur un problème de Dirichlet généralisé. (C.R. t. 191 p. 697).

1931

11. *Sur l'équation* $\Delta u = c(x,y)u(x,y)$ $(c > 0)$ *quand* $c(x,y)$ *admet des points singuliers et une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier.* (Rend. del circ. mat. di Palermo p. 55).

https://spartacus-idh.com

12. *Sur le problème biologique héréditaire.* (Annali di Matematica IX. p. 57-74).

13. *Sur la structure des ensembles de capacité nulle.* (C.R. t. 192 p. 206).

14. *Étude de équation de la chaleur $\Delta u = c(M)u(M)$ où $c(M) > 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient.* (**Thèse** et Annales de l'E.N.S. t. 48, p. 153 ; 95 p.).

15. *Étude des intégrales bornées de équation $\Delta u = cu$ $(c>0)$ au voisinage de singularités de c formant un ensemble de capacité nulle.* (Bull. Sc. Math. 55, sept. 31 p. 281).

1932

16. *Quelques propriétés générales des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)u$, $c \geqslant 0$, sur un domaine borné ouvert où c est continu $\geqslant 0$.* (Bull. Sc. Math. 56, avril 32, p. 105).

17. *Étude à la frontière de la solution du problème de Dirichlet généralisé relatif à l'équation $\Delta u = cu + f$, $c(M) > 0$, et $f(M)$ borné.* (Rend. dei R. Istituto Lombardo 65, fasc. I-V).

18. *Sur l'allure à la frontière des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)u$, $(c \geqslant 0)$.* (Rend. dei R. Ist. Lombardo 65 fasc. VI-X).

19. *Uberblick über die biologisch — mathematischen Untersuchungen von Volterra.* (Jahresbericht der deut. mat Ver. 42, Heft 1/4).

20. *Einige neuere Untersuchungen über das Dirichletsche Problem.* (Jahresb. der. deut. mat. Ver. 42, Heft 5/8).

21. *Sur les singularités ponctuelles des fonctions sous-harmoniques.* (C.R. t. 195, p. 693, oct. 32).

22. *Sur l'allure des singularités ponctuelles des fonctions sous-harmoniques.* (C.R. t. 195, p. 852, nov. 32).

23. *Sur l'allure des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier ou non.* (C.R. t. 195, p. 932, nov. 32).

24. *Sur un théorème de non-existence relatif à l'équation $\Delta u = c(M)u(M)$ $(c > 0)$.* (Bull. Soc. Math. t. 56 déc. 32, p. 389).

25. *Uber die singularitaten der Potentialfunktionen und der Integrale der differentialgleichungen vom elliptischer typus.* (Sitzungsber der Berl. Math. Gesell t. 31).

1933

26. *Sur le problème de Dirichlet.* (C.R. t. 196, p. 737).

27. *Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne.* (Mathematica VII p. 147-166).

1934

28. *Étude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point.* (Actualités scientifiques et ind. n° 134) 55 p.

29. *Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.* (Soc. fr. de Physique, Section d'Alger 9 mai 35).

30. *Sur l'intégration de $\Delta u = \phi$.* (C.R. t. 201, p. 1316, déc. 1935).

31. *Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique et biométrie.* (Bull. de la Station d'Aquiculture de Castiglione. 1er sem. 35, paru en 36).

32. *Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique et biométrie.* (Bull. de la Station d'Aquiculture de Castiglione 2e sem. 35 paru en 36).

© Spartacus-Idh 2019

1936

33. *Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.* (J. de Math. t. 15, p. 113).

34. Sur l'allure des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)u$, $c(M) \geqslant 0$ au voisinage d'un point singulier de $c(M)$. (Bull. Sc. Math. t. 60, avril 36, p. 112).

35. *Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.* (C.R. du Congrès d'Oslo 1936).

36. *Quelques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs*. (Bull. Soc. fr. de Physique, déc. 36).

1937

37. *Quelques propriétés des fonctions de Gilbert et de la spirale de Cornu.* (Bull. Sc. Math. t. 61, mai 37, p. 133-160).

38. *Sur la meilleure majorante harmonique.* (C.R. t. 205, p. 12).

39. *Sur les meilleures et plus petites majorantes harmoniques.* (C.R. t. 206, p. 456).

40. *Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique (suite)* (J. de Math. t. 16, p. 285).

41. *Quelques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs.* (Mathematica XIII, p. 243-257).

1938

42. *Quelques propriétés des fonctions sous-harmoniques et du balayage.* (C.R. t. 206, p. 142).

43. *Sur des extensions du balayage*. (C.R. t. 206, p. 636).

44. *Sur le problème de Dirichlet et les fonctions sous-harmoniques*. (C.R. t. 206, p. 1161).

45. *Fonctions sous-harmoniques et balayage (en 2 parties).* (Bull. Ac. Royale de Belgique, t. 24, p. 301-312 et 421-436, n° mai-juin 38).

46. *Sur le potentiel et les suites de fonctions sous-harmoniques.* (C.R. t. 207, p. 836).

47. *Sur un balayage d'ensembles fermés*. (C.R. t. 207 p. 1157).

1939

48. *Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques.* (Bull. Sc. Math. t. 63, mars-avril 39, p. 79-96 et 115-128).

49. *Critères de régularité et de stabilité.* (Bull. Ac. Royale des Sc. de Belgique t. 25, p. 125-137).

50. *Familles de Perron et problème de Dirichlet.* (C.R. t. 208, p. 1623) (Développé dans **53**).

51. *Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de Dirichlet.* (Bull. Soc. Royale de Liège n° 6-7, 1939, p. 385-391).

52. *Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques, sous-harmoniques ou holomorphes*. (Bull. Soc. royale des Sc. de Liège n° 8-9-10, 1939, p. 468-477).

53. *Familles de Perron et problème de Dirichlet.* (Acta de Szeged IX, p. 133-153).

54. *Sur la théorie moderne du potentiel.* (C.R. t. 209, p. 828).

1940

55. *Quelques propriétés locales à la frontière des fonctions harmoniques ou sous-harmoniques*. (Bull. Sc. Math. t. 64 juin-juillet 40, p. 153).

56. *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel.* (J. de Math. t. 19, p. 319-331).

1941

57. *Sur la théorie autonome des fonctions sous-harmoniques.* (Bull. Sc. Math. t. 65 mars-avril 41, p. 72-98).

https://spartacus-idh.com

1943

58. *Sur les principes mathématiques de la mécanique classique.* (Ann. Univ. Grenoble t. 19, p. 43).

1944

59. *Sur les ensembles effilés*. (Bull. Sc. Math. t. 68 janvier-février 44, p. 12-36).

60. *Sur quelques points de mécanique rationnelle.* (Ann. Univ. Grenoble, t. 20 p. 1).

61. *Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques.* (Annales E.N.S. t. 61, p. 301-332).

1945

62. *Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités.* (J. de Math. t. 24 p. 1-32).

63. *Sur l'allure des fonctions harmoniques à la frontière.* (C.R. t. 220, p. 676).

64. *Les principes mathématiques de la mécanique classique.* (Arthaud, Grenoble et Paris 1945, 62 p.).

65. *Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes.* (Bull. Soc. Math. de France, t. 73, p. 55).

66. *Sur la mesure harmonique et le problème de Dirichlet.* (Bull. Sc. Math. t. 69 sept-oct. 45, p. 153).

67. *Sur le problème de Dirichlet*. (C.R. t. 221, p. 654).

68. *Les fonctions sous-harmoniques, presque sous-harmoniques ou sous-médianes.* (Annales Univ. Grenoble t. 21, p. 75).

69. *Sur la formule de Taylor*. (Ann. Univ. Grenoble, t. 21, p. 91).

70. *Sur le problème de Dirichlet ramifié et la représentation conforme.* (C.R. t. 222, p. 851).

71. *Le problème de Dirichlet ramifié.* (Ann. Univ. Grenoble t. 22, p. 167-200).

72. *Étude générale des fonctions harmoniques ou sous-harmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier.* (Ann. Univ. Grenoble t. 22, p. 205-219).

1948

73. *Quelques applications de la topologie de R.S. Martin dans la théorie des fonctions harmoniques.* (C.R. t. 226, p. 49).

74. *Sur le principe des singularités positives et la topologie de R.S. Martin.* (Ann. Univ. Grenoble, t. 23, p. 113-138).

75. *Deux théorèmes généraux sur le potentiel et quelques applications.* (C.R. t. 226, p. 1499).

76. *Quelques propriétés et applications du balayage.* (C.R. t. 221, p. 19).

77. *Sur le principe des singularités positives et la notion de source pour l'équation* $\Delta u = c(M)u(M)$ $(c \geqslant 0)$. (Ann. Univ. Lyon section A, XI, p. 9).

1949

78. *Lignes de Green et mesure harmonique.* (**En collaboration avec G. Choquet**). (C.R. t. 228, p. 15-56).

79. *Le problème de Dirichlet géodésique.* (C.R. t. 228, p. 1790).

80. *Étude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier.* (Annales Institut Fourier, t. 1, p. 121-156).

81. *Compléments à la théorie de J. Deny.* (Annales Institut Fourier t. 1, p. 113).

© Spartacus-Idh 2019

1950

82. *Remarque sur le prolongement fonctionnel linéaire et le problème de Dirichlet.* (Acta de Szeged t. XII, p. 150).

83. *Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière.* (Math. Nachrichten t. 4, p. 298).

84. *Remarques sur la variation des fonctions sous-harmoniques et les masses associées. Applications*. (Ann. Inst. F. t. 2, p. 101).

85. *Sur l'évolution du problème de Dirichlet.* (Proc. of the Int. Congress of Math. 1950).

1951

⋆⋆ **86.** *Espaces de lignes de Green* (**en coll. avec Choquet**). (Annales I. F. 3, 199-263).

87. *Fonctions sous-harmoniques associées à une mesure.* (Ac. roumaine, section de Jasi, Vol. 3-4 Année II, 1951)

1952

88. *Les fonctions holomorphes sur les surfaces de Riemann.* (C.R. du Congrès des Soc. savantes 1952).

89. *Principe et problème de Dirichlet dans les espaces de Green.* (C.R. 235, p. 598).

90. *Lignes de Green et problème de Dirichlet.* (C.R. 235, p. 1595).

91. *La théorie moderne du potentiel.* (Annales I. F. 4, 1952, p. 113-140).

1954

92. *Majorantes harmoniques et principe du maximum*. (Archiv. der Math. V, 1954, fasc. 4-6, p. 429).

⋆⋆ **93.** *Étude et extension du principe de Dirichlet.* (Annales I. F. 5, 1953-54, p. 371-419 paru en 1955).

94. *Existence theorem for capacities.* (Annales I. F. 5, 1953-54 p. 297-304 paru en 55).

⋆ **95.** *Polynômes harmoniques et polyharmoniques* (**en coll. avec G. Choquet**). Second Colloque sur les équations aux dérivées partielles. (Bruxelles 24-26 mai 1954, p. 45-66).

1955

96. *Le problème de Dirichlet avec la frontière de Martin.* (C.R. 240, p. 142) .

97. *Contributions to potential theory.* (Report-Univ. of Kansas 1955 (travaux faits en 1954)).

98. *Topologies on the boundaries and harmonie measure.* (Colloq. 1953, Un. of Michigan, p. 85-103).

99. *Topology of R.S. Martin and Green lines*. (Coll. 1953, Un. of Michigan, p. 105-121).

100. *A new proof of the fundamental theorem of Kellogg-Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem.* (Rend. de Palermo IV, 1955, p. 112-122).

1956

101. *Étude axiomatique du problème de Dirichlet* (C.R. Ac. Sc. 242, p. 327).

102. *Comm. Congrès intern. Amsterdam 1950.*

103. *On the behaviour of harmonie functions in the neigborhood of an irregular boundary point.* (J. d'Analyse math. 4, 1954-56, p. 209-221).

https://spartacus-idh.com

⋆⋆ **104.** *Le problème de Dirichlet. Axiomatique et la frontière de Martin.* (J. de Math. 35, fasc. 4, p. 297-335).

105. *Nouvelle démonstration du théorème fondamental sur la convergence des potentiels.* (Ann. I. F. 6, 1955-56, p. 361-368).

106. *Fonction potentielle, potentiel newtonien. Avec la coll. de R. Duchon.* (Formulaire de Math. à l'usage des physiciens et ingénieurs, fasc. VII). (Eq. aux dérivées partielles C.N.R.S. 1956).

⋆ **107.** *Le théorème de convergence en théorie du potentiel.* **Avec la coll. de G. Choquet.** (J. de Madras University).

1957

108. *Extension axiomatique des fonctions sous-harmoniques.* (C.R. 245, p. 1688, 1957).

1958

109. *Extension axiomatique des fonctions sous-harmoniques.* (C.R. 246, p. 2334, avril 1958).

110. *La convergence des fonctions surharmoniques et des potentiels généralisés.*

111. *Sur l'allure à la frontière des fonctions sous-harmoniques ou holomorphes.* (Annales Ac. Sc. Fenn. A. Math. 250/4 (présentée en Oct. 57)).

⋆⋆ **112.** *Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts.* (Sem. th. potentiel 1, 1957, p. 6-01, 6-16).

113. *Introduction de l'effilement dans une théorie axiomatique du potentiel.* (*En coll. avec M^me Hervé*). (C.R. t. 247, déc. 58).

1959

114. *Quelques développements récents sur le problème de Dirichlet.* (Abhandl. math. Sem. Hamburg 23, 1959).

⋆⋆ **115.** *Éléments de la théorie classique du potentiel.* (C.D.U. Paris 1959).

116. *Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact.* (Sem. du pot. 2, 1958).

1960

⋆⋆ **117.** *Lectures on potential theory.* (Tata Institute, n° 19, 1960).

1961

118. *Remarques sur le balayage.* (Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège 30^e année fasc. 45-6, p. 210).

119. *Sur un problème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet.* (J. d'An. Math. 8, p. 273-288, 1960-61).

1962

⋆ **120.** *Introduction axiomatique de l'effilement.* (Annali di Mat. 1962).

121. *Intégrabilité uniforme. Quelques applications à la théorie du potentiel.* (Sém. th. du potentiel 6, 1961-62).

⋆ **122.** *Étude comparée de quelques axiomatiques des fonctions harmoniques et surharmoniques.* (Sém. pot. 6, 1961-62).

123. *Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement.* (Sém. pot. 6, 1961-62).

1963

⋆ **124.** *Uber einige Begriffe der modernen axiomatischen Potential-theorie.* (Dirichlet Tagung Berlin juin 1959, paru en 1963).

© Spartacus-Idh 2019

⋆ **125.** *Limites angulaires et limites fines* (**en collaboration avec Doob**). (Annales I. F. t 3, fasc. 2, 1963).

1964

126. *Comm. au congrès de Gênes (Octobre 1964).*

• **127.** *Traduction en russe des « Éléments . . . » C.D.U. [115]* mais 2e édition (Collection Mathematika 1964).

1965

⋆ **128.** *Étude comparée des deux types d'effilement*. (Colloque de th. du Potentiel, à Paris-Orsay, juin 1964, Annales I. F. 15, 1965).

129. *Aspect statistique et comparé des deux types d'effilement*. (AnaIs de l'Ac. du Brésil 1965).

130. *Sur la frontière de Martin*. (Traduction russe publiée dans Matematika d'un cours inédit donné à Hiroshima en 1962).

131. *Capacité et balayage pour ensembles décroissants*. (C.R. 260, p. 2683, mars 1965).

⋆ **132.** *Capacity and balayage for decreasing sets*. (5th Berkeley symposium on prob., paru en 1967).

1966

133. *Théorie du potentiel et fonctions analytiques.* (Conf. du Colloque d'Erivan 1965).

⋆⋆ **134.** *Axiomatique des fonctions harmoniques*. (Cours d'été 1965, Montréal, 2e édition presque identique en 1969).

135. *La topologie fine en théorie du potentiel*. (Conf. du Colloque de Loutraki, paru dans les Lecture Notes 31, 1967).

136. *Einige neue Fortschritte in der axomatischen Theorie der harmonischen Funktionen*. (Colloque de Karl Marx-Stadt 1966).

137. *Norbert Wiener and potential theory*. (Bull. Am. Math. Soc. 72, 1966, p. 39).

1967

138. *Recherches axiomatiques sur un théorème de Choquet concernant l'effilement*. (Nagoya Math. Journal 30).

⋆ **139.** *Recherches sur la topologie fine et ses applications*. (Ann. I. F. 17/2).

1969

• **140.** *Éléments de la théorie classique du potentiel*. (4e édition très améliorée, CDU, Paris).

141. *Historical introduction*. (Cours CIME, Stresa, Juillet 1969).

1970

142. *Quelques recherches sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques*. (Colloque on Math. Analysis, Jyvaskyla, à paraître dans les Lecture Notes en 1973).

1971

⋆⋆ **143.** *On topologies and boundaries in potential theory*. (Lecture Notes no 175).

144. *Allure des potentiels à la frontière et fonctions fortement sous-harmoniques*. (Sém. Pot. ; Conf. en juin 71, à paraître en 1973).

1972

⋆ **145.** *Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel*. (Enseignement math. 18/1, 1972) .

https://spartacus-idh.com

146. *Représentation intégrale des solutions* > 0 *de l'équation*

$$\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{k}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

(k constante réelle) dans le demi-espace $E(x_n > 0)$ *de* $\mathbb{R}^n$. (**En collaboration avec Bernadette Brelot-Collin**). (Bull. Ac. Sc. Bruxelles, t. 58, 1972, p. 317).

1973

⋆ **147.** *Allure à la frontière des solutions positives de l'équation de Weinstein*

$$L_k(u) = \Delta u + \frac{k}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

dans le demi-espace $E(x_n > 0)$ *de* $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ (**en collaboration avec Bernadette Brelot-Collin**). (Bulletin Acad. Sc. Bruxelles t. 59, 1973, p. 1100).

1974

148. *Édition russe revue, corrigée et augmentée de l'ouvrage (Réf. 143) « On topologies and boundaries in potential theory »*. (Lecture Notes 175) (Traduit par Landkoff). Éditions Mir. Collection Matematika.

1975

149. *Sur l'allure à la frontière des familles de fonctions harmoniques ou surharmoniques*. (Rendiconti di Matematica, Roma 1975, vol. 8 dédié au Prof. M. Picone pour son 90e anniversaire).

150. *Remarque sur les zéros à la frontière des fonctions harmoniques positives*. (Bollettino dell' Unione matematica italiana, 1975, fasc. 4 dédié au Prof. Bompiani pour son 85e anniversaire).

151. *Axiomatische Theorie der harmonischen Funktionen und der Potentiale ; Anwendungen dieser Theorie*. (Mitteilungen der Math. Case II der deutschen demokratischen Republik, intern, Kongress Halle, 19 veröff 1975, Heft 3/4).

1976

152. *Étude à la frontière des solutions locales positives de l'équation*

$$L_k(u) = \Delta u + \frac{k}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

dans le demi-espace $E(x_n > 0)$ *de* $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ (**en collaboration avec Bernadette Brelot-Collin**). (Bulletin Acad. Sc. Bruxelles t. 62, 1976, 5-6).

1977

153. *Équation de Weinstein et potentiels de Marcel Riesz*. (Séminaire de théorie du potentiel, Paris, année 76-77) — Nouvelle série no 3, Lecture Notes no 681, 1978).

1978

154. *Sur le théorème de partition de Mme R.M Hervé.* (Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 10, no 1, 1980). (Volume dédié à Aronszain).

1979

155. *Uber die Beitrage Christoffels zur Potentialtheorie* (International Christoffel Symposium, Aachen Nov. 1979, Birkhauser Verlag, 1981).

1980

156. *On a generalized logarithmic kernel and its potentials* **en collaboration avec V. Anandam (Madras)**. (Annales Polonici Mathematici, Krakow, t. 31, 1982, volume dédié à la mémoire de S. Bergman).

© Spartacus-Idh 2019

157. *Refinements on the superharmonic continuation*. (Dédié au Prof. Kuramochi pour son 60e anniversaire, Hokkaido mathematical Journal, 1982).

1981

158. *Exemples de renouvellement par la topologie, de quelques questions d'Analyse*. (106e Congrès national des Sociétés Savantes, Perpignan 1981, Sciences fasc. V, p. 9623).

1983

159. *La fonction de Green*. (108e Congrès des Sociétés Savantes, Grenoble, Sciences fasc. III).

1985

160. *Le balayage de Poincaré et l'épine de Lebesgue*. (110e Congrès des Sociétés Savantes (Montpellier)).

1987

161. *Quelques aspects mathématiques de la lutte pour la vie*. (112e Congrès national des Sociétés Savantes, Lyon 1987, Sciences, fasc. IV, p. 103-108).
Cette dernière conférence n'a pas été prononcée.

https://spartacus-idh.com

Deuxième partie

Éléments de la théorie classique du potentiel

© Spartacus-Idh 2019

⁂

Introduction

Depuis l'ouvrage de Kellogg (Foundations of potential theory 1929) il n'est paru qu'un ouvrage étendu sur la théorie du potentiel (le potentiel logarithmique) par De La Vallée Poussin (1949), mais de publication très retardée et portant surtout sur les recherches personnelles de l'auteur. De sorte qu'il n'y a pas d'exposé d'ensemble des travaux considérables c'est-à-dire nombreux, variés, très importants, depuis vingt ou trente ans sur la théorie du potentiel.

Les recherches actuelles, de plus en plus actives, puisent leur richesse surtout dans les multiples points de vue et méthodes de la théorie classique, qu'il paraît donc encore nécessaire de connaître en gros avant d'aborder toutes les axiomatiques modernes. Cela m'a incité à publier d'abord un cours récent (de 3e cycle) rassemblant les bases de la théorie classique (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^n$ avec noyau newtonien ou logarithmique) à partir de notes recueillies soigneusement par un auditeur, M. Houzel. J'ai même cru bon, vu l'absence d'ouvrages, d'y ajouter, en appendice pouvant servir d'introduction, le texte d'un cours récent de licence sur les premières notions concernant les fonctions harmoniques (en y laissant d'ailleurs des notations un peu différentes qu'on ne suit plus guère).

Les idées traitées sont celles d'une théorie très riche en structures ; citons : les fonctions surharmoniques (actuellement axiomatisées), la capacité (qui a conduit aux capacités générales de Choquet) le problème de Dirichlet (qui sait s'adapter à tant d'opérateurs et de conditions-frontière), le principe de Dirichlet (dont la norme a conduit aux espaces de Dirichlet de Beurling-Deny), l'énergie (renouvelée par Cartan qui a introduit diverses topologies sur les mesures et dont la théorie a été beaucoup étendue par Deny grâce aux distributions), le balayage aux aspects divers (et qui par exemple a conduit à des problèmes de convolution de mesures sur un groupe topologique), le rôle des éléments extrémaux etc. etc. Quant aux idées modernes essentielles qui n'apparaissent pas dans les parties classiques ici traitées, comme les relations avec le calcul des probabilités (Doob, Hunt), je les mentionne dans une page bibliographique finale, sur les développements actuels de la théorie.

Je me suis efforcé de donner le plus souvent une forme qui se prêtera aux extensions ultérieures et est d'ailleurs parfois inspirée de travaux récents plus généraux. Afin de ne pas séparer $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ ($n > 2$) et de ne pas alourdir l'exposé, je me suis souvent, quand il s'agit de domaines quelconques, limité à des domaines bornés ou même à des boules. L'ordre général demandait un choix difficile : j'ai établi le plus tôt possible pour m'en servir, le théorème de convergence le plus puissant. Je n'ai donné ici aucune introduction historique, renvoyant avant tout à un aperçu détaillé que j'ai publié sur le sujet dans

© Spartacus-Idh 2019

les *Annales de l'Institut Fourier* t. IV (1952-54). Chaque chapitre est ici pourvu d'une bibliographie sommaire correspondante indiquant les sources les plus utiles et les développements ultérieurs les plus importants ; une bibliographie additionnelle complète à la fin l'article ci-dessus déjà bien vieilli.

M. Brelot Avril 1959.

Préface de la deuxième édition

À défaut d'une refonte de l'ouvrage maintenant épuisé, il m'a semblé utile, vu les demandes et l'absence de livres analogues, d'en prolonger la diffusion sans grand délai, en profitant toutefois de l'occasion pour faire des corrections nécessaires et quelques améliorations locales ou légères additions.

Octobre 1961.

Cette édition a été traduite en russe par Solomentsev (édition Univers, Moscou, 1964).

Préface de la troisième édition

Cette édition comporte divers compléments et améliorations notables dont une rédaction nouvelle plus détaillée du chapitre XII sur la frontière de Martin, et naturellement une mise à jour de la bibliographie la plus importante.

Février 1965.

Préface de la quatrième édition

Encore des améliorations, compléments, mises à jour. Quelques changements ont pour but de mieux préparer le lecteur aux théories axiomatiques récentes. On trouvera des compléments classiques dans un plus gros ouvrage similaire récent de Landkoff en russe. (Pour le titre et l'orientation voir l'appendice et chap. IV).

Mars 1969.

https://spartacus-idh.com

COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS HARMONIQUES RÉELLES

§ 1. — Un principe de minimum (ou maximum).

Soit u une fonction harmonique dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ (compactifié selon $\overline{\mathbb{R}}^n$ par le point d'Alexandroff). On a

$$\inf_{x\in\omega} u(x) \geqslant \inf_{x_0\in\omega^*} \left(\liminf_{x\to x_0} u(x) \right)$$

ω^* désignant la frontière de ω dans $\overline{\mathbb{R}}^n$. Principe analogue (de maximum) avec sup et lim sup.

Cela résulte aussitôt du lemme général suivant (2)

Lemme. *Soit u une fonction numérique semi-continue inférieurement définie dans un ouvert $\omega \neq \Omega$ d'un espace compact connexe Ω, et telle que « u admet un minimum < 0 au point x » entraîne « u est constante au voisinage de x » quel que soit $x \in \omega$. Si $\liminf_{x\to x_0} u(x) \geqslant 0$ pour tout point x_0 de la frontière ω^*, on a $u \geqslant 0$ dans ω.*

Il suffit de prolonger u par 0 à l'espace Ω : ce prolongement $\overline{u}$ est semi-continu inférieurement dans Ω et y atteint sa borne inférieure k. Si $k < 0$ l'ensemble A (resp. B) des points x de Ω où $u(x) > k$ (resp. $u(x) = k$) est non vide ouvert ; comme Ω est connexe et égal à $A \cup B$, ceci est absurde. Donc $k \geqslant 0$.

À rapprocher de la « forme abstraite » du principe du maximum (appendice I. § 3).

§ 2. — Lemme de topologie (Choquet).

Lemme. *Soient Ω un espace topologique à base dénombrable, et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions numériques définies dans Ω. Il existe une partie dénombrable I_0 de l'ensemble d'indices I telle que la relation « g est une fonction semi-continue inférieurement et $g \leqslant \inf_{i\in I_0} f_i$ » entraîne « $g \leqslant \inf_{i\in I} f_i$ ».*

Pour toute partie J de I, nous poserons $f_J = \inf_{i\in J} f_i$. On peut se ramener au cas où toutes les fonctions envisagées prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[-1, +1]$, en utilisant l'homéomorphisme croissant $x \to x/(1 + |x|)$ de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-1, +1]$.

(2) Voir une autre démonstration dans l'appendice.

© Spartacus-Idh 2019

Il existe une suite (ω_n) d'ouverts de Ω formant une base de la topologie et telle que pour tout n il y ait une infinité d'indices m pour lesquels $\omega_m = \omega_n$; par exemple on part d'une base dénombrable rangée en une suite (δ_n) et on forme la suite $(\delta_1, \delta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots)$.

Pour chaque entier n il existe un indice i_n tel que

$$\inf_{x\in\omega_n} f_{i_n}(x) - \inf_{x\in\omega_n} f_I(x) \leqslant \frac{1}{n}. \tag{I.1}$$

En effet, il existe un point x_0 de ω_n tel que

$$f_I(x_0) - \inf_{x\in\omega_n} f_I(x) \leqslant \frac{1}{2n}$$

et un indice i_n tel que $f_{i_n}(x_0) - f_I(x_0) \leqslant \frac{1}{2n}$.

Soit $I_0 = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\}$ l'ensemble de ces indices. Considérons une fonction numérique g semi-continue inférieurement vérifiant

$$g \leqslant f_{I_0}. \tag{I.2}$$

Soit $\varepsilon > 0$; pour tout point x il existe un voisinage V_x de x tel que $y \in V_x$ entraîne $g(x) < g(y) + \varepsilon/2$; il existe alors un ouvert ω_p de la base, d'indice p arbitrairement grand (d'après la condition imposée à la suite ω_n), tel que $x \in \omega_p$ et $g(x) \leqslant \inf_{y\in\omega_p} g(y) + \varepsilon/2$. Or $g(x) \leqslant f_{i_p}$ (d'après (I.2)), donc $\inf_{y\in\omega_p} g(y) \leqslant \inf_{y\in\omega_p} f_{i_p}(y) \leqslant \inf_{y\in\omega_p} f_I(y) + 1/p$ (à cause de (I.1)).

Ainsi $g(x) \leqslant \inf_{y\in\omega_p} f_I(y) + \varepsilon/2 + 1/p$; p pouvant être choisi arbitrairement grand, on peut faire en sorte que $1/p < \varepsilon/2$. Il existe donc un entier p tel que

$$g(x) \leqslant \inf_{y\in\omega_p} f_I(y) + \varepsilon.$$

Le lemme est établi, puisque ε est arbitraire.

Appelons régularisée inférieure $\hat{f}$ d'une fonction quelconque f la fonction

$$\hat{f}(x) = \liminf_{y\to x} f(y).$$

Le lemme se traduit par $\hat{f}_I = \hat{f}_{I_0}$.

Application. Le lemme permet, dans un espace à base dénombrable, de ramener des familles de fonctions à des suites.

En particulier si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante à gauche (dite aussi décroissante) de fonctions harmoniques dans un domaine de $\mathbb{R}^n$, il existe une sous-suite décroissante de $(f_i)_{i\in I_0}$ dont la limite est $g = f_{I_0}$; on voit en n'utilisant que la convergence de suites que g est harmonique ou $-\infty$ (*cf.* l'appendice).

On a $f_I \leqslant g$ et d'après le lemme $g \leqslant f_I$ d'où $f_I = g$. L'enveloppe inférieure f_I de la famille est donc harmonique ou égale à $-\infty$.

https://spartacus-idh.com

§ 3. — Lemme classique de Dini-Cartan.

Lemme. *Soit (f_i) une famille filtrante à gauche de fonctions $\geqslant 0$ et $< +\infty$, semi-continues supérieurement, définies dans un espace compact. Si* $\inf_i f_i = 0$, *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un indice i_0 tel que $f_{i_0} \leqslant \varepsilon$.*

En effet, pour chaque point x il existe un indice i_x tel que $f_{i_x}(x) < \varepsilon$; comme f_{i_x} est semi-continue supérieurement, il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $y \in V_x$ entraîne $f_{i_x}(y) \leqslant \varepsilon$. $(V_x)_{x\in\Omega}$ est un recouvrement ouvert de Ω, dont on peut extraire un recouvrement fini (V_{x_p}) $(p = 1, \ldots, n)$. La famille (f_i) étant filtrante à gauche, il existe une fonction f_{i_0} de la famille minorant $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}$; pour cette fonction f_{i_0} on a $f_{i_0}(y) \leqslant \varepsilon$ en tout point y.

Application à un théorème de passage à la limite sous le signe somme. Soient μ une mesure positive [3] sur l'espace compact Ω et (f_i) une famille filtrante à gauche de fonctions semi-continues supérieurement $< +\infty$ dans Ω. On a

$$\inf_i \int f_i \, \mathrm{d}\mu = \int \inf_i f_i \, \mathrm{d}\mu.$$

C'est évident si $\inf_i f_i = 0$ car d'après le lemme il existe alors une fonction $f_{i_0} \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ donné arbitrairement) ; on a $\int f_{i_0} \, \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon\mu(\Omega)$ donc $\inf_i \int f_i \, \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon\mu(\Omega)$ et par suite $\inf_i \int f_i \, \mathrm{d}\mu = 0$, ε étant arbitraire.

Dans le cas général, posons $F = \inf_i f_i$. On a évidemment $\int F \, \mathrm{d}\mu \leqslant \inf_i \int f_i \, \mathrm{d}\mu$. Soit $\lambda > \int F \, \mathrm{d}\mu$; il existe une fonction finie continue φ majorant F et telle que $\int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leqslant \lambda$. La famille $((f_i - \varphi)^+)$ de fonctions semi-continues supérieurement $\geqslant 0$ est filtrante à gauche et son enveloppe inférieure est nulle, donc $\inf_i \int (f_i - \varphi)^+ \, \mathrm{d}\mu = 0$ et par suite

$$\inf_i \int (f_i - \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \inf_i \int f_i - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\inf_i \int f_i \, \mathrm{d}\mu < \int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leqslant \lambda.$$

Il en résulte que

$$\inf_i \int f_i \, \mathrm{d}\mu = \int F \, \mathrm{d}\mu = \int \inf_i f_i \, \mathrm{d}\mu.$$

On démontre de même que si (g_i) est une famille filtrante à droite de fonctions semi-continues inférieurement $> -\infty$ dans Ω, on a

$$\sup_i \int g_i \, \mathrm{d}\mu = \int \sup_i g_i \, \mathrm{d}\mu.$$

Application aux fonctions harmoniques. Soit (f_i) une famille filtrante à droite de fonctions harmoniques dans un domaine de $\mathbb{R}^n$. Son enveloppe supérieure est $+\infty$ ou bien est localement bornée et même continue (voir Appendice). Dans ce dernier cas, l'enveloppe supérieure est harmonique ; en effet, la propriété de moyenne périphérique (ou spatiale) est vraie pour chaque f_i et

(3) Positif signifiera $\geqslant 0$, et croissant ou décroissant seront toujours pris au sens large.

© Spartacus-Idh 2019

d'après le résultat précédent on peut passer à la limite dans l'intégrale, donc la propriété de moyenne subsiste pour l'enveloppe (et, pour la moyenne spatiale, entraîne même la continuité) d'où l'harmonicité.

On retrouve ainsi le résultat obtenu en se ramenant à une suite (§ 2).

§ 4. — Rappel de propriétés de convergence et de compacité pour les fonctions harmoniques.

On peut, pour les fonctions harmoniques réelles n'utiliser dans les questions de convergence que la convergence uniforme, grâce aux propriétés d'égale continuité (dérivant des inégalités de Harnack).

Renvoyant à l'appendice, soulignons les propriétés suivantes applicables à des fonctions harmoniques définies dans un domaine ω de $\mathbb{R}^n$.

1. *Une famille localement bornée de fonctions harmoniques est équicontinue en tout point de ω.*
2. *La propriété 1. est encore vraie au sens de la structure uniforme de la droite numérique achevée (pour l'ensemble des valeurs), pour une famille localement minorée.*

   En conséquence (et plus simplement que plus haut grâce à la convergence uniforme), une famille filtrante à droite de fonctions harmoniques converge vers une fonction harmonique ou vers $+\infty$.
3. Munissons l'espace des fonctions numériques (finies ou non) dans ω de la structure uniforme de la convergence compacte ($\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la structure uniforme de la droite numérique achevée). *Dans cet espace tout ensemble localement minoré de fonctions harmoniques est relativement compact. L'ensemble formé des fonctions harmoniques majorant une fonction donnée finie et continue et de la constante $+\infty$ est compact (et d'ailleurs métrisable). L'ensemble des fonctions harmoniques > 0 égales à 1 en un point est compact et métrisable.*

§ 5. — Norme de Dirichlet et théorème de complétion.

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ des fonctions numériques finies et continues dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), qui possèdent un gradient fini et continu de carré sommable dans Ω. Pour toute fonction u de $\mathcal{P}_0$, posons

$$\|u\| = \left(\int \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(mesure de Lebesgue } \mathrm{d}x\text{)}$$

On vérifie aisément que $u \to \|u\|$ est une semi-norme dans $\mathcal{P}_0$, associée au semi-produit scalaire $(u_1, u_2) = \int (\operatorname{grad} u_1, \operatorname{grad} u_2)\, \mathrm{d}x$; $\|u\| = 0$ équivaut à « u est constante dans chaque composante connexe de Ω ». Nous considérerons aussi l'espace séparé $\mathcal{P}$ associé à $\mathcal{P}_0$, des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{P}_0$ égales à une constante près dans chaque composante connexe de Ω

https://spartacus-idh.com

avec le produit scalaire correspondant ; $\mathcal{P}$ est un espace préhilbertien réel, dont la norme s'appelle norme de Dirichlet. On pourra, par abus de langage commode, confondre une fonction de $\mathcal{P}_0$ et sa classe d'équivalence dans $\mathcal{P}$.

Pour toute partie mesurable α de Ω on définit de même

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_\alpha \operatorname{grad}^2 f \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (f \in \mathcal{P}_0)$$

Théorème. *Ω étant un domaine de $\mathbb{R}^n$, soit (u_n) une suite de fonctions harmoniques de normes de Dirichlet finies dans Ω. Si (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{P}_0$ (c'est-à-dire si l'on a ($\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_{n+p}\| = 0$, uniformément en p), et s'il existe un point x_0 de Ω tel que $(u_n(x_0))$ converge, la suite (u_n) converge dans l'espace $\mathcal{P}_0$ et au sens de la convergence compacte dans Ω.*

En effet, soit α un compact de Ω, on a

$$\left|\int_\alpha \left(\frac{\partial u_{n+p}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \int_\alpha \left(\frac{\partial u_{n+p}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x$$
$$\operatorname{mes} \alpha \leqslant \operatorname{mes} \alpha \|u_{n+p} - u_n\|^2.$$

Comme $\frac{\partial u_{n+p}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ est harmonique, on voit en prenant pour α une boule variable à rayon constant, que $\frac{\partial u_{n+p}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ tend vers 0 uniformément localement, quand $n \to +\infty$ (indépendamment de p). Il y a donc convergence uniforme locale des dérivées $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$, d'où leur majoration locale et l'égale continuité locale des u_n. Puis grâce à une intégrale curviligne exprimant $u_n(x) - u_n(x_0)$, il y a convergence de $u_n(x)$ alors uniforme localement, vers une fonction harmonique u.

Montrons enfin que u_n converge vers u dans l'espace $\mathcal{P}_0$, c'est-à-dire que $u \in \mathcal{P}_0$ et que $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$. La fonction u est harmonique et

$$\int \operatorname{grad}^2 u \, \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int \operatorname{grad}^2 u_n \, \mathrm{d}x$$

est fini (la suite $\|u_n\|$ est bornée). Donc $u \in \mathcal{P}_0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n' tel que $\|u_n - u_{n'}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n \geqslant n'$.

Il existe aussi un compact K contenu dans Ω tel que $\|u\|_{\Omega-K} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $\|u_{n'}\|_{\Omega-K} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Donc

$$\|u - u_n\|_{\Omega-K} \leqslant \|u\|_{\Omega-K} + \|u_n\|_{\Omega-K} \leqslant \|u\|_{\Omega-K} + \|u_{n'}\|_{\Omega-K} + \|u - u_{n'}\| \leqslant \varepsilon$$

pour $n \geqslant n'$. Comme on a

$$\|u - u_n\|^2 = \|u - u_n\|^2_{\Omega-K} + \|u - u_n\|^2_K \leqslant \|u - u_n\|^2_K + \varepsilon^2$$

pour $n' \leqslant n$, et comme $\operatorname{grad}(u - u_n)$ tend vers 0 uniformément sur le compact K, on peut écrire

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u - u_n\|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

La propriété en résulte.

© Spartacus-Idh 2019

Ainsi le sous-espace de $\mathcal{P}$ constitué par les classes d'équivalence des fonctions harmoniques à norme de Dirichlet finie est **complet**. C'est un espace de Hilbert.

§ 6. — L'équation $\Delta T = 0$ au sens des distributions.

Soit T une distribution sur un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$. La condition $\Delta T = 0$ signifie que T est une fonction égale (presque partout) à une fonction harmonique.

En effet, supposons d'abord T définie dans $\mathbb{R}^n$. En régularisant par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $\Delta(T * \varphi) = \Delta T * \varphi = 0$, donc la fonction $T * \varphi$ de $\mathcal{E}$ est harmonique. Utilisons une fonction $\varphi_2 : x \to \theta(\|x\|)$ de $\mathcal{D}$ et une fonction $\varphi_1 \in \mathcal{D}$ nulle pour $\|x\| \geqslant r_1$, toutes deux d'intégrale 1 dans tout l'espace. Comme $T * \varphi_1$ est harmonique on a $(T * \varphi_2) * \varphi_1 = (T * \varphi_1) * \varphi_2 = T * \varphi_1$; faisons varier φ_1 dans une suite telle que $r_1 \to 0$. Alors φ_1 converge vers la distribution de Dirac δ et il vient à la limite $T * \varphi_2 = T$ donc $T \in \mathcal{E}$; par suite T est une fonction harmonique.

Si maintenant T est définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$, on introduit une distribution T_1 dans $\mathbb{R}^n$ dont la restriction à un ouvert $\omega_0 \subset \overline{\omega_0} \subset \omega$ est égale à la restriction de T. Le raisonnement précédent prouve que T_1 coïncide avec une fonction harmonique dans un ouvert $\omega_1 \subset \overline{\omega_1} \subset \omega_0$. Ainsi T est égale à une fonction harmonique dans un ouvert $\omega_1 \subset \overline{\omega_1} \subset \omega$ que l'on peut choisir arbitrairement ; il en résulte que T est égale à une fonction harmonique dans ω.

§ 7. — Résolution du problème de Dirichlet dans une couronne.

Nous appelons couronne de rayons r et R dans l'espace $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^n$ tels que $r < \|x\| < R$.

Rappelons l'expression de l'intégrale de Poisson d'une fonction (définie et sommable sur la sphère notée $S(0,R)$ ou $B^*(0,R)$) dans la boule ouverte $B(0,R)$ (de centre 0 et de rayon R) :

$$I_f(x) = \frac{1}{\alpha_n R} \int \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|y - x\|^n} f(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \qquad (x \in B(0,R))$$

intégration par rapport à la mesure-aire sur $S(0,R)$; α_n masse totale de la mesure analogue sur la sphère unité ou « aire » de la sphère unité). De même pour l'extérieur $B'(0,R)$ de la boule on introduit :

$$I'_f(x) = \frac{1}{\alpha_n R} \int \frac{\|x\|^2 - R^2}{\|y - x\|^n} f(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \qquad (x \in B'(0,R))$$

Ces intégrales sont des fonctions harmoniques, majorées en valeur absolue par $\sup |f|$, et tendant vers $f(y)$ en tout point y de $S(0,R)$ où f est continue ; si la moyenne de f est nulle, celle de l'intégrale de Poisson sur une sphère de centre 0 est aussi nulle.

https://spartacus-idh.com

Pour tout nombre r, désignons par $\theta_R(r)$ la valeur au point $(r, 0, \ldots, 0)$ $(0 < r < R)$ de l'intégrale I_θ où θ vaut 1 sur la demi-sphère $x_1 > 0$ et -1 sur la demi-sphère $x_1 < 0$. On a

$$0 < \theta_R(r) < 1.$$

On peut montrer que quelle que soit la fonction numérique sommable f définie sur $S(0, R)$ et de moyenne nulle, on a

$$|I_f(x)| \leqslant \theta_R(\|x\|) \sup |f|$$

(on aurait d'ailleurs un résultat analogue pour I'_f).

Considérons une couronne de rayons r et R $(r < R)$. Soit F une fonction numérique finie continue définie sur $S(0, R)$ et de moyenne nulle. Nous allons résoudre le problème de Dirichlet dans la couronne pour les valeurs-frontière F sur $S(0, R)$ et 0 sur $S(0, r)$ par une méthode d'approximations successives.

L'intégrale de Poisson I_F est une fonction harmonique dont la limite sur $S(0, R)$ est F. Désignons par f_1 sa restriction à $S(0, r)$; la fonction $I_F - I'_{f_1}$ est harmonique et tend vers 0 sur $S(0, r)$. Désignons par F_1 la restriction de I'_{f_1} à $S(0, R)$; nous sommes amenés à considérer $I_F - I'_{f_1} + I_{F_1}$.

Supposons F_n définie ; f_{n+1} sera la restriction à $S(0, r)$ de I_{F_n} et F_{n+1} la restriction à $S(0, R)$ de $I'_{f_{n+1}}$. Les fonctions F_n et f_n sont de moyenne nulle sur les sphères respectives. On voit que dans la couronne $|I_{F_n}(x)| \leqslant \sup |F_n|$ et $|I'_{f_n}(x)| \leqslant \sup |f_n|$ et que $\sup |F_n| \leqslant \sup |f_n|$ et $\sup |f_{n+1}| \leqslant \theta_R(r) \sup |F_n|$; I_{F_n} et I'_{f_n} sont donc majorées en valeurs absolues par $\theta_R(r)^n \sup |F|$. Il en résulte que la série

$$I_F - I'_{f_1} + I_{F_1} - I'_{f_2} + \cdots - I'_{f_n} + I_{F_n} - \cdots$$

converge absolument et uniformément dans la couronne. La somme de cette série est une fonction harmonique dans la couronne qui fournit la solution du problème de Dirichlet [4]. De même pour une donnée 0 sur $S(0, R)$ et f sur $S(0, r)$ avec moyenne nulle.

À partir de ce résultat on peut construire la solution du problème de Dirichlet dans la couronne en prenant comme valeurs-frontière celles d'une fonction continue f sur $S(0, r)$ et d'une fonction continue F sur $S(0, R)$; on s'aide d'une fonction linéaire de $x \to h(\|x\|) = \|x\|^{2-n}$ $(n \geqslant 3)$ ou $= -\log \|x\|$ $(n = 2)$ de façon à se ramener au cas où f et F ont des moyennes nulles.

Enfin on pourrait étudier le problème pour des valeurs-frontières plus générales. Par exemple si φ est semi-continue inférieurement sur la frontière et bornée inférieurement, elle est limite de la famille filtrante à droite des fonctions finies continues $\varphi_i \leqslant \varphi$; la solution u_i pour valeurs-frontière φ_i est harmonique dans la couronne et la famille (u_i) est filtrante à droite, donc sa limite est harmonique ou égale à $+\infty$. On dit que cette limite u, si elle est finie, est la solution généralisée du problème de Dirichlet relatif à φ ; en tout point y de la frontière on a

$$\liminf_{x \to y} u(x) \geqslant \varphi(y).$$

(4) Cette méthode est un cas particulier du « procédé alterné » de Schwarz très utilisé autrefois. (V. les traités classiques et l'article de R. Nevanlinna, *Journal für die reine u. angewandte math.*, 180, 1938).

© Spartacus-Idh 2019

§ 8. — Continuité du gradient d'une fonction harmonique à la frontière.

Théorème. *Considérons dans l'espace $\mathbb{R}^n$ une hypersurface deux fois continûment différentiable Σ au voisinage d'un point x_0, et d'un côté de Σ au voisinage de x_0 (c'est-à-dire dans une composante ω de $B(x_0, r) \cap \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$), r assez petit) une fonction harmonique u admettant en chaque point y de $\Sigma \cap B(x_0, r)$ une limite $\lim_{x\to y} u(x) = U(y)$ telle que la fonction $y \to U(y)$ soit deux fois continûment différentiable sur Σ. Alors* grad u *admet une limite finie en tout point de $\Sigma \cap B(x_0, r)$ et se prolonge donc continûment sur $\Sigma \cap B(x_0, r)$* [5].

De plus si U est nulle, le prolongement de grad u *sur Σ est normal à Σ, et si $u > 0$ il est $\neq 0$ et dirigé du côté où u est définie (dérivée normale intérieure > 0).*

On s'appuiera essentiellement sur les lemmes suivants :

Lemme I.8.1. *Soit y un point de la sphère unité $S(0,1)$ et γ_y^d la calotte $S(0,1) \cap B(y,d)$ $(0 < d < 1)$. Considérons une fonction φ sommable sur $S(0,1)$ (pour la mesure-aire) telle que $\varphi(x) \leqslant \|x - y\|^2$ et la fonction φ_d égale à φ sur la calotte et nulle ailleurs.*

On a $\|$ grad $I_\varphi(ty)\| \leqslant \alpha(d)$ pour tous les nombres réels t tels que $1 - d < t < 1$, et une même fonction $\alpha(d)$ telle que $\lim_{d\to 0} \alpha(d) = 0$ (I_φ intégrale de Poisson).

Cela résulte de dérivations sous le signe somme et de majorations faciles.

Lemme I.8.2. *Considérons une suite (ψ_n) de fonctions sommables sur $S(0,1)$, par exemple bornées uniformément, et nulles sur γ_y^d ; supposons que ψ_n converge vers une fonction ψ. Les intégrales de Poisson I_{ψ_n} se prolongent harmoniquement à travers γ_y^d par des fonctions f_n et la suite* grad f_n *converge uniformément au voisinage de y vers* grad f *(f désignant le prolongement harmonique de I_ψ à travers γ_y^d).*

Cela résulte du prolongement harmonique, et des propriétés de convergence des fonctions harmoniques et de leurs dérivées.

Noter que les gradients sur la calotte sont normaux à la sphère.

Considérons alors le cas où la fonction U est nulle sur Σ. On remarque qu'au voisinage d'un point x_1 de Σ, $|u(x)| \leqslant k\|x - x_1\|^2$ où k peut être choisi indépendamment de x_1 assez voisin d'un point fixé de Σ. Il suffit pour le voir d'introduire une couronne convenable dont la petite sphère σ_1 dans $\complement\omega$ est tangente en x_1 à Σ ; alors si F est la solution du problème de Dirichlet dans la couronne avec les données 0 sur σ_1 et 1 sur l'autre sphère, on voit que $-\lambda F \leqslant u \leqslant \lambda F$ (λ constante majorant $|u|$). Il est alors facile de déduire le résultat annoncé pour u de l'allure de F, vu l'expression élémentaire de F.

Arrivons au théorème ; soit (t_n) une suite de points de ω tendant vers $x_1 \in \Sigma \cap B(x_0, R)$; pour tout n soit y_n une projection (à distance minima) de t_n sur Σ : la suite (y_n) converge aussi vers x_1. On introduit, pour tout entier n, une boule $\delta_n \subset \omega$ de centre t'_n et de rayon constant assez petit, tangente à Σ en y_n, et on la rapporte à un repère A_n d'origine t'_n et dont l'un des axes est dirigé suivant le vecteur $y_n - t'_n$, A_n admettant une limite pour $n \to +\infty$. Pour voir que grad $u(t_n)$ est une suite de Cauchy, il suffit d'après le lemme I.8.1. de

(5) Cette étude se faisait autrefois en utilisant la représentation de la fonction harmonique par un potentiel de double couche. Mais Kellog (*Trans. A.M.S.* 33, 1931) approfondit la question, même pour des dérivées d'ordre n, en n'utilisant que l'intégrale de Poisson, ce que nous faisons dans le texte dans des conditions moins générales.

https://spartacus-idh.com

considérer l'intégrale de Poisson I_{ψ_n} dans δ_n de la fonction ψ_n nulle sur la calotte $\gamma^d_{y_n}$ de δ_n et égale à la restriction de u à δ_n à l'extérieur de cette calotte (d convenablement choisi), et de voir dans A_n que grad $I_{\psi_n}(t_n)$ a une limite finie, ce qui résulte du lemme I.8.2..

Examinons enfin le cas général du théorème. On voit que U est au voisinage de $x_1 \in \Sigma$ de la forme $U(x) = \ell(x) + v(x)$ où ℓ est linéaire, dépendant continûment de x_1 et v telle que $|v(x)| \leqslant k\|x - x_1\|^2$, k pouvant être pris indépendamment de x_1 au voisinage d'un point fixé. On en déduit, en reprenant une couronne convenable, la même propriété pour u au voisinage de x_1 dans ω et on peut adapter ensuite le raisonnement qui précède, en considérant $u - \ell$, pour chaque $x_1 \in \Sigma$.

Enfin la propriété de la dérivée normale intérieure se voit en majorant $u > 0$ par la solution du problème de Dirichlet dans une couronne contenue dans ω et dont la grande sphère est tangente à Σ, en prenant la valeur 0 sur cette sphère et une constante minorant u sur la petite sphère.

Bibliographie générale

Voir les traités généraux comme ceux de Courant-Hilbert, Bourbaki, les ouvrages sur le potentiel cités dans l'appendice, les traités sur les distributions de Schwartz et sur les fonctions de variable complexe.

Pour le § 2, voir l'article de **Brelot-Choquet** (*J. de Madras*, 1957).

Compléments : *Critères de moyenne pour les fonctions harmoniques et polyharmoniques.*

Voir l'article de **Choquet-Deny** (*Bull. S.M.* 1944) complété par celui de **Schwartz**, même volume (où s'amorcent les distributions) et celui de **Brelot** (Contributions to potential theory, Lawrence, Kansas, 1954-1955, dernier mémoire de ce groupe) qui est repris dans une étude générale des polynômes harmoniques et polyharmoniques par **Brelot-Choquet** (*2e Colloque sur les équations aux dérivées partielles*, Bruxelles, 1954).

Voir aussi **Clauss Müller**, Spherical harmonics, *Lecture Notes 17* (1966).

Sur les fonctions polyharmoniques voir antérieurement **Nicolescu**, *Act. Sc.*, n° 331, 1936.

Sur les fonctions métaharmoniques voir **Friedman**, *Trans. A.M.S.*, 1956.

© Spartacus-Idh 2019

FONCTIONS SURHARMONIQUES ET PRESQUE SURHARMONIQUES.

§ 1. — Fonctions surharmoniques (au sens large) (F. Riesz).

On dit qu'une fonction numérique (finie ou non) $u > -\infty$ définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ est hyperharmonique (ou surharmonique au sens large) si elle est semi-continue inférieurement et si elle majore, dans toute boule $B(x_0, r)$ (centre x_0, rayon r) d'adhérence contenue dans ω, l'intégrale de Poisson I_u correspondante.

Propriétés et critère local.

a. La définition entraîne pour tout x_0 et toute $B(x_0, r) \subset \overline{B} \subset \omega$ la majoration $u(x_0) \geqslant \mathcal{M}_u^r(x_0)$ (moyenne sur la sphère $S(x_0, r)$, frontière de B, voir appendice) d'où $u(x_0) \geqslant \mathcal{A}_u^r(x_0)$ (moyenne spatiale dans B), vu l'expression de $\mathcal{A}$ au moyen de $\mathcal{M}_u^\rho$ comme dans le cas de u finie continue.

b. La condition $u > -\infty$ dans ω, u s.c.i. et l'une des conditions précédentes pour chaque x_0 et tout $r < r_0$ assez petit (dépendant de x_0) entraînent que u soit hyperharmonique dans ω (**critère local**).

Car il y a alors pour u impossibilité d'un minimum sans constance au voisinage, donc pour toute h harmonique dans ω, la condition $\liminf(u - h) \geqslant 0$ en tout point frontière (dans $\overline{\mathbb{R}}^n$) entraîne $u - h \geqslant 0$; en particulier si φ finie continue est $\leqslant u$ sur la frontière d'une boule $B(x_0, r) \subset \overline{B} \subset \omega$, $\liminf(u - I_\varphi) \geqslant 0$ à la frontière d'où $u \geqslant I_\varphi$ puis $u \geqslant I_u$ (car $I_u = \sup I_\varphi$ pour toutes ces φ).

Application. Si pour u hyperharmonique dans ω, on remplace u par I_u dans une boule $B(x_0, r) \subset \overline{B} \subset \omega$, on obtient encore une fonction hyperharmonique.

c. Toute combinaison linéaire à coefficients $\geqslant 0$ de fonctions hyperharmoniques est hyperharmonique.

d. L'enveloppe inférieure de deux fonctions hyperharmoniques est hyperharmonique.

e. L'enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante de fonctions hyperharmoniques est hyperharmonique.

Car cette enveloppe est semi-continue inférieurement et vérifie l'inégalité de la définition car on peut passer à la limite dans l'intégrale (*cf.* chap. I § 3).

f. La transformation de Kelvin (inversion dans le plan) conserve l'harmonicité donc l'intégrale de Poisson I_f pour f finie continue, puis s.c.i. et $> -\infty$, donc conserve aussi l'hyperharmonicité.

On dit qu'une fonction numérique (finie ou non) u définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ est sousharmonique au sens large (ou hypoharmonique) si est $-u$

© Spartacus-Idh 2019

est surharmonique au sens large dans ω. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les propriétés des fonctions hypoharmoniques qui correspondent aux propriétés **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**.

§ 2. — Paramètres de Blaschke-Privaloff.

Soit f une fonction numérique finie deux fois continûment différentiable définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$. On a au voisinage de l'origine supposée dans ω

$$f(x) = f(0) + \left(\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right) + o(r^2) \qquad (r^2 = \textstyle\sum_i x_i^2)$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f^r(0) - f(0) &= \frac{1}{2\alpha_n r^{n-1}} \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(0) \int x_i^2 \, \mathrm{d}\sigma + o(r^2) \\ &= \frac{1}{2}\Delta f(0) \mathcal{M}_{x_i^2}^r(0) + o(r^2) = \frac{r^2}{2n}\Delta f(0) + o(r^2).\end{aligned}$$

On a ainsi en $x_0 \in \omega$

$$\Delta f(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2}(\mathcal{M}_f^r(x_0) - f(x_0)).$$

On démontrerait de même que

$$\Delta f(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{2(n+2)}{r^2}(\mathcal{A}_f^r(x_0) - f(x_0))$$

avec la moyenne dans la boule $B(x_0, r)$ au lieu de la moyenne sur la sphère $S(x_0, r)$.

Pour toute fonction numérique sommable au sens strict ou large sur les $S(x_0, r)$ de rayon assez petit et donnant un sens à $\mathcal{M}_f^r(x_0) - f(x_0)$, on définit les paramètres « périphériques »

$$\overline{P}_f(x_0) = \limsup_{r\to 0} \frac{2n}{r^2}(\mathcal{M}_f^r(x_0) - f(x_0))$$

$$\underline{P}_f(x_0) = \liminf_{r\to 0} \frac{2n}{r^2}(\mathcal{M}_f^r(x_0) - f(x_0)).$$

Avec des hypothèses analogues, on définit les paramètres spatiaux

$$\overline{S}_f(x_0) = \limsup_{r\to 0} \frac{2(n+2)}{r^2}(\mathcal{A}_f^r(x_0) - f(x_0))$$

$$\underline{S}_f(x_0) = \liminf_{r\to 0} \frac{2(n+2)}{r^2}(\mathcal{A}_f^r(x_0) - f(x_0)).$$

On note P_f, S_f les valeurs communes de $\overline{P}_f$, $\underline{P}_f$ ou de $\overline{S}_f$, $\underline{S}_f$ respectivement lorsqu'il y a égalité.

https://spartacus-idh.com

Remarque. On peut démontrer (en supposant d'abord les sommabilités au sens strict)

$$\underline{P}_f \leqslant \underline{S}_f \leqslant \overline{S}_f \leqslant \overline{P}_f.$$

Théorème (**Blaschke-Privaloff**). *Pour qu'une fonction $u > -\infty$ semi-continue inférieurement dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ soit surharmonique au sens large, il faut et il suffit qu'en tout point x de ω tel que $u(x)$ soit fini, on ait*

$$\underline{P}_u \leqslant 0.$$

La condition est évidemment nécessaire.

Inversement, pour montrer avec les hypothèses indiquées que u est surharmonique au sens large, il suffit de démontrer que quelle que soit la boule fermée $\overline{B}(x_0, r)$ contenue dans ω, on a $I_\varphi - u \leqslant 0$ pour toute fonction finie continue φ définie sur $S(x_0, r)$ et majorée par u sur cette sphère ; en effet, il en résultera que I_u est majoré par u dans $B(x_0, r)$ donc

$$u(x_0) \geqslant I_u(x_0) = \mathcal{M}_u^r(x_0).$$

La fonction $w : x \to \|x - x_0\|^2 - R^2$ possède le laplacien $\Delta w = 2n$; de plus elle s'annule sur $S(x_0, R)$. Considérons dans $B(0, R)$ la fonction $v = I_\varphi - u + \varepsilon w$, qui est semi-continue supérieurement et $< +\infty$. Il suffit de voir qu'elle est $\leqslant 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Sinon elle atteindrait son maximum > 0 et fini en un point x où u est finie. En ce point on aurait :

$$\overline{P}_v(x) = \varepsilon \Delta w(x) - \underline{P}_u(x) = 2n\varepsilon - \underline{P}_u(x) > -\underline{P}_u(x) \geqslant 0$$

ainsi $\overline{P}_v(x) > 0$, ce qui est incompatible avec un maximum relatif en x.

On a un critère analogue avec $\underline{S}_u$ (soit par démonstration directe, soit en utilisant l'inégalité $\underline{S}_u \geqslant \underline{P}_u$).

Le critère de Blaschke-Privaloff est un **critère local d'hyperharmonicité** qui contient et améliore le critère local ***b***. du § 1.

§ 3. — Fonctions Surharmoniques.

Théorème. *Une fonction u surharmonique au sens large dans un domaine ω de $\mathbb{R}^n$ est égale partout à $+\infty$ ou bien est finie sur un ensemble dense, et même presque partout.*

Dans le dernier cas, on dit que u est surharmonique. Pour toute boule $\overline{B}(x_0, r) \subset$ la fonction I_u^B est finie, en particulier $\mathcal{M}_u^r(x_0)$ est fini ; de même $\mathcal{A}_u^r(x_0)$, de sorte que u est localement sommable.

Soit A l'ensemble des points de ω tels que dans un voisinage $u = +\infty$. Il est ouvert. Voyons que s'il est non vide, $A = \omega$; sinon il existe un point-frontière x_0 de A dans ω et une boule $B(x_0, r)$ de frontière coupant A ; alors $I_u^{B(x_0,r)} = +\infty$ dans $B(x_0, r)$ et de même u ; donc $x_0 \in A$: contradiction.

© Spartacus-Idh 2019

Donc ou bien $A = \omega$ ou bien $A = \varnothing$ (c'est-à-dire u finie sur un ensemble dense). Dans ce cas I_u^B est finie pour toute $\overline{B}(x_0, r) \subset \omega$, sinon u serait infinie dans B. Pour étudier $\mathcal{A}_u^r(x_1)$ on peut se ramener à $u > 0$ au voisinage de x_1 ; $\mathcal{A}_u^r(x_1)$ minore à un facteur près une moyenne $\mathcal{A}_u^\rho(x)$ qui, majorée par $u(x)$, est finie si en x voisin de x_1, $u(x)$ est fini ($\rho > r + \|x - x_1\|$).

On conclut que $\mathcal{A}_u^r(x_1)$ est finie.

La fonction u est dite sousharmonique si $-u$ est surharmonique.

Application. Une fonction surharmonique dans un ouvert ω est caractérisée comme une fonction semi-continue inférieurement et

a. localement sommable et satisfaisant à $u(x) \geqslant \mathcal{A}_u^r(x)$ pour toute boule fermée $\overline{B}(x, r) \subset \omega$, ou seulement pour celles de rayon assez petit en chaque x ;

b. ou bien, pour toute sphère $S(x, r)$ frontière de $\overline{B}(x, r) \subset \omega$ (ou seulement pour celles de rayon assez petit), sommable sur $S(x, r)$ et satisfaisant à $u(x) \geqslant \mathcal{M}_u^r(x)$.

§ 4. — Exemples de fonctions surharmoniques et sousharmoniques.

Pour toute fonction harmonique f (même complexe) dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$, $|f|$ est sousharmonique ; en effet, $|f|$ est continue, et quelle que soit la boule fermée $\overline{B}(x_0, r) \subset \omega$ on a $f(x_0) = \mathcal{M}_f^r(x_0)$ donc $|f(x_0)| \leqslant \mathcal{M}_{|f|}^r(x_0)$. De même $f^+ = \sup(f, 0)$ est sousharmonique, puisque f et 0 sont sousharmoniques.

Si f et g sont deux fonctions harmoniques dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $|f + ig|$ est sousharmonique. Il en résulte en particulier que dans le plan le module d'une fonction holomorphe est une fonction sousharmonique.

Soit f une fonction d'une variable complexe, définie et holomorphe dans un domaine et non identiquement nulle. La fonction $z \to \log|f(z)|$ est sousharmonique ; en effet, elle est $< +\infty$ continue partout, harmonique en dehors des zéros (isolés) de f et vaut $-\infty$ aux zéros de f, donc elle satisfait au critère local de sousharmonicité en tout point.

En particulier pour tout point x_0 du plan, la fonction fondamentale

$$x \to h(\|x - x_0\|) = -\log\|x - x_0\|$$

(c'est-à-dire $z \to -\log|z - z_0|$) est surharmonique dans $\mathbb{R}^2$.

On voit de même que pour $n \geqslant 3$, la fonction $x \to h(\|x - x_0\|) = \|x - x_0\|^{2-n}$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$) est surharmonique dans $\mathbb{R}^n$. On étudiera plus loin l'exemple général des potentiels.

§ 5. — Propriétés locales.

a. Considérons une fonction surharmonique f dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$. Quel que soit le point x_0 de ω les fonctions

$$r \to \mathcal{M}_f^r(x_0) \qquad \text{et} \qquad r \to \mathcal{A}_f^r(x_0) \qquad\qquad (r \geqslant 0\,;\ \overline{B}(x_0, r) \subset \omega)$$

sont décroissantes.

https://spartacus-idh.com

Pour toute boule fermée $\overline{B}(x_0, r)$ contenue dans ω, désignons par I_f^r l'intégrale de Poisson dans $B(x_0, r)$ de la restriction de f à la sphère $S(x_0, r)$. Soit $\overline{B}(x_0, R)$ une boule fermée contenue dans ω ; I_f^R est majorée par f dans $B(x_0, R)$ (§ 1 — Définition) et en particulier sur $S(x_0, r)$ pour $r < R$. Par suite I_f^R est majorée par I_f^r dans $B(x_0, r)$ $(r < R)$, donc

$$\mathcal{M}_f^r(x_0) = I_f^r(x_0) \geqslant I_f^R(x_0) = \mathcal{M}_f^R(x_0)$$

Ainsi $r \to \mathcal{M}_f^r(x_0)$ est décroissante.

L'inégalité $I_f^r \geqslant I_f^R$ $(r < R)$ résulte encore du fait que la fonction f' égale à I_f^r dans $B(x_0, r)$ et à f ailleurs est surharmonique au sens large (v. § 3), donc elle majore $I_{f'}^R = I_f^R$ dans $B(x_0, R)$.

La décroissance de $r \to \mathcal{A}_f^r(x_0)$ se démontre maintenant grâce à la relation

$$\mathcal{A}_f^R(x_0) = \frac{n}{R^n} \int_0^R \mathcal{M}_f^r(x_0) r^{n-1}\, \mathrm{d}r = n \int_O^1 \mathcal{M}_f^{Rt}(x_0) t^{n-1}\, \mathrm{d}t.$$

b. Démontrons encore que $\lim_{r\to 0} \mathcal{M}_f^r(x_0) = \lim_{r\to 0} \mathcal{A}_f^r(x_0) = f(x_0)$ pour tout point x_0 de ω.

En effet, comme f est semi-continue inférieurement, quel que soit $k < f(x_0)$ il existe un voisinage de x_0 dans lequel k minore f donc aussi $\mathcal{M}_f^r(x_0)$ pour toute boule fermée $\overline{B}(x_0, r)$ contenue dans ce voisinage

$$k \leqslant \mathcal{M}_f^r(x_0) \leqslant f(x_0)$$

par suite

$$\lim_{r\to 0} \mathcal{M}_f^r(x_0) = f(x_0).$$

On voit de même que $f(x_0) = \lim_{r\to 0} \mathcal{A}_f^r(x_0)$.

Il en résulte de cette dernière propriété qu'une fonction surharmonique est déterminée par sa restriction au complémentaire d'un ensemble de mesure nulle : deux fonctions surharmoniques égales presque partout sont égales.

c. **Limite inférieure en mesure.**

Considérons une fonction numérique u définie dans une partie E de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un nombre λ est un minorant en mesure de u (sur E) si l'ensemble des points x de E tels que $u(x) < \lambda$ est de mesure nulle.

La borne supérieure k des minorants en mesure de u est encore un minorant en mesure. En effet, soit $\lambda_n < k$ une suite croissante tendant vers k ; l'ensemble des points x de E où $u(x) < k$ est réunion de la suite A_n d'ensembles de mesures nulles (A_n désignant l'ensemble des points x de E où $u(x) < \lambda_n$), donc est de mesure nulle. Ainsi k est le plus grand des minorants en mesure de u ; on dit que c'est la borne inférieure en mesure de u. Elle est la même pour $u' = u$ presque partout.

Soit u une fonction numérique définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$. Pour tout voisinage V (dans ω) d'un point x_0 de ω, désignons par k_V la borne inférieure en mesure de u sur V. On appelle limite inférieure en mesure de u en x_0 le nombre $\sup_V k_V$ (V décrivant le filtre des voisinages de x_0 dans ω) qui est aussi la limite de k_V selon l'ordonné filtrant des V.

© Spartacus-Idh 2019

Propriété. *Soit u une fonction surharmonique dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$. Pour tout point x de ω, $u(x)$ est égal à la limite inférieure en mesure de u en x.*

Soit en effet Λ un nombre strictement plus petit que la limite inférieure en mesure de u en x (qui n'est pas $-\infty$ puisque u est une fonction semi-continue inférieurement $> -\infty$) ; il existe un voisinage V de x dans lequel Λ minore u presque partout ; on a $\mathcal{A}_u^r(x) > \Lambda$ pour $B(x_0, r) \subset V$ donc $u(x) \geqslant \Lambda$. Il en résulte que $u(x)$ majore la limite inférieure en mesure de u en x ; s'il était strictement supérieur à ce nombre, il existerait un nombre $k < u(x)$ strictement supérieur à la limite inférieure en mesure de u en x.

D'après la semi-continuité de u, il existerait alors un voisinage W de x dans lequel k minorerait u ; on aurait donc $\liminf_x$ en mesure $u \geqslant k$ ce qui est absurde. Donc $u(x) = \liminf_x$ en mesure u.

En particulier si E est un ensemble de mesure nulle, on a

$$u(x_0) = \liminf_{x \to x_0, x \notin E} u(x)$$

pour tout point x_0 de ω, car le second membre est compris entre la limite inférieure en mesure de u en x et $\liminf_{x \to x_0} u(x)$, or ces nombres sont égaux à $u(x_0)$. Pour $E = \{x_0\}$ cette formule se réduit à

$$\liminf_{x \to x_0, x \neq x_0} u(x) = u(x_0).$$

On retrouve ici qu'une fonction surharmonique est déterminée par sa restriction au complémentaire d'un ensemble de mesure nulle.

§ 6. — Approximation des fonctions surharmoniques.

Soit f une fonction localement sommable définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$. Il est facile de montrer que la fonction $x \to \mathcal{A}_f^r(x)$ (définie dans l'ensemble des points de ω dont la distance à la frontière est supérieure à r fixé) est continue. De même si f est $p-1$ fois continûment différentiable dans ω, on peut montrer que $x \to \mathcal{A}_f^r(x)$ est p fois continûment différentiable. Posons $\mathcal{A}_f^r = A_1^r$, et définissons A_p^r $(p > 1)$ par récurrence $A_p^r = \mathcal{A}_{A_{p-1}^r}^r$; il résulte des remarques précédentes que si f est localement sommable dans ω, A_p^r est $p-1$ fois continûment différentiable dans la partie ouverte de ω où cette fonction est définie.

Si f est une fonction surharmonique, on voit que la fonction A_p^r de x et r est décroissante de r et converge simplement vers f lorsque r tend vers 0 (§ 5) et même est surharmonique si f l'est. D'où un procédé d'approximation de f dans un ouvert relativement compact par une suite croissante de fonctions surharmoniques p fois différentiables A_{p+1}^r.

Régularisation complète. Soit Ψ_{r_0} une fonction d'une variable réelle $\geqslant 0$, nulle dans $[r_0, \to [$ telle que la fonction $\varphi : (x_i) \to \Psi_r(r) = \varphi((x_i))$ $(r^2 = \sum x_i^2)$ définie dans $\mathbb{R}^n$ soit indéfiniment différentiable ; on peut choisir Ψ_{r_0} de manière que l'intégrale de φ dans $\mathbb{R}^n$ soit égale à 1.

https://spartacus-idh.com

Noter que si f est surharmonique dans ω, $f * \varphi$ l'est aussi (dans l'ouvert ω_{r_0} des points de ω à distance de la frontière $> r_0$).

Si f est finie continue, $f * \varphi$, quel que soit le choix de Ψ_{r_0} pour chaque r_0, converge uniformément localement vers f pour $r_0 \to 0$. En général, pour f localement sommable, si, r_1 et Ψ_{r_1} étant fixés, on prend $\Psi_{r_0}(r)$ proportionnel à $\Psi_{r_1}(\frac{r_1}{r_0} r)$, alors on peut montrer que $f * \varphi$ converge presque partout vers f ($r_0 \to 0$).

Ceci fournit un procédé d'approximation des fonctions surharmoniques par des fonctions surharmoniques indéfiniment différentiables.

Ces approximations permettent de se ramener élémentairement à de simples calculs de dérivations, p. ex. pour montrer qu'une fonction concave croissante d'une fonction surharmonique est surharmonique.

§ 7. — Théorème de convexité de Riesz.

Théorème. *Soit u une fonction sousharmonique (resp. surharmonique) dans une couronne de centre 0 et de rayons R, R' dans $\mathbb{R}^n$ (cf. chap. I, § 7).*

La fonction $\mathcal{M}_u^r(0)$ est convexe (resp. concave) de $t = h(r)$ $(R < r < R')$, h désignant la fonction fondamentale définie au § 4.

On peut par approximation se ramener au cas d'une fonction deux fois continûment différentiable où il suffit d'un calcul banal. Nous préférons la démonstration suivante.

Voyons d'abord que si u est harmonique, $\mathcal{M}_u^r(0)$ est une fonction linéaire de $t = h(r)$. En effet, le flux de u à travers $S(0,r)$ $(R < r < R')$ ne dépend pas de r et vaut $\int \frac{\partial u}{\partial r} r^{n-1}\, d\sigma$ ($d\sigma$ mesure-aire sur $S(0,1)$) d'où $\int \frac{\partial u}{\partial r}\, d\sigma = \frac{K}{r^{n-1}}$, et le résultat par intégration.

Considérons maintenant une fonction sousharmonique u définie dans la couronne. Soient r_1, r_2 des nombres tels que $R < r_1 < r_2 < R'$; désignons par v la solution généralisée du problème de Dirichlet dans la couronne de rayons r_1, r_2 avec, comme valeurs-frontière celles des restrictions de u aux deux sphères $S(0,r_1)$ et $S(0,r_2)$; on a $\limsup_{x \to y} v(x) \leqslant u(y)$ pour $y \in S(0,r_i)$ $(i = 1,2)$ (*cf.* chap. I, § 7).

On en déduit que les limites de $\mathcal{M}_v^r(0)$ en r_1 et r_2 sont majorées par $\mathcal{M}_u^{r_1}$ et $\mathcal{M}_u^{r_2}$. Comme d'après sa définition v majore u dans la couronne, $\mathcal{M}_u^r$ est majorée par $\mathcal{M}_v^r$, fonction linéaire de t dont les valeurs limites extrêmes sont au plus égales à $\mathcal{M}_u^{r_1}$ et $\mathcal{M}_u^{r_2}$. D'où résulte la convexité.

Applications nombreuses.

1. Aux modules des fonctions holomorphes, dont l'étude avait conduit F. Riesz aux fonctions sousharmoniques ;

2. à l'étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier isolé 0. Par exemple $\mathcal{M}_u^r(0)$ et son quotient par $h(r)$ admettent des limites lorsque r tend vers 0.

3. Exemple important mettant en relief une différence entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$: si u est sousharmonique et bornée supérieurement dans tout $\mathbb{R}^2$,

© Spartacus-Idh 2019

$u = \text{Cte}$. Car $\mathcal{M}_u^r(0)$ est convexe de $t = \log(\frac{1}{r})$ $(-\infty < t < +\infty)$ et bornée supérieurement donc constante. Alors si I_u^r est l'intégrale de Poisson dans le disque $B(0,r)$, I_u^r est croissante en r et constante au point 0, et sa limite U harmonique et bornée supérieurement est constante dans $\mathbb{R}^2$. Comme $u \leqslant U = U(0)$ et que $\mathcal{M}_u^r(0) = U(0)$, on conclut que $u = U$ en un point, donc partout.

Dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$, il n'en est plus de même (Ex : $-h(\|x\|) < 0$).

§ 8. — Minorantes harmoniques.

Considérons une famille (u_i) de fonctions surharmoniques dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$. S'il existe une fonction sousharmonique minorant toutes les fonctions u_i, l'enveloppe supérieure w des minorantes sousharmoniques de la famille (u_i) est une fonction harmonique, et c'est la plus grande minorante harmonique de la famille (u_i).

En effet, pour toute boule fermée $\overline{B}$ contenue dans ω et pour toute minorante sousharmonique v de la famille (u_i), la fonction v_B (obtenue en remplaçant v par I_v^B dans B ; *cf.* § 1) est encore une minorante sousharmonique de (u_i). Donc w est égale dans B à l'enveloppe supérieure de la famille (I_v^B) de fonctions harmoniques (puisque $v \leqslant I_v^B$) ; or cette famille est filtrante à droite comme la famille (v) (de toutes les minorantes sousharmoniques) elle-même. Par suite w est harmonique dans B (car elle n'est pas $+\infty$; v. chap. I, § 2 ou 3). D'où le résultat.

En particulier une fonction surharmonique u dans ω admettant une minorante harmonique admet une plus grande minorante harmonique. Dans une boule $B(x_0, R)$, on remarquera que la plus grande minorante harmonique de u est la fonction

$$\lim_{r \to R} I_u^{B_r} \qquad (B_r = B(x_0, r), r \leqslant R).$$

En effet, $I_u^{B_r}$ majore dans B_r toute minorante harmonique dans B_R et $\lim_{r \to R} I_u^{B_r}$ est une minorante harmonique de u.

De plus $I_u^{B_r}$ $(r < R)$ est aussi la plus grande minorante harmonique de u dans B_R (à cause de la continuité de $\mathcal{M}_u^r(x_0)$ en r).

Plus généralement, la plus grande minorante harmonique w de u dans un ouvert Ω est la limite suivant l'ordonné filtrant des ouverts relativement compacts ω contenus dans Ω de la plus grande minorante harmonique w_ω de u dans ω.

Application.

Théorème. *L'ensemble des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dans un ouvert ω est réticulé (selon l'ordre naturel). L'ensemble des différences de deux fonctions harmoniques $\geqslant 0$ est un espace de Riesz complètement réticulé (même ordre).*

En effet, si u_1 et u_2 sont des fonctions harmoniques $\geqslant 0$, il en est de même de $u_1 + u_2$ (resp. 0) qui majore (resp. minore) u_1 et u_2 ; il existe donc une plus grande minorante harmonique et une plus petite majorante harmonique.

https://spartacus-idh.com

De même l'espace des différences de fonctions harmoniques $\geqslant 0$ est complètement réticulé, parce qu'un ensemble de fonctions harmoniques positives majoré par une fonction harmonique admet une plus petite majorante harmonique.

§ 9. — Fonctions presque surharmoniques (Szpilrajn).

On dit qu'une fonction numérique (finie ou non) f définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ est presque surharmonique s'il existe une fonction surharmonique $\tilde{f}$ dans ω égale presque partout à f.

La fonction $\tilde{f}$ est nécessairement unique (§ 5) ; on dit que c'est la régularisée surharmonique de f. En x, elle vaut $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}_f^r(x)$ et lim inf en mesure de u en x.

L'introduction des fonctions presque surharmoniques est justifiée d'une part par l'usage des distributions, d'autre part parce que la semi-continuité (inférieure) n'est pas conservée dans le passage à la limite suivant une suite décroissante.

© Spartacus-Idh 2019

Critères de presque surharmonicité.

1. Pour qu'une fonction numérique u (finie ou non) définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ soit presque surharmonique, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

a. u est localement sommable.

b. $\liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{A}_u^r(x_0)-\varphi(x_0)}{r^2} \leqslant 0$ pour tout point x_0 de ω, $\varphi(x_0)$ désignant la limite inférieure en mesure de u en x_0.

Si u est presque surharmonique, $\tilde{u} = \varphi$ et $\mathcal{A}_u^r = A_{\tilde{u}}^r$ d'où la nécessité des conditions.

Inversement $\varphi \neq -\infty$ partout, d'après ***b***. puisque $\mathcal{A}_u^r(x_0)$ est fini. La fonction φ est aussi semi-continue inférieurement. De plus elle est majorée par u presque partout. En effet, puisque u est localement sommable, on a $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}_u^r(x) = u(x)$ pour presque tout point x de ω. Supposons qu'en un point x on ait $u(x) < k < \varphi(x)$; k est un minorant en mesure de u dans un voisinage V de x, et par suite $\mathcal{A}_u^r(x) > k > u(x)$ pour r assez petit ; on ne saurait donc avoir $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}_u^r(x) = u(x)$. Ainsi l'ensemble des points x où $\varphi(x) > u(x)$ est de mesure nulle.

Par suite $\mathcal{A}_\varphi^r \leqslant \mathcal{A}_u^r$, donc d'après la condition ***b***.,

$$\liminf_{r\to 0} \frac{A_\varphi^r(x_0) - \varphi(x_0)}{r^2} \leqslant 0$$

c'est-à-dire $\underline{S}_\varphi(x_0) \leqslant 0$ en tout point x_0 de ω. Il en résulte que φ est surharmonique (car elle est semi-continue inférieurement et $> -\infty$; v. § 2).

Enfin φ est presque partout égale à u ; en effet, elle est presque partout majorée par u, et d'autre part si $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}_u^r(x)$ existe, elle est $\leqslant \varphi(x)$ d'après ***b***. Comme $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}_u^r = u$ p.p. on a $u \leqslant \varphi$ p.p.

2. Pour qu'une fonction numérique u définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ soit presque surharmonique, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

a' u est localement sommable.

b' On a $u(x_0) \geqslant \mathcal{A}_u^r(x_0)$ en presque tout point x_0 de ω et pour toute boule fermée $\overline{B}(x_0, r) \subset \omega$.

Les conditions sont évidemment nécessaires.

Inversement supposons ***a'*** et ***b'*** satisfaites. Pour une valeur fixée de r, la fonction $x \to \mathcal{A}_u^r(x)$ est finie continue. Soit x_0 un point de ω ; il existe une suite x_n de points de ω convergeant vers x_0 et telle que $u(x_n) \geqslant \mathcal{A}_u^r(x_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ et que la suite $u(x_n)$ converge vers la limite inférieure en mesure $\varphi(x_0)$ de u en x_0. On a donc

$$\varphi(x_0) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_u^r(x_n) = \mathcal{A}_u^r(x_0)$$

comme r est arbitraire, la condition ***b*** du critère précédent est satisfaite, et u est presque surharmonique.

On retiendra qu'une fonction surharmonique est caractérisée comme une fonction presque surharmonique valant en chaque point sa limite inférieure en mesure.

Fonctions surmédianes. On dit qu'une fonction numérique (finie ou non) u définie dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ est spatialement surmédiane (ou brièvement surmédiane) si elle est localement sommable, et si on a $u(x) \geqslant \mathcal{A}_u^r(x)$ pour toute boule fermée $\overline{B}(x, r)$ contenue dans ω. Notion analogue de fonction sous-médiane.

Une fonction spatialement surmédiane u est caractérisée comme une fonction presque surharmonique qui majore sa régularisée surharmonique ou encore dont la régularisée surharmonique $\tilde{u}$ est la régularisée inférieure $\hat{u}$, ou bien encore telle que $\hat{u}(x) =$ lim inf en mesure de u en x.

Limites de fonctions presque surharmoniques. Soit dans $\omega \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergente de fonctions presque surharmoniques majorées en module sur tout compact par une fonction sommable. La limite est presque surharmonique dans ω.
Démonstration immédiate en utilisant le critère **2**.

D'autre part on peut montrer que *l'enveloppe inférieure d'une famille (u_i) de fonctions spatialement surmédianes localement bornées inférieurement est localement sommable* ; il s'ensuit qu'elle est spatialement surmédiane. Cela résulte aussi (grâce au lemme topologique) du cas particulier où les u_i sont surharmoniques ; et ce cas, grâce au même lemme, se ramène au cas d'une suite.

Nous verrons plus loin que dans le cas où les fonctions u_i sont surharmoniques, on a une propriété plus précise : $u - \inf_i u_i$ diffère d'une fonction surharmonique seulement sur un ensemble « polaire ». Le chapitre suivant introduit les ensembles polaires.

Remarque. Il est plus commode pour les extensions axiomatiques, d'introduire comme instrument voisin des fonctions hyperharmoniques, les fonctions dites « $S_{\mathcal{B}}$-fonctions » définies dans ω par les conditions

https://spartacus-idh.com

- u localement bornée inférieurement,
- $u(x) \geqslant \int^* u \, d\rho^{(x,r)}$

où $d\rho^{(x,r)}$ est la mesure positive de total 1, proportionnelle à la mesure-aire de la sphère $S(x,r)$ pour toute $B(x,r) \subset \omega$. (Le $\mathcal{B}$ des $S_{\mathcal{B}}$-fonctions rappelle cette famille $\mathcal{B}$ de boules). On dira aussi « $\mathcal{B}$-à peu près hyperharmonique » ou même dans ce cours à peu près hyperharmonique (et de même, pour l'opposé, à peu près hypoharmonique).

Leur utilité vient des deux propriétés suivantes faciles :
l'enveloppe inférieure d'une famille localement bornée inférieurement est de même nature ; la régularisée inférieure $\hat{u}(x)$ vaut $\lim_{r\to 0} \int^* u \, d\rho^{(x,r)}$ et est hyperharmonique (dite aussi régularisée hyperharmonique).

Donc une fonction u à peu près hyperharmonique dans un domaine est de régularisée $\hat{u} = +\infty$ (et alors $u = +\infty$) ou bien $\hat{u}$ est surharmonique (et u est finie sur un ensemble dense et est dite à peu près surharmonique).

§ 10. — Réduite et balayée.

Soient ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et $e \subset \omega$. Si φ est une fonction réelle $\geqslant 0$ sur e on note $(R^e_\varphi)_\omega$ ou brièvement R^e_φ dite réduite [6], l'enveloppe inférieure de la famille Φ des v hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans ω majorant φ sur e. Elle est donc à peu près hyperharmonique, et dans chaque domaine composant ω soit égale à $+\infty$ soit surmédiane.

Propriétés immédiates.

$R^e_{\lambda\varphi} = \lambda R^e_\varphi \quad (\lambda > 0)$;
R^e_φ croît avec e et φ ;
$R^e_{\varphi_1+\varphi_2} \leqslant R^e_{\varphi_1} + R^e_{\varphi_2}$; $R^{e_1\cup e_2}_\varphi \leqslant R^{e_1}_\varphi + R^{e_2}_\varphi$
d'où les mêmes propriétés pour les régularisées.
D'autre part : $R^e_\varphi \geqslant \varphi$ sur e.

Le cas le plus intéressant est celui où φ est la trace d'une fonction surharmonique $v \geqslant 0$ dans ω. La régularisée $\hat{R}^e_v$, alors surharmonique est dite aussi balayée $\mathcal{B}^e_v$ (parfois extrémisée $\mathcal{E}^{\omega-e}_v$).

Alors

$$0 \leqslant \hat{R}^e_v \leqslant R^e_v \leqslant v$$
$$R^e_v = v \quad \text{sur} \quad e.$$

Sur $\omega \setminus \overline{e}$, R^e_v vaut $\hat{R}^e_v$ et est harmonique, car les fonctions I^B_v (intégrales de Poisson relatives à une boule $B \subset \overline{B} \subset \omega \setminus \overline{e}$) à cause de leurs prolongements par v appartenant à Φ forment un ordonné filtrant de même inf que les v.

Enfin si $e = \omega \setminus \overline{B}$ ($\overline{B}$ boule fermée de ω), $R^e_v = I^B_v$ dans B car v changée en I^B_v dans B appartient à Φ d'où $I^B_v \geqslant R^e_v$ et toute $v \in \Phi$ majore I_φ où φ est finie continue $\leqslant v$ sur B, d'où $R^e_v \geqslant I_\varphi$ et $R^e_v \geqslant I_v$ dans B.

(6) Ce terme d'usage maintenant courant a été introduit dans (Brelot, *J. de Math.*, 1956) pour dénommer une notion utilisée par Martin, mais différente parce que relative à un ensemble de la frontière (de Martin). La notion du texte qui rentre dans des enveloppes considérées antérieurement (p. ex. Brelot, *J. de Math.*, 1945) est apparue dans l'article axiomatique du *Sém. de théorie du potentiel* 2, 1958. Mais la régularisée de cette réduite (extrémisée pour le complémentaire) était d'usage courant (v. p. ex. Brelot, *J. de Math.*, 1945)

© Spartacus-Idh 2019

Bibliographie et compléments.

F. Riesz *Acta Math.*, 48 et 54.

M. Brelot Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point. *Act. Sc. et ind.*, n° 139 (1934).

T. Rado Subharmonic functions. *Ergeb.* 5, 1937.

I.Privaloff Les fonctions sousharmoniques (en russe). Moscou-Leningrad 1937.

M. Brelot *Annales Univ. Grenoble*, 21, 1945.

Sur les extensions au voisinage du point à l'infini :

Brelot *Annales ENS*, t. 61 (aussi pour les chapitres suivants).

Compléments :

Deny-Lelong *Bull. Soc. Math.* F, 75, 1947.

A. Huber *Art. Institut Orell Füssli* Zurich, 1952. *Trans. AMS*, 82 ; *Comm. Math. Helv.* 32, 34, *Compos. Math.* 13.

M. Arsove *Trans. Am. M.S.* 75 (sur les différences de fonctions sousharmoniques).

B. Sjöberg *Acta. Acad. Aboensis* ser. B, vol. 26, n° l.

W.K. Hayman *Comm. Math. Helv.* 34 (1960).

J. Moreau *Sem. d'Analyse unilatérale*, Montpellier, 1968.

Ü. Kuran *Journal et Proceed. de la London Math. Soc.* (1965-6-7-8-9).

Sur les fonctions plurisousharmoniques, ou multiplement harmoniques ou sousharmoniques :

P. Lelong *Annales ENS*, 62 ; *Annales I.F* 11 ; *Conf. CIME italien* (1963).

V. Avanissian Annales ENS, 78 ; *J. d'Analyse* IX (1961).

V. Avanissian Sem. Proba. Strasbourg 1967 (*Lecture Notes* 39).

Dans l'ouvrage général de **Landkoff** (v. appendice) on trouvera aussi la notion de fonction α-surharmonique (en liaison avec les potentiels d'ordre α, v. chap. IV).

https://spartacus-idh.com

INTRODUCTION DES ENSEMBLES POLAIRES

§ 1. — Définitions — Critères.

On dit qu'un ensemble E est *polaire* dans un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe dans ω une fonction surharmonique $\geqslant 0$ valant $+\infty$ sur $E \cap \omega$ au moins.

Cela implique (chap. II, § 3) que $E \cap \omega$ n'a pas de point intérieur.

Il est dit *localement polaire* (7) dans ω s'il est polaire dans un voisinage ouvert de chaque point de ω. Au lieu de « localement polaire dans $\mathbb{R}^n$ », ce qui implique la même propriété dans tout ω, on dira plus brièvement « polaire ». « Quasi-partout » signifiera « sauf sur un ensemble localement polaire ».

Lemme. *Soit u une fonction surharmonique définie dans une boule $B(0,R)$. Quel que soit le rayon $R' < R$, il existe une fonction surharmonique v dans $\mathbb{R}^n$ qui a même restriction que u à $B(0,R')$.*

On commence par modifier u pour la rendre finie continue au voisinage de la couronne Γ_α^β ($R' < \alpha < |x| < \beta < R$) sans l'altérer dans $B(0,R')$. Il suffit de couvrir Γ_α^β par un nombre fini de boules ouvertes dont les fermetures ne coupent pas les sphères $B^*(0,R)$ ou $B^*(0,R')$, puis d'y remplacer successivement u ou la fonction déjà obtenue par l'intégrale de Poisson correspondante. D'où une fonction surharmonique w répondant à la question. Ensuite on choisit une fonction $H = \lambda h(\|x\|) + \mu$ qui majore w sur $B^*(0,\alpha)$ et la minore sur $B^*(0,\beta)$. La fonction $\inf(H,w)$ dans Γ_α^β prolongée par w dans $B(0,\alpha)$ et par H dans le complémentaire de $B(0,\beta)$ répond à la question du lemme.

Cas de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$). On peut alors trouver v surharmonique > 0 dans $\mathbb{R}^n$, égale à u dans $B(0,R')$ *à une fonction harmonique près* dans cette boule.

Car le calcul précédent, si u est > 0 dans Γ_α^β, permet de choisir H avec $\lambda > 0$.

Théorème. *Soit E supposé polaire dans un voisinage de chacun de ses points. Alors il existe une fonction surharmonique v dans $\mathbb{R}^n$, valant $+\infty$ sur E (dite associée à E) et on peut la choisir finie en un point fixé $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus E$ (et $v > 0$ si $n \geqslant 3$). Il s'ensuit que E est polaire dans tout ouvert borné (ou dans $\mathbb{R}^n$ si $n \geqslant 3$), donc localement polaire.*

Associons à chaque point $x \in E$ une boule $B(x,r)$ où existe v surharmonique valant $+\infty$ sur $B \cap E$. Introduisons B' concentrique plus petite telle que

(7) Cette notion a été introduite en 1941 (Brelot, bibl.) pour remplacer la notion d'ensemble de capacité (intérieure) nulle utilisée jusqu'alors. Elle équivaut à celle de capacité extérieure nulle localement (voir chap. V).

© Spartacus-Idh 2019

$\overline{B}' \not\ni x_0$. Comme $\mathbb{R}^n$ est à base dénombrable, on peut couvrir E avec une suite de telles boules B'_p. On y associe d'après le lemme une fonction surharmonique dans $\mathbb{R}^n$ (même > 0 si $n \geqslant 3$) infinie sur $B'_p \cap E$ et que l'on peut supposer finie en x_0, en la remplaçant au besoin par son intégrale de Poisson dans une boule assez petite de centre x_0. Cette fonction v_p admet dans la boule $B(x_0, p)$ une borne inférieure K_p. Choisissons $\lambda_p > 0$ pour que $\sum_p \lambda_p(v_p(x_0) - K_p)$ soit fini. Alors $\sum_p \lambda_p(v_p - K_p)$ est une fonction surharmonique, car dans tout $B(0,\rho)$ fixé, $\lambda_p(v_p - K_p)$ est > 0 pour p assez grand et la somme de la série, hyperharmonique et finie en x_0, y est surharmonique. Le $\sum_p$ répond à la question. Si $n \geqslant 3$ on peut remplacer K_p par 0.

Critère. Soit dans un domaine ω une fonction v surharmonique > 0. Pour que $e \subset \omega$ soit polaire dans ω, il faut et suffit que $\hat{R}^e_v \equiv 0$ ou que R^e_v soit nul en un point.

Les conditions sont nécessaires car si w est surharmonique > 0 dans ω, infinie sur e, $w \geqslant R^e_{\lambda v}$ ($\lambda > 0$ quelconque) d'où $R^e_v = 0$ en tout point où $w \neq \infty$ et par suite $\hat{R}^e_v \equiv 0$. Inversement si $R^e_v(x_0) = 0$, il existe v_n surharmonique $\geqslant 0$, $\geqslant v$ sur e, telle que $v_n(x_0) < 2^{-n}$ et $\sum_n v_n$ est surharmonique > 0 dans ω, infinie sur e. Si on suppose $\hat{R}^e_v \equiv 0$, on introduit un voisinage α d'un point x_0 et on voit que $R^{e\setminus\alpha}_v(x_0) = \hat{R}^{e\setminus\alpha}_v(x_0) = 0$ d'où $e \setminus \alpha$ polaire. Mais e est la réunion de deux tels ensembles $e \setminus \alpha$, donc e est polaire.

§ 2. — Propriétés.

1. Tout ensemble réduit à un point est polaire.

En effet, si $E = \{xo\}$, la fonction surharmonique $x \to h(\|x - x_0\|)$ est égale à $+\infty$ en x_0.

2. Toute partie d'un ensemble polaire est polaire.

3. Tout ensemble polaire est de mesure nulle. La trace d'un ensemble polaire sur une sphère est de mesure nulle (sur la sphère). Cela résulte des propriétés de sommabilité des fonctions surharmoniques.

4. La réunion d'une famille dénombrable (E_p) d'ensembles polaires est polaire.

Soit x_0 un point n'appartenant pas à la réunion de la famille. Pour chaque entier p, considérons une fonction surharmonique v_p associée à E_p, finie en x_0 et positive dans la boule $B(x_0, p)$. Soit λ_p une suite de nombres > 0 telle que la série de terme général $\lambda_p v_p(x_0)$ converge ; la série de terme général $\lambda_p v_p$ converge vers une fonction surharmonique qui vaut $+\infty$ en tout point de la réunion $\cup_p E_p$.

5. L'image d'un ensemble polaire par une transformation conforme est polaire.

En effet, les transformations conformes dans le plan, la similitude et la transformation de Kelvin conservent la surharmonicité.

https://spartacus-idh.com

6. Soit dans un domaine ω un ensemble (localement) polaire E fermé dans ω ; le complémentaire $\omega - E$ de E par rapport à ω est connexe.
En effet, soit v une fonction surharmonique dans ω associée à E. Si $\omega - E$ n'est pas connexe, soient ω_1 et ω_2 deux composantes connexes non vides. La fonction u égale à v dans ω_1 et à $+\infty$ dans $\omega - \omega_1$ est surharmonique au sens large, égale à $+\infty$ dans ω_2 mais non dans ω_1 ce qui est absurde.

Propriété de prolongement. Soit E un ensemble localement polaire contenu dans un ouvert ω et fermé par rapport à ω. Si u est une fonction surharmonique définie dans $\omega - E$ et localement bornée inférieurement dans ω, il existe une fonction surharmonique unique dans ω prolongeant u.

On se ramène immédiatement au cas où ω est borné. Soit v une fonction surharmonique > 0 dans ω et associée à E. La fonction v_p égale à $+\infty$ sur E et à $u + v/p$ dans $\omega - E$ est surharmonique. Or elle décroît quand p augmente, et tend vers u en tout point x où $v(x)$ est fini. Ainsi la limite w de la suite décroissante v_p est presque surharmonique et presque partout égale à u ou encore $S_{\mathcal{B}}$ et q.p. égale à u ; sa régularisée surharmonique w est donc le prolongement cherché de u.

En particulier si u est harmonique dans $\omega - E$ et localement bornée, elle se prolonge (d'une manière unique) en une fonction harmonique dans ω.

Bibliographie

M. Brelot, Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques, *Bull. Sc. Math.* 1941. (8)

Indication de Compléments : Un domaine où existe une fonction surharmonique > 0 non constante (ou encore, ce qui est équivalent, non harmonique) est dit domaine de Green ou greenien. C'est le cas de tout domaine de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$). Dans $\mathbb{R}^2$, chacune des propriétés suivantes est caractéristique :

a. $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$ n'est pas localement polaire.

b. $h(\|x - x_0\|)$ admet pour un ou tout $x_0 \in \omega$ une minorante harmonique (ou ce qui est équivalent, sousharmonique).

Dans un tel domaine tout ensemble localement polaire y est polaire. Les démonstrations peuvent être faites à ce stade d'exposition.
(Voir p. ex. **Brelot**, Cours 3e Cycle, 1964-1965).

Cela fait partie d'une étude dans les « espaces de Green » (**Brelot-Choquet**, *Annales de l'I.F.*, t. 3).

(8) La démonstration du théorème classique 3 de cet article a été ramenée par erreur à un cas particulier plus facile, mais le cas général se traite de même.

© Spartacus-Idh 2019

POTENTIELS CLASSIQUES

§ 1. — Définition.

Rappelons la définition de la fonction surharmonique fondamentale dans $\mathbb{R}^n$ (*cf.* chap. II, § 4) :

$$x \to h(\|x\|) = -\log\|x\| \quad \text{pour} \quad n = 2$$
$$= \|x\|^{2-n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3.$$

On notera h_y la fonction $x \to h(\|x-y\|)$ et brièvement h pour $h_{y=0} = h(\|x\|)$. Considérons une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$; on appelle h-potentiel (ou brièvement potentiel) de μ la fonction (non toujours partout définie dans $\mathbb{R}^n$) :

$$x \to U^\mu(x) = \int h(\|x-y\|)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int h_x(y)\,\mathrm{d}\mu(y). \qquad \text{(IV.1)}$$

Pour $n \geqslant 3$ la fonction fondamentale est positive ; dans le cas du plan, on peut se ramener à une fonction fondamentale positive si on considère une mesure μ à support compact, en se plaçant alors dans un domaine borné ω (de diamètre D) le contenant. Il suffit de remplacer $h(\|x-y\|)$ par $\log(D/\|x-y\|)$.

Propriété. *Le potentiel d'une mesure positive à support compact est partout défini et surharmonique.*

Pour tout entier p positif, posons $\varphi_p(x,y) = \inf\big(h(\|x-y\|), p\big)$; la fonction $x \to \varphi_p(x,y)$ est surharmonique et continue. Par suite $x \to \psi_p(x) = \int \varphi_p(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ est une fonction surharmonique continue (μ positive). Or $h(\|x-y\|) = \sup_p \varphi_p(x,y)$, donc $\psi_p(x)$ converge en croissant vers le potentiel $U^\mu = \sup \psi_p$. Il en résulte que U^μ est surharmonique au sens large (chap. II, § 1, propr. ***d***.). De plus, on voit immédiatement que U^μ est harmonique finie dans le complémentaire du support de μ ; donc c'est une fonction surharmonique.

Extension. La propriété subsiste pour une mesure μ positive dont le support n'est pas compact, si le potentiel est défini et fini en un point.

Considérons d'abord le cas $n \geqslant 3$. Soit $\overline{B}$ une boule fermée de $\mathbb{R}^n$; d'après ce qui précède, le potentiel des masses contenues dans $\overline{B}$ est partout défini et surharmonique. Quant au potentiel des masse extérieures à B, s'il est infini en un point x de B il est infini partout ; sinon il est harmonique dans B. Ainsi le potentiel de μ est dans B une fonction surharmonique ou $+\infty$.

Le raisonnement est un peu différent dans le plan, car la fonction fondamentale n'est pas positive ; il convient de séparer sa partie positive et sa partie

© Spartacus-Idh 2019

négative. Nous n'insisterons pas sur ce point, car dans la suite nous nous placerons au point de vue local et nous remplacerons la fonction fondamentale par une fonction de Green, partout positive.

§ 2. — Utilisation des distributions.

Nous ne considérerons dans ce paragraphe que des mesures à support compact.

Désignons par h la fonction fondamentale $x \to h(x) = h(\|x\|)$; la formule (IV.1) (§ 1) s'écrit $U^\mu(x) = \int h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = h * \mu(x)$ soit $U^\mu = h * \mu$.

Plus généralement, pour toute distribution T à support compact dans $\mathbb{R}^n$, nous dirons que le produit de convolution $U^T = h * T$ est le potentiel de la distribution T.

Propriétés du laplacien.

1. On a la formule

$$\Delta h = -\varphi_n \delta \tag{IV.2}$$

au sens des distributions, δ désignant la distribution de Dirac et φ_n le flux de la fonction fondamentale h entrant dans une sphère de centre 0. En effet, si T est la distribution Δh et $f \in \mathcal{D}$, $T(f) = \int h \Delta f\,\mathrm{d}x$ est la limite lorsque ε tend vers 0 et R vers $+\infty$ de l'intégrale de $h\Delta f$ dans la couronne de rayons ε et R ; puisque h est harmonique dans cette couronne, $\Delta h = 0$, et

$$\int h\Delta f\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{\varepsilon<\|x\|<R} (h\Delta f - f\Delta h)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} \left(h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n} - f\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}\sigma$$

(formule de Green, où n est la normale tournée vers 0), puisque le support de f est compact. On voit immédiatement que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} f\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma = \varphi_n f(0).$$

Ainsi $T(f) = -\varphi_n f(0)$, c'est-à-dire $\Delta h = -\varphi_n \delta$. Le calcul de φ_n est facile

$$\varphi_n = \int \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma = \int \frac{\mathrm{d}r^{2-n}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}\sigma = (n-2)\alpha_n$$

pour $n \geqslant 3$; pour $n = 2$ on a $\varphi_2 = 2\pi$.

2. Pour toute distribution T à support compact dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\Delta U^T = \Delta(h * T) = \Delta h * T = -\varphi_n T. \tag{IV.3}$$

Théorème (de représentation de Riesz, forme locale). *Les distributions T dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient l'inéquation $\Delta T \leqslant 0$ sont les fonctions presque surharmoniques dans ω.*

Démontrons d'abord que pour toute fonction f presque surharmonique dans ω on a $\Delta f \leqslant 0$ au sens des distributions. Il suffit de l'établir lorsque

https://spartacus-idh.com

f est une fonction surharmonique ; c'est alors la limite (localement) d'une suite croissante de fonctions surharmoniques indéfiniment différentiables (v. chap. II, § 6), dont les laplaciens sont $\leqslant 0$; donc $\Delta f \leqslant 0$.

Réciproquement nous pouvons établir qu'*une distribution T dans un domaine ω de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\Delta T \leqslant 0$ vaut localement le potentiel d'une mesure positive unique*, à l'addition près d'une fonction harmonique.

C'est la forme locale du théorème de représentation de Riesz.

Comme au chapitre I, § 6, on introduit une distribution T_1 à support compact dans $\mathbb{R}^n$, coïncidant avec T dans un ouvert borné ω_1 choisi quelconque tel que $\overline{\omega}_1 \subset \omega$. Or

$$\Delta T_1 = \delta * \Delta T_1 = -\frac{1}{\varphi_n}\Delta h * \Delta T_1 = -\frac{1}{\varphi_n}\Delta(h * \Delta T_1) = \Delta U^{\frac{-\Delta T_1}{\varphi_n}}$$

d'après (IV.3), ainsi $\Delta\left(T_1 - U^{\frac{-\Delta T_1}{\varphi_n}}\right) = 0$. Il résulte alors du chap. I, § 6, que $T_1 - U^{\frac{-\Delta T_1}{\varphi_n}}$ est une fonction harmonique. Or $\Delta T_1 = \Delta T \leqslant 0$ dans ω_1 ; il existe donc une mesure positive μ dans $\mathbb{R}^n$ coïncidant avec $\frac{-\Delta T_1}{\varphi_n}$ dans un ouvert choisi quelconque $\omega_2 \subset \overline{\omega}_2 \subset \omega_1$. La fonction $T_1 - U^{\mu}$ est harmonique dans ω_2, donc il en est de même $T - U^{\mu}$, et on a pu choisir ω_2 relativement compact quelconque dans ω.

L'unicité de la mesure résulte de la formule (IV.3).

© Spartacus-Idh 2019

§ 3. — Fonction de Green dans une boule et potentiel de Green.

Soient $B = B(x_0, R)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ et y un point de B. Désignons par I_{h_y} l'intégrale de Poisson dans B de la restriction de h_y à la sphère B^*.

On appelle fonction de Green relative au pôle y la fonction $G_y = h_y - I_{h_y}$; nous allons déterminer explicitement la forme de G_y.

Soit y_1 l'inverse de y par rapport à la sphère B^* ; y_1 est extérieur à B. La fonction $x \to h(\|y - x_0\|\|x - y_1\|/R)$ est harmonique dans B et égale à h_y sur la sphère B^* ; par suite

$$I_{h_y}(x) = h(\|y - x_0\|\|x - y_1\|/R)$$

pour tout point x de B, et

$$G_y(x) = h(\|x - y\|) - h(\|y - x_0\|\|x - y_1\|/R)$$

G_y est une fonction harmonique > 0 dans $B - \{y\}$ qui s'annule sur B^*.

En utilisant l'expression précédente, on voit que $G_y(x) = G_x(y)$ quels que soient les points x et y de B. On pose $G(x, y) = G(y, x) = G_y(x) = G_x(y)$.

La fonction symétrique $(x, y) \to G(x, y)$ est le noyau de Green de la boule B. On définit G pour x, y quelconques en prenant la valeur 0 quand l'un des points est hors de B.

Remarque. Désignons par G_y^r la fonction de Green de pôle y dans la boule $B(x_0, r)$ de l'espace $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$). On voit que lorsque r croît et tend vers $+\infty$, G_y^r tend en croissant vers h_y.

Potentiel de Green. Pour toute mesure μ sur la boule B, on appelle potentiel de Green de μ ou G^B-potentiel la fonction

$$G\mu : x \to \int G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \qquad (G \text{ noyau de Green de } B)$$

Propriétés.

1. Le potentiel de Green d'une mesure positive μ sur B est $+\infty$ ou surharmonique dans B et alors de mesure associée locale μ.

En effet, au point x le potentiel de Green de μ est la limite de

$$\int_{B_r} G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{B_r} h(\|x-y\|)\,\mathrm{d}\mu(y) - \int_{B_r} I_{h_y}(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

quand le rayon $r < R$ de la boule concentrique $B_r = B(x_0, r)$ tend vers R. La première intégrale du second membre est surharmonique et la seconde est harmonique. Ainsi l'expression est surharmonique, croissante en r, donc la limite est $+\infty$ ou surharmonique (et alors harmonique hors du support de μ).

2. Le potentiel de Green d'une mesure positive μ sur B, s'il est $\not\equiv +\infty$ est surharmonique et sa plus grande minorante harmonique (dans B) est nulle.

Soient μ_1 et μ_2 les restrictions de μ à $B_{R'}$ et $\complement B_{R'}$ $(R' < R)$. Le potentiel $G\mu_1$ s'annule aux points de B^* ; car pour tout R'

$$G(x,y) < \lambda G(x,x_0) \quad \forall x \notin \overline{B}_{R'}, \forall y \in B_{R'}, \qquad \lambda \text{ convenable,}$$

d'après les inégalités de Harnack dans $B_{R'}$.

D'autre part $G\mu_2$ étant $\not\equiv +\infty$, $G\mu_2(x_0)$ est fini et tend vers 0 quand $R' \to R$, donc est $< \varepsilon$ pour une valeur de R' qu'on fixera. Prenons alors les moyennes sur $B^*(x_0, r)$.

La 2e est majorée par $G\mu_2(x_0) < \varepsilon$, la 1re sera $< \varepsilon$ pour $r > \rho$ convenable.

La moyenne de $G\mu$ sera donc $< 2\varepsilon$ pour $r > \rho$, d'où le résultat.

Lemme. *Soit v une fonction surharmonique dans $B(x_0, R)$; désignons par μ la mesure associée ($\mu = -\frac{\Delta v}{\varphi_n}$; cf. § 2). Pour toute boule $B_r = B(x_0, r)$, $r < R$, on a*

$$v(x) = \int G^{B_r}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) + I_v^{B_r}(x) \tag{IV.4}$$

quel que soit le point x de B_r.

En effet, d'après la forme locale du théorème de représentation de Riesz

$$v(x) = \int G^{B_r}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) + \text{fct harmonique } w \text{ dans } B_r$$

Il résulte alors de la propriété **2.** ci-dessus que

$$\lim_{\substack{\rho \to r \\ (\rho < r)}} \mathcal{M}_v^\rho(x_0) = \lim_{\substack{\rho \to r \\ (\rho < r)}} \mathcal{M}_w^\rho(x_0)$$

c'est-à-dire $\mathcal{M}_v^r(x_0) = w(x_0)$.

https://spartacus-idh.com

Comme w est majorée par $I_v^{B_r}$ (plus grande minorante harmonique dans B_r), on en déduit $w = I_v^{B_r}$.

Théorème (de représentation de Riesz, forme globale). *Soit v une fonction surharmonique dans B, de mesure associée $\mu = -\frac{\Delta v}{\varphi_n}$ (forme locale du théorème). Pour que le potentiel de Green de μ dans B soit surharmonique, il faut et il suffit que v admette une minorante harmonique dans B ; dans ce cas on a*

$$v(x) = \int G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) + v^*(x) \tag{IV.5}$$

en tout point de B, v^* désignant la plus grande minorante harmonique de v dans B.

Il suffit de passer à la limite (r tendant vers R) dans (IV.4) (*cf.* chap. II, § 8).

Remarque.

1. On pourrait, en utilisant la solution du problème de Dirichlet dans une couronne, donner la même démonstration que dans le cas général (chap. IX, 3e édition) où l'on étend (IV.5) par d'autres raisonnements.

2. Soit par un raisonnement direct, soit à partir du résultat précédent, on voit que si v est surharmonique dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) et admet une minorante harmonique, on a

$$v(x) = \int h(\|x-y\|)\,\mathrm{d}\mu(y) + v^*(x) = \int \|x-y\|^{2-n}\,\mathrm{d}\mu(y) + v^*(x)$$

(μ mesure associée ; v^* plus grande minorante harmonique de v dans $\mathbb{R}^n$).

Conséquence. Un *potentiel de Green* dans B (ou newtonien dans $\mathbb{R}^n$, ($n \geqslant 3$) de mesure $\geqslant 0$, et non $\equiv +\infty$ est caractérisé comme une fonction surharmonique (dans B ou $\mathbb{R}^n$) dont la plus grande minorante harmonique est 0 [9]. On dira que c'est un vrai potentiel ou brièvement un potentiel (dans B ou $\mathbb{R}^n$).

Une fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorée par un vrai potentiel est un vrai potentiel ; la somme et inf. de deux vrais potentiels sont des vrais potentiels.

Si v est surharmonique $\geqslant 0$ et $\overline{e} \subset B$ ou $\mathbb{R}^n$, $\hat{R}_v^e$ est un vrai potentiel, car si $v = v_1$ (pot) + v_2 (harm), $\hat{R}_{v_1}^e$ et $\hat{R}_{v_2}^e$ majorées resp. par v_1 et $\lambda G(x_0, y)$ (ou $\lambda \|x_0 - y\|^{2-n}$, $n \geqslant 3$) avec λ convenable sont des potentiels.

Noter que l'ordre des mesures annoncées correspond exactement à l'ordre des vrais potentiels où $u \succ v$ signifie $u = v +$ potentiel. Avec cet ordre, l'ensemble des vrais potentiels est réticulé.

§ 4. — Loi de réciprocité.

Soient μ et ν deux mesures positives, U^μ et U^ν leurs h-potentiels respectifs (U^μ et U^ν étant à support compact dans le cas où $n = 2$). On a grâce à la symétrie de h

$$\int U^\mu\,\mathrm{d}\nu = \int U^\nu\,\mathrm{d}\mu.$$

Extension aux potentiels de Green dans B.

(9) Cette propriété servira de définition en théorie axiomatique (Brelot, *Sém. pot.*, 1958).

© Spartacus-Idh 2019

Applications.

a. Soient μ et ν des mesures positives à support compact. Si U^μ est localement borné, U^μ est ν-intégrable.

Par exemple si ν est la mesure-élément de volume sur une variété bornée plongée dans $\mathbb{R}^n$ et de dimension $n-1$, on peut vérifier que son h-potentiel est fini continu donc borné sur tout compact ; il en résulte que U^μ est ν-intégrable quelle que soit la mesure positive μ à support compact.

Pour une variété de dimension $n-2$, on trouverait un vrai potentiel U^ν dans $\mathbb{R}^n$ infini sur elle : *une telle variété est un ensemble polaire.*

b. Soient μ_1, $\mu_2 \geqslant 0$ de supports compacts dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$). Si $U^{\mu_1} \leqslant U^{\mu_2}$, $\|\mu_1\| \leqslant \|\mu_2\|$. Car si ν est une distribution uniforme sur $S(0,R)$ assez grand avec $U^\nu = 1$ dans $B(0,R)$

$$\|\mu_1\| = \int U^\nu \, \mathrm{d}\mu_1 = \int U^{\mu_1} \, \mathrm{d}\nu \leqslant \int U^{\mu_2} \, \mathrm{d}\nu = \int U^\nu \, \mathrm{d}\mu_2 = \|\mu_2\|.$$

Ce résultat s'appelle principe de positivité des masses à cause de sa traduction pour $\mu_1 - \mu_2$ (voir chap. XI).

Ceci s'étend aux G^B-potentiels vrais même pour $n = 2$, et sans restriction de supports compacts.

§ 5. — Continuité d'un potentiel sur le support des masses.

Le résultat suivant, dû à Evans et à Vasilesco (1933), est d'autant plus important qu'il servira d'axiome dans une théorie générale du potentiel (v. chap. VI).

Théorème. *Soit μ une mesure positive dont le support K est compact. Si la restriction V de U^μ à K est continue en un point x_0 de K, U^μ est continu en x_0 (dans l'espace).*

C'est évident si $U^\mu(x_0) = +\infty$. Sinon nous utiliserons le lemme :

Lemme. *Soit μ une mesure positive dont le support K est compact. Soient x un point quelconque de $\mathbb{R}^n$ et y un point de K à distance minima de x. On a*

$$U^\mu(x) \leqslant 2^{n-2} U^\mu(y) \qquad (n \geqslant 3)$$

En effet, pour tout point z de K on a

$$\|x-y\| \leqslant \|x-z\| \quad \text{et} \quad \|y-z\| \leqslant \|x-y\| + \|x-z\| \leqslant 2\|x-z\|$$

ainsi

$$\|x-z\|^{2-n} \leqslant 2^{n-2} \|y-z\|^{2-n}$$

d'où

$$U^\mu(x) \leqslant 2^{2-n} U^\mu(y)$$

en intégrant par rapport à z.

Dans le plan on aurait de même

$$U^\mu(x) \leqslant U^\mu(y) + \|\mu\| \log 2.$$

https://spartacus-idh.com

Considérons alors un point x_0 de K en lequel V est fini continu, et supposons par exemple $n \geqslant 3$. Soit B une boule de centre x_0. Le potentiel de la restriction $\mu_{\complement B}$ de μ à $\complement B$ est continu dans B (il est harmonique).

Soit $\varepsilon > 0$; on peut choisir B assez petite pour que le potentiel en x_0 de la restriction de μ à B soit inférieur à ε. Il existe alors une boule B' de centre x_0 telle que le potentiel de la restriction de μ à B soit inférieur à 2ε en tout point y de $B' \cap K$ (continuité de V).

Soient x un point quelconque et y un point de K à distance minima ; $\|x - x_0\| \leqslant \eta$ entraîne

$$\|y - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x - y\| \leqslant 2\|x - x_0\| \leqslant 2\eta$$

donc si x est assez voisin de x_0, y appartient à B' et le potentiel en x de la restriction μ_B de μ à B est inférieur à $2^{n-2} \times 2\varepsilon = 2^{n-1}\varepsilon$ d'après le lemme.

Comme

$$| U^{\mu}(x) - U^{\mu}(x_0) | \leqslant | U^{\mu_{\complement B}}(x) - U^{\mu_{\complement B}}(x_0) | + | U^{\mu_B}(x) | + | U^{\mu_B}(x_0) |$$

on voit que U^{μ_B} est continu en x_0.

Dans le plan on ferait la démonstration d'une manière analogue.

§ 6. — Transformation de l'espace.

Soient E et F deux compacts de $\mathbb{R}^n$. Si μ est une mesure $\geqslant 0$ sur E et si φ est une application μ-mesurable de E dans F, désignons par ν l'image de μ par φ ($\nu(e) = \mu(\varphi^{-1}(e))$, e borélien).

a. Si φ est contractante, $U^{\nu}(\varphi(x)) \geqslant U^{\mu}(x)$ quel que soit $x \in E$.

b. Supposons que pour tout y invariant, c'est-à-dire tel que $y = \varphi(y)$, on ait quel que soit $x \in E$

$$\|\varphi(x) - y\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Alors pour $\mathbb{R}^n$, ($n \geqslant 3$),

$$U^{\nu}(y) \geqslant \frac{1}{k^{n-2}} U^{\mu}(y)$$

pour $\mathbb{R}^2$,

$$U^{\nu}(y) \geqslant U^{\mu} + \left(\log \frac{1}{k}\right)\|\mu\|.$$

Un cas particulier de ***b***. est une projection borélienne de E dans F, c'est-à-dire une application borélienne qui à un point x de E fait correspondre un point de F à distance minima de x. Il en existe toujours d'après Choquet. Notons que c'est évident si F est convexe (p. ex. une variété linéaire) car il n'y a qu'un point à distance minima, la projection étant d'ailleurs alors contractante ; c'est élémentaire aussi si F est formé p. ex. d'un nombre fini de boules fermées.

Un autre exemple de ***a***. est le rabattement φ du plan $\mathbb{R}^2$ sur une demi-droite (application qui au point de coordonnées polaires $r \geqslant 0$ et θ fait correspondre le point de coordonnées r et 0). Si ν est l'image par φ d'une mesure $\mu \geqslant 0$ portée par un compact, on a $U^{\nu}(\varphi(x)) \geqslant U^{\mu}(x)$ pour tout x et $U^{\nu}(0) = U^{\mu}(0)$.

© Spartacus-Idh 2019

Applications.

1. Une application borélienne contractante d'un ensemble polaire donne un ensemble polaire.

2. Soient E polaire borné et $\mu \geqslant 0$ à support compact dont le potentiel est $+\infty$ sur E. En faisant une projection borélienne [10] de ce compact sur E, on obtient comme image de μ une mesure portée par $\overline{E}$, de h-potentiel infini sur E (résultat dû à Evans et Selberg indépendamment [11] dans le cas de E compact). Choquet a même démontré que si E est l'ensemble des infinis d'un potentiel (ce qui équivaut à dire, d'après Deny, que E est un G_δ polaire), il existe une mesure positive portée par E dont le potentiel est infini en tout point de E et fini dans $\complement E$ (*C.R.* 1957, p. 1707).

Remarque. D'après le résultat d'Evans, toute mesure positive $\mu \neq 0$ sur un compact polaire E a un h-potentiel non borné sur E, car si U^μ était borné sur E, soit ν une mesure $\geqslant 0$ sur E dont le h-potentiel est infini en tout point de E ; comme $\int U^\mu \, d\nu = \int U^\nu \, d\mu$, on est conduit à une contradiction.

On en déduit que U^μ est $+\infty$ en un point de E ; sinon soit μ_n la restriction de μ au compact de E où $U^\mu \leqslant n$. On aurait U^{μ_n} bornée sur le support fermé polaire de μ_n d'où $\mu_n = 0$ puis $\mu \leqslant \Sigma_n \mu_n = 0$.

Corollaire. *Si pour une mesure positive μ, un ensemble polaire est de mesure intérieure $\neq 0$, U^μ vaut $+\infty$ en un point de cet ensemble.*

Bibliographie

F. Riesz, T. Rado	mentionnés au chapitre II.
L. Schwartz	Théorie des distributions. *Act. Sc.* N^{os} 1091 ou 1245 et 1122.
G. C. Evans	*Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 37 et 38.
F. Vasilesco	*Act. Sc.*, n^o 660. Hermann.
M. Brelot	*J. de Math.*, 1940.
H. Selberg	*Avh. Norske Vid. Akad. Oslo (Math)* 1937.
N. Landkoff	(ouvrage cité en appendice) On y approfondit les potentiels de M. Riesz d'ordre α c'est-à-dire de noyau $\|x-y\|^{\alpha-n}$ dans $\mathbb{R}^n$, ($\alpha < n$) avec grand usage de convolutions et distributions.

(10) Si l'on veut éviter le théorème d'existence d'une telle projection, on se servira du cas particulier des réunions de boules fermées. Si A_ρ est une réunion finie de boules fermées concentrées sur $\overline{E}$ et de rayon ρ, et dont les boules concentriques de rayon $\rho/2$ couvrent $\overline{E}$, on projette sur A_ρ les masses extérieures de μ et on remplace les masses venues sur chaque sphère par une masse ponctuelle égale au centre (en ne considérant qu'une fois les masses sur l'intersection de deux sphères). On recommence avec un autre $A_{\rho/2} \subset A_\rho$ et les masses de μ portées par $\overline{A}_\rho - \overline{A}_{\rho/2}$ d'où de nouvelles masses ponctuelles sur E, etc. La réunion de ces masses ponctuelles et des masses initiales répond à la question.

(11) Dans le langage des capacités (v. chap. V).

https://spartacus-idh.com

CAPACITÉS CLASSIQUES ET GÉNÉRALES

Première partie : capacités classiques (de Green) dans une boule.

§ 1. — Potentiel capacitaire et capacité d'un compact.

Soit un compact K dans une boule $B(x_0, R)$ ou B de $\mathbb{R}^n$. Étudions dans cette boule la réduite R_1^K notée W_K (enveloppe inférieure de la famille Φ_K des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ majorant 1 sur K). Elle est surmédiane (et $S_{\mathcal{B}}$-fonction) et sa régularisée dite balayée $\hat{R}_1^K$ sera notée V_K.

Ces fonctions sont harmoniques dans $B - K$ (chap. II, § 10) et s'annulent aux points de B^* car $G_{x_0}^B$ admet un minimum $\lambda > 0$ sur K et $G_{x_0}/\lambda \in \Phi_K$.

Donc V_K est un potentiel de Green de mesure $\geqslant 0$ portée par K, majoré par 1 dans B ; et c'est le plus grand satisfaisant à ces conditions [12].

Car si u est un tel potentiel, étudions-le dans $B - K$; sa lim.sup. à la frontière est 0 sur B^*, $\leqslant 1$ sur K^* ; or si $v \in \Phi_K$, v sur $B - K$ admet à la frontière une lim.inf. $\geqslant 0$ sur B^*, $\geqslant 1$ sur K^*. Donc $u \leqslant v$ dans $B - K$ puis dans B, d'où $u \leqslant R_1^K$, $u \leqslant V_K$.

Définitions. *V_K sera dit potentiel capacitaire de K (dans B), sa mesure associée μ mesure ou distribution capacitaire et le total $\|\mu\|$ la capacité de K.*

Remarque.

a. V_K est aussi la régularisée du Inf. des potentiels majorant 1 sur K (puisque si $u \in \Phi_K$, $u \geqslant R_u^{B(x_0,r)}$, $(B(x_0, r) \supset K)$ qui est un potentiel). C'est même la régularisée de la limite d'une suite convenable décroissante de tels potentiels, harmoniques dans $B - B(x_0, r)$ (v. chap. I, § 2).

b. V_K vaut 1 dans l'intérieur $\mathring{K}$ de K et presque partout sur K, ce qui sera amélioré plus loin (en quasi-partout).

c. Si on remplace K par le complémentaire de la composante connexe de $B - K$ dont la frontière contient B^*, on ne change pas la famille Φ_K, ni W_K, ni V_K.

(12) Il est en fait équivalent de supposer le G^B-potentiel $\leqslant 1$ seulement sur K, comme il résultera du principe du maximum de Maria-Frostman (v. chap. IX, § 5).

© Spartacus-Idh 2019

§ 2. — Propriétés de la capacité et du potentiel capacitaire.

1. Propriétés de W_K et V_K

a. L'application $K \to W_K$ est croissante, c'est-à-dire que si K et K' sont deux compacts de B, $K \subset K'$ entraîne $W_K \leqslant W'_K$; on en déduit que $K \to V_K$ est aussi croissante.

b. L'application $K \to W_K$ est « continue à droite ».

Autrement dit, x étant fixé, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un ouvert ω contenant K tel que, pour tout compact K' satisfaisant à $K \subset K' \subset \omega$, on ait

$$W_{K'}(x) - W_K(x) < \varepsilon.$$

D'abord cela équivaut à ce que pour toute suite décroissante de compacts K_n, $W_{K_n} \to W_{\cap_n K_n}$; cette propriété est évidemment conséquence de l'autre ; et réciproquement si l'autre n'était pas vraie, on formerait (à l'aide d'une suite d'ouverts $\omega_n \supset \overline{\omega}_{n+1}$, $\cap_n \omega_n = K$) une suite décroissante de compacts K_n d'intersection K, tels que $W_{K_n}(x) \geqslant W_K(x) + \varepsilon$.

Mais alors, pour établir la propriété de limite de W_{K_n}, on remarque que $\lim_n W_{K_n}$ est surmédiane, harmonique dans $B - K$, égale à 1 sur K et s'annule sur B^* d'où $\widehat{\lim_n W_{K_n}} \leqslant V_K$; comme $\lim_n W_{K_n} \geqslant W_K$, on conclut $\widehat{\lim_n W_{K_n}} = V_K$, et en considérant séparément les points de K et de $\complement K$, $\lim_n W_{K_n} = W_K$.

c. Quels que soient les compacts K_1 et K_2 dans B, on a

$$W_{K_1 \cup K_2} + W_{K_1 \cap K_2} \leqslant W_{K_1} + W_{K_2}$$

d'où la même inégalité pour les V (propriété de *sous additivité forte*).

L'inégalité se vérifie aussitôt en un point de K_1 ou de K_2 puisque $W_{K_1 \cap K_2}$ minore W_{K_1} et W_{K_2}. Pour voir l'inégalité dans $B - (K_1 \cup K_2)$, remarquons que les W sont semi-continues supérieurement, d'où pour $x \in B - (K_1 \cup K_2)$, $y \in (K_1 \cup K_2)^*$

$$\limsup_{x \to y} (W_{K_1 \cup K_2}(x) + W_{K_1 \cap K_2}(x)) \leqslant W_{K_1 \cup K_2}(y) + W_{K_1 \cap K_2}(y) \leqslant W_{K_1}(y) + W_{K_2}(y).$$

De sorte que si v_1 et v_2 sont surharmoniques $\geqslant 0$ majorant 1 sur K_1 et K_2 respectivement, le membre de gauche est majoré par $v_1(y) + v_2(y)$ et il s'ensuit par le principe du maximum dans $B - (K_1 \cup K_2)$

$$W_{K_1 \cup K_2} + W_{K_1 \cap K_2} \leqslant v_1 + v_2,$$

d'où le résultat.

2. Propriétés de la capacité $C(K)$

De ce qui précède, nous allons déduire des propriétés analogues de la capacité en utilisant l'inégalité des masses totales d'après celle des potentiels (mesures $\geqslant 0$ à supports compacts dans B et potentiels de Green) (chap. IV, § 4, ***b***).

On pourrait d'ailleurs dans ce cas très simple de la boule, utiliser le flux du G^B-potentiel à travers B^* vers l'intérieur, flux d'ailleurs égal à celui du h-potentiel de μ (à support compact) et valant $\varphi_n \mu(B)$. D'après cela :

La capacité de K est la borne supérieure des $\mu(K)$ pour les mesures positives portées par K dont le potentiel de Green est $\leqslant 1$.

Soit en utilisant cette propriété caractéristique, soit à partir de la définition, on voit que pour qu'un compact K soit de capacité nulle, il faut et il suffit que toute mesure positive $\mu \neq 0$ sur K ait un potentiel non borné.

https://spartacus-idh.com

On obtient aussi immédiatement les propriétés suivantes :

1. Croissance. Si K et K' sont deux compacts inclus dans B, $K \subset K'$ entraîne $\mathcal{C}(K) \leqslant \mathcal{C}(K')$.

2. Continuité à droite. Expression analogue à celle de plus haut, équivalant encore à ce que, si (K_n) est une suite décroissante de compacts de B dont l'intersection est un compact non vide $K = \cap_n K_n$, on a

$$\mathcal{C}(K) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}(K_n).$$

Car en utilisant $B' \supset K_n$, les distributions capacitaires μ_n et μ de K_n et K, et la mesure ν unitaire et uniforme sur $S(x_0, r)$, $(B(x_0, r) \supset K)$ on obtient

$$\mathcal{C}(K_n) = \int G\nu \,\mathrm{d}\mu_n = \int G\mu_n \,\mathrm{d}\nu \to \int W_K \,\mathrm{d}\nu = \int G\mu \,\mathrm{d}\nu = \mathcal{C}(K)$$

car ν ne charge que $B - K$ où $W_K = G\mu$. (On peut aussi utiliser le flux à travers B').

3. Sous-additivité forte. Quels que soient les compacts K_1 et K_2 de B, on a l'inégalité

$$\mathcal{C}(K_1 \cup K_2) + \mathcal{C}(K_1 \cap K_2) \leqslant \mathcal{C}(K_1) + \mathcal{C}(K_2).$$

La propriété **2**. permet aussi de voir que

La capacité de K est la borne inférieure des $\mu(B)$ pour $\mu \geq 0$ dont le potentiel de Green majore 1 *sur K.*

L'inégalité résulte de celle d'un tel potentiel et de V_K et il suffit d'introduire K_n décroissant ($\mathring{K}_n \supset K, \cap_n K_n = K$) et de considérer le potentiel capacitaire de K_n. Il est analogue d'utiliser la remarque ***a***., fin du § 1.

Cette seconde propriété caractéristique de la capacité qui remonte à (Brelot, *J. de Math.*, 1945) a été mise en relief dans des conditions axiomatiques générales sous le nom d'encombrement (Choquet) puis de contenance (Fuglede) (v. bibliogr.).

§ 3. — Capacité des ensembles quelconques.

Définitions. Capacité intérieure : $\mathcal{C}_*(e) = \sup_K \mathcal{C}(K)$ pour les compacts $K \subset e$.

Capacité extérieure : $\mathcal{C}^*(e) = \inf_\omega \mathcal{C}_*(\omega)$ pour les ouverts $\omega \supset e$.

Propriétés immédiates.

a. Elles sont croissantes en e ;

b. elles sont égales si e est ouvert ; de même si K est un compact et elles valent alors $\mathcal{C}(K)$.

Car pour $\varepsilon > 0$, il existe ω_0 ouvert $\supset K$ tel que $K \subset K' \subset \omega_0$ entraîne

$$\mathcal{C}(K') \leqslant \mathcal{C}(K) + \varepsilon \qquad \text{donc} \qquad \mathcal{C}_*(\omega_0) \leqslant \mathcal{C}(K) + \varepsilon.$$

Alors

$$\mathcal{C}(K) \leqslant \mathcal{C}^*(K) = \inf_{\omega \supset K} \mathcal{C}_*(\omega) \leqslant \mathcal{C}(K) + \varepsilon.$$

En cas d'égalité, la valeur commune des capacités peut être notée $\mathcal{C}(e)$.

c. Si ω_n est une suite croissante d'ouverts, $\mathcal{C}(\omega_n) \to \mathcal{C}(\cup_n \omega_n)$.

Car tout compact de $\cup_n \omega_n$ est contenu dans $\cup_1^p \omega_n$ pour p assez grand.

© Spartacus-Idh 2019

d. $\mathcal{C}(\omega)$ pour ω ouvert est sous additive et même dénombrablement sous additive. Extension à $\mathcal{C}(e)$ pour e quelconque.

Pour des ouverts, tout compact K dans $\omega_1 \cup \omega_2$ est la réunion de compacts $K_1 \subset \omega_1$ et $K_2 \subset \omega_2$. Il suffit de considérer $K_1 \setminus \omega_2$, $K_2 \setminus \omega_1$, des ouverts disjoints les contenant et leurs complémentaires sur K. D'où la sous additivité finie, puis dénombrable grâce à ***c***.

Pour des e_n quelconques, on introduit ω_n ouvert $\supset e_n$ tel que

$$\mathcal{C}(\omega_n) \leqslant \mathcal{C}^*(e_n) + \varepsilon 2^{-n}$$

d'où

$$\mathcal{C}^*(\cup_n e_n) \leqslant \mathcal{C}(\cup_n \omega_n) \leqslant \sum_n \mathcal{C}(e_n) \leqslant \sum_n \mathcal{C}^*(e_n) + \varepsilon.$$

e. Caractérisation générale.

Théorème. *Si $\bar{e} \subset B$, $\mathcal{C}^*(e)$ vaut le total (norme) $\|\mu\|$ de la mesure associée au potentiel $\hat{R}_1^e$.*

C'est vrai d'après la définition si e est compact. Si e est ouvert, soit (K_i) la famille des compacts contenus dans e. D'une part $\sup_i \mathcal{C}(K_i) = \mathcal{C}_*(e)$; d'autre part $\sup_i \hat{R}_1^{K_i}$ est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorant 1 sur e, donc majorant R_1^e, puis $\hat{R}_1^e$ qu'il minore *a priori* ; il vaut donc $\hat{R}_1^e$. D'où le résultat à l'aide du flux ou comme suit : si ν est la distribution uniforme sur la sphère B'^* concentrique (boule $B \supset \overline{B}' \supset B' \supset e$) de potentiel 1 dans B', et μ_i la mesure associée à $\hat{R}_1^{K_i}$, $\int \hat{R}_1^{K_i} \, d\nu = \int G\nu \, d\mu_i = \|\mu_i\|$ a comme borne supérieure $\int \hat{R}_1^e \, d\nu = \int G\nu \, d\mu = \|\mu\|$ vu la continuité de $\hat{R}_1^{K_i}$ sur B'^*. On peut d'ailleurs utiliser une suite croissante extraite de la famille (K_i).

Soit enfin e quelconque ($\bar{e} \subset B$).

Pour l'ordonné filtrant (ω_i) des ouverts contenant e, on a $\hat{R}_1^{\omega_i} \to \hat{R}_1^e$ hors de $\bar{e}$, d'où, comme précédemment, le passage à la limite sur la norme de la mesure associée.

La limite de la norme correspondant à $\hat{R}_1^{\omega_i}$ est $\mathcal{C}^*(e)$ et vaut d'autre part la norme de la mesure associée à $\hat{R}_1^e$.

Théorème (Cartan). *Dans la boule B les ensembles polaires (ce qui équivaut à localement polaires) sont identiques aux ensembles de capacité extérieure nulle (ce qui équivaut à ce que leur intersection avec un voisinage de tout point soit de capacité extérieure nulle).*

Si $e \cap \omega$ est de capacité extérieure nulle pour un voisinage $\omega \subset \overline{\omega} \subset B$ de tout $x \in B$, on peut couvrir B par un ensemble dénombrable d'ouverts ω_n contenus chacun dans l'un de ces ω et d'après la sous additivité de la capacité extérieure

$$\mathcal{C}^*(e) \leqslant \sum_n \mathcal{C}^*(e \cap \omega_n) = 0.$$

Il suffit donc de voir que la polarité de $e \cap \omega$ dans B équivaut à la nullité de $\mathcal{C}^*(e \cap \omega)$. Cela résulte de ce que les deux propriétés équivalent à $\hat{R}_1^{e \cap \omega} = 0$.

Il est intéressant de démontrer directement l'équivalence des propriétés globales, en vue par exemple de généralisations différentes. (Voir Cartan et les éditions 1re et 2e de ce cours).

https://spartacus-idh.com

Remarque. On trouvera des compléments dans la théorie générale qui suit. Soulignons que la théorie précédente a été faite (surtout dans un but local) dans une boule de façon à être valable dans le plan et à préparer une extension à des cas plus généraux comme celui d'un domaine borné (voir plus loin) et même d'un « espace de Green »[13], variété analogue aux surfaces de Riemann où existe essentiellement une fonction de Green ; mais elle est déjà *immédiatement adaptable à l'espace euclidien* à $n \geqslant 3$ dimensions, où la fonction de Green est remplacée par $h : (x, y) \to \|x - y\|^{2-n}$.

Deuxième partie : capacités de Choquet

§ 4. — Définition d'une capacité générale.

Soit Ω un espace topologique séparé ; désignons par $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes de Ω. On appellera *capacité de Choquet dans* Ω *une fonction numérique finie* $X \to \mathcal{C}(X)$ *définie dans* $\mathcal{K}$ *et vérifiant les trois axiomes suivants* :

1. *Croissance* :
Quels que soient les compacts X, Y, $X \subset Y$ entraîne $\mathcal{C}(X) \leqslant \mathcal{C}(Y)$.

2. *Continuité à droite* :
Quel que soit le compact X, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert ω de X tel que $Y \in \mathcal{K}$ et $X \subset Y \subset \omega$ entraînent $\mathcal{C}(Y) - \mathcal{C}(X) \leqslant \varepsilon$.
Il s'ensuit comme au § 2 le résultat suivant : Pour toute suite décroissante X_n de compacts, on a

$$\mathcal{C}\Big(\bigcap_n X_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}(X_n) = \inf_n \mathcal{C}(X_n).$$

Mais en général cette propriété n'est pas équivalente à l'axiome de continuité à droite. On aura d'importantes propriétés en ajoutant

3. *Sous-additivité forte* : Quels que soient les compacts X et Y, on a

$$\mathcal{C}(X \cup Y) + \mathcal{C}(X \cap Y) \leqslant \mathcal{C}(X) + \mathcal{C}(Y).$$

Exemple. Nous en avons, à côté des mesures positives de Radon, deux exemples importants :

1. La capacité de Green dans une boule B.

2. Pour tout point $x \in B$, la fonction $K \to W_K(x)$ (K compact de B).

On remarquera que lorsque K varie en restant contenu dans un compact de $B - \{x\}$, $\mathcal{C}(K)$ et $W_K(x)$ (ou $V_K(x)$) s'annulent simultanément et quand ils ne sont pas nuls leur rapport reste compris entre deux nombres > 0.

(13) Voir des indications à la page de conclusion.

© Spartacus-Idh 2019

§ 5. — Différences successives.

Soient X et A_1, A_2, …, A_n, … des compacts de Ω. Posons

$$V_1(X; A_1) = \mathcal{C}(X) - \mathcal{C}(X \cup A_1)$$
$$V_2(X; A_1, A_2) = V_1(X; A_1) - V_1(X \cup A_2; A_1)$$
$$V_{n+1}(X; A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}) = V_n(X; A_1, \ldots, A_n) - V_n(X \cup A_{n+1}; A_1, \ldots, A_n)$$

Si $V_{n+1}(X; A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}) \leqslant 0$ quel que soit le compact A_{n+1}, on a en particulier pour $A_{n+1} = A_n$

$$V_n(X; A_1, \ldots, A_n) \leqslant V_n(X \cup A_n; A_1, \ldots, A_n) = 0.$$

On voit donc que si $V_n(X; A_1, \ldots, A_n) = 0$ quels que soient les compacts $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on a $V_i(X; A_1, \ldots, A_i) \leqslant 0$ pour tout $i \leqslant n$ (et quels que soient les compacts $A_1, A_2, \ldots, A_i$; récurrence sur n).

L'axiome 1 des capacités (croissance) équivaut évidemment à

« quels que soient les compacts X et A_1, on a $V_1(X; A_1) \leqslant 0$ ».

Nous allons voir que la conjonction des axiomes 1 et 3 (croissance et sous-additivité forte) équivaut à

« quels que soient les compacts X,A_1,A_2, on a $V_2(X; A_1, A_2) \leqslant 0$ ».

Si l'axiome 3 est vérifié, on a, en remplaçant X par $X \cup A_1$ et Y par $X \cup A_2$,

$$\mathcal{C}((X \cup A_1) \cap (X \cup A_2)) + \mathcal{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathcal{C}(X \cup A_1) + \mathcal{C}(X \cup A_2)$$

soit

$$\mathcal{C}(X \cup (A_1 \cap A_2)) + \mathcal{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathcal{C}(X \cup A_1) + \mathcal{C}(X \cup A_2).$$

Si de plus l'axiome 1 est vrai

$$\mathcal{C}(X \cup (A_1 \cap A_2)) \geqslant \mathcal{C}(X)$$

d'où

$$\mathcal{C}(X) + \mathcal{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathcal{C}(X \cup A_1) + \mathcal{C}(X \cup A_2)$$

c'est-à-dire

$$V_2(X; A_1, A_2) \leqslant 0.$$

Inversement, supposons que $V_2(X; A_1, A_2) \leqslant 0$ quels que soient les compacts X, A_1, A_2, soit

$$\mathcal{C}(X) + \mathcal{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathcal{C}(X \cup A_1) + \mathcal{C}(X \cup A_2).$$

En posant $X = A \cap B$, $A_1 = A$, $A_2 = B$ (A et B compacts donnés), on obtient

$$\mathcal{C}(A \cap B) + \mathcal{C}(A \cup B) \leqslant \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$$

de sorte que l'axiome 3 est vérifié. De plus on a vu que l'hypothèse entraîne $V_1(X; A_1) \leqslant 0$ quels que soient les compacts X et A_1, ce qui est équivalent à l'axiome 1. On peut donc remplacer le système d'axiome 1, 2, 3, énoncé plus haut par le système suivant :

https://spartacus-idh.com

α. Axiome 2 (Continuité à droite).

β. Quels que soient les compacts X, A_1, A_2, on a $V_2(X; A_1, A_2) \leqslant 0$.

On aurait un système d'axiomes plus fort en remplaçant les axiomes 1 et 3 par celui-ci : « Pour tous compacts X, A_1,..., A_n on a $V_n(X; A_1, \ldots, A_n) \leqslant 0$ » (n fixé $\geqslant 2$). Car cela entraîne $V_p(X; A_1, \ldots, A_p) \leqslant 0$ pour tout $p \leqslant n$.

Si $\mathcal{C}$ vérifie l'axiome de continuité à droite et $V_n \leqslant 0$, on dit que c'est une capacité alternée d'ordre n ; si $\mathcal{C}$ est une capacité alternée d'ordre n pour tout entier n, on dit que c'est une capacité alternée d'ordre infini. C'est d'ailleurs le cas des exemples (fin § 4).

Autre forme des axiomes d'inégalité. Les énoncés suivants sont équivalents :

a. Quels que soient les compacts X, A_1, A_2 on a $V_2(X; A_1, A_2) \leqslant 0$.

b. Quels que soient les compacts A, K et le compact $a \subset A$, on a

$$\mathcal{C}(A \cup K) - \mathcal{C}(A) \leqslant \mathcal{C}(a \cup K) - \mathcal{C}(a)$$

ou

$$\mathcal{C}(A \cup K) + \mathcal{C}(a) \leqslant \mathcal{C}(a \cup K) + \mathcal{C}(A).$$

En effet, ***a*** s'écrit

$$\mathcal{C}(X) + \mathcal{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathcal{C}(X \cup A_1) + \mathcal{C}(X \cup A_2)$$

d'où, en prenant $A_1 = A$, $X = a \subset A$ et $A_2 = K$,

$$\mathcal{C}(a) + \mathcal{C}(A \cup K) \leqslant \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(a \cup K).$$

Inversement, si cette dernière inégalité est vraie quels que soient A, K et $a \subset A$ (compacts) on a, en $a = X$, $A = X \cup A_1$ et $K = A_2$

$$\mathcal{C}(X) + \mathcal{C}(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant \mathcal{C}(X \cup A_1) + \mathcal{C}(X \cup A_2)$$

c'est-à-dire

$$V_2(X; A_1, A_2) \leqslant 0.$$

Application. L'axiome $V_2(X; A_1, A_2) \leqslant 0$ pour tous compacts X, A_1, A_2 entraîne

« Quelles que soient les familles finies $(A_i)_{i \in I}$ et $(a_i)_{i \in I}$ de compacts tels que $a_i \subset A_i$ pour tout i, on a

$$\mathcal{C}\Big(\bigcup_i A_i\Big) - \mathcal{C}\Big(\bigcup_i a_i\Big) \leqslant \sum_i [\mathcal{C}(A_i) - \mathcal{C}(a_i)]$$

ou

$$\mathcal{C}\Big(\bigcup_i A_i\Big) + \sum_i \mathcal{C}(a_i) \leqslant \mathcal{C}\Big(\bigcup_i a_i\Big) + \sum_i \mathcal{C}(A_i). \qquad »$$

En effet, si d'abord $I = \{1, 2\}$, on a d'après la propriété précédente

$$\mathcal{C}(A_1 \cup A_2) + \mathcal{C}(a_1) \leqslant \mathcal{C}(a_1 \cup A_2) + \mathcal{C}(A_1)$$

$$\mathcal{C}(A_2 \cup a_1) + \mathcal{C}(a_2) \leqslant \mathcal{C}(a_1 \cup a_2) + \mathcal{C}(A_2)$$

© Spartacus-Idh 2019

d'où le résultat cherché par addition. On obtient l'inégalité générale par récurrence, en supposant l'inégalité pour $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ et en appliquant l'inégalité du cas particulier à $\bigcup_1^n A_i$, A_{n+1}, $\bigcup_1^n a_i$ et a_{n+1}.

§ 6. — Capacité intérieure d'un ensemble.

Soit A une partie quelconque de l'espace Ω ; on appelle *capacité intérieure* $\mathcal{C}_*(A)$ de A la borne supérieure des capacités des compacts contenus dans A :

$$\mathcal{C}_*(A) = \sup_{K \subset A} \mathcal{C}(K).$$

Pour tout compact K, on a $\mathcal{C}_*(K) = \mathcal{C}(K)$.

Lemme. *Soient ω_1, ω_2 ouverts et un compact $K \subset \omega_1 \cup \omega_2$. Il existe des compacts $K_1 \subset \omega_1$ et $K_2 \subset \omega_2$ tels que $K = K_1 \cup K_2$.*

En effet, les ensembles $K - K \cap \omega_1$ et $K - K \cap \omega_2$ sont fermés disjoints. Ils possèdent dans l'espace normal K des voisinages ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2. On voit alors que les compacts $K - \Omega_1$ et $K - \Omega_2$ répondent aux conditions.

Propriété. *Quelles que soient les familles finies d'ouverts (A_i) et (a_i) tels que $a_i \subset A_i$ pour tout i, on a*

$$\mathcal{C}_*\Big(\bigcup_i A_i\Big) + \sum_i \mathcal{C}_*(a_i) \leqslant \mathcal{C}_*\Big(\bigcup_i a_i\Big) + \sum_i \mathcal{C}_*(A_i)$$

(les capacités considérées pouvant être égales à $+\infty$).

Lorsque $I = \{1, 2\}$, introduisons des nombres finis quelconques λ_i, Λ_i, θ respectivement inférieurs à $\mathcal{C}_*(a_i)$, $\mathcal{C}_*(A_i)$, $\mathcal{C}_*(A_1 \cup A_2)$ et des compacts γ_i, Γ_i, K contenus dans a_i, A_i, $A_1 \cup A_2$ et tels que

$$\mathcal{C}(\gamma_i) > \lambda_i, \qquad \mathcal{C}(\Gamma_i) > \Lambda_i, \qquad \mathcal{C}(K) > \theta.$$

On peut, grâce au lemme, les agrandir de sorte que, avec les mêmes notations, on ait en outre $\gamma_i \subset \Gamma_i$, $K = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. De

$$\mathcal{C}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) + \mathcal{C}(\gamma_1) + \mathcal{C}(\gamma_2) \leqslant \mathcal{C}(\gamma_1 \cup \gamma_2) + \mathcal{C}(\Gamma_1) + \mathcal{C}(\Gamma_2)$$

résulte

$$\theta + \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mathcal{C}_*(a_1 \cup a_2) + \mathcal{C}_*(A_1) + \mathcal{C}_*(A_2)$$

d'où l'inégalité cherchée.

On passe au cas général par récurrence : on suppose l'inégalité pour $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ et on utilise l'inégalité du cas initial pour $\bigcup_1^n A_i$, A_{n+1}, $\bigcup_1^n a_i$ et a_{n+1}.

Si $\mathcal{C}_*(\bigcup_1^n A_i)$ est fini, de même $\mathcal{C}_*(\bigcup_1^n a_i)$, et l'inégalité pour $n+1$ indices s'obtient par addition membre à membre des deux inégalités et simplifications.

Sinon $\mathcal{C}_*(\bigcup_1^n a_i) + \sum_1^n \mathcal{C}_*(A_i)$ est infini, donc aussi $\mathcal{C}_*(\bigcup_1^{n+1} A_i) + \sum_1^{n+1} \mathcal{C}_*(a_i)$ et l'inégalité cherchée est encore satisfaite.

https://spartacus-idh.com

§ 7. — Capacité extérieure.

Pour toute partie A de Ω on appelle capacité extérieure $\mathcal{C}^*(A)$ de A, la borne inférieure des capacités intérieures des ouverts qui la contiennent

$$\mathcal{C}^*(A) = \inf_{\omega \supset A} \mathcal{C}_*(\omega).$$

La capacité intérieure étant croissante, on a $\mathcal{C}^*(\omega) = \mathcal{C}_*(\omega)$ pour tout ouvert ω. On voit, comme au § 3, que $\mathcal{C}^*(K) = \mathcal{C}_*(K)$ pour tout compact K. On dit que A est capacitable si $\mathcal{C}^*(A) = \mathcal{C}_*(A)$, la valeur commune est aussi notée $\mathcal{C}(A)$. C'est le cas des ouverts et des compacts.

Propriété. *Quelles que soient les familles finies $(A_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in I}$ de parties, telles que $a_i \subset A_i$ pour tout i, on a*

$$\mathcal{C}^*\Big(\bigcup_i A_i\Big) + \sum_i \mathcal{C}^*(a_i) \leqslant \mathcal{C}^*\Big(\bigcup_i a_i\Big) + \sum_i \mathcal{C}^*(A_i).$$

Si le membre de droite est fini, on l'approche arbitrairement par

$$\mathcal{C}(\omega) + \sum_i \mathcal{C}(\Omega_i) = \lambda$$

où ω, Ω_i sont des ouverts convenables contenant respectivement $\bigcup_i a_i$ et les A_i. Choisissons des ouverts $\omega_i \subset \omega \cap \Omega_i$ et contenant a_i. On voit que λ majore $\mathcal{C}(\bigcup_i \omega_i) + \sum_i \mathcal{C}(\Omega_i)$ donc $\mathcal{C}(\bigcup_i \Omega_i) + \sum_i \mathcal{C}(\omega_i)$ et par suite le membre de gauche de l'inégalité à démontrer.

Théorème. *Pour toute suite croissante α_n de parties de Ω, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}^*(\alpha_n) = \mathcal{C}^*\Big(\bigcup_n \alpha_n\Big).$$

Démontrons-le d'abord lorsque les α_n sont ouverts. Posons $\alpha = \bigcup_n \alpha_n$. Soit λ un nombre strictement inférieur à $\mathcal{C}(\alpha)$; il existe un compact K contenu dans α tel que $\mathcal{C}(K) \geqslant \lambda$. Ensuite (α_n) est un recouvrement ouvert croissant de K, donc il existe un entier n_0 tel que $K \subset \alpha_n$ pour $n \geqslant n_0$ et par suite $\mathcal{C}(\omega_n) \geqslant \mathcal{C}(K) \geqslant \lambda$. Il en résulte bien que $\mathcal{C}(\alpha) = \lim_n \mathcal{C}(\alpha_n)$.

Supposons maintenant les α_n quelconques. Le théorème est évident si $\mathcal{C}(\alpha_n) = +\infty$ pour n assez grand ; supposons donc les $\mathcal{C}(\alpha_n)$ finis. Introduisons une suite de nombres $\varepsilon_n > 0$ tels que $\sum_n \varepsilon_n = \varepsilon$. Il existe pour tout n un ouvert $\omega'_n \supset \alpha_n$ tel que $\mathcal{C}(\omega'_n) - \mathcal{C}^*(\alpha_n) \leqslant \varepsilon_n$; on a $\mathcal{C}(\bigcup_{n=1}^p \omega'_n) \leqslant \mathcal{C}^*(\bigcup_{n=1}^p \alpha_n) + \sum_{n=1}^p \varepsilon_n$ d'où, en faisant tendre p vers l'infini

$$\mathcal{C}\Big(\bigcup_n \omega'_n\Big) \leqslant \lim_n \mathcal{C}^*(\alpha_n) + \varepsilon$$

et par suite $\mathcal{C}^*(\alpha) \leqslant \lim_n \mathcal{C}^*(\alpha_n) + \varepsilon$ (que $\mathcal{C}^*(\alpha)$ soit fini ou non). On conclut aussitôt dans les deux cas.

© Spartacus-Idh 2019

§ 8. — Capacitabilité.

Ensembles K-analytiques. Soit Ω un espace topologique séparé ; on dit qu'une partie A de Ω est un ensemble K-analytique si c'est l'image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ contenu dans un espace compact (14).

Cette définition généralise la définition classique d'un ensemble analytique comme image continue métrisable d'un espace polonais (métrique complet à base dénombrable), qui, comme on sait est homéomorphe à un G_δ contenu dans un espace métrique compact. Car dans un espace métrique compact, tout G_δ est un $K_{\sigma\delta}$. De sorte qu'un ensemble analytique classique est bien K-analytique.

Rappelons que dans un espace polonais, tout ensemble borélien est analytique.

Capacité généralisée. Dans un espace séparé Ω, on appelle capacité généralisée une fonction numérique (finie ou non) $A \to \varphi(A)$ définie dans l'ensemble des parties de Ω et satisfaisant aux axiomes suivants :

1. *Croissance* : $A \subset A'$ entraîne $\varphi(A) \leqslant \varphi(A')$.

2. Pour toute suite croissante (A_n) de parties de Ω, on a

$$\varphi\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sup_n \varphi(A_n).$$

3. Pour toute suite décroissante (K_n) de compacts de Ω, on a

$$\varphi\Big(\bigcap_n K_n\Big) = \inf_n \varphi(K_n).$$

On voit que si $\mathcal{C}$ est une capacité de Choquet dans Ω, la capacité extérieure correspondante est une capacité généralisée (§ 7).

Soit φ une capacité généralisée dans un espace séparé Ω ; on dit qu'une partie A de Ω est φ-capacitable si on a $\varphi(A) = \sup_{K\subset A} \varphi(K)$ (K compact).

Dans le cas d'une capacité de Choquet $\mathcal{C}$, cette définition coïncide avec celle du paragraphe précédent.

Théorème (de capacitabilité). *Soit φ une capacité généralisée dans un espace séparé Ω ; tout ensemble K-analytique contenu dans un K_σ de Ω est φ-capacitable.*

Lemme V.8.1. *Tout $K_{\sigma\delta}$ de Ω est φ-capacitable.*

Soit en effet $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ un $K_{\sigma\delta}$; $A_i = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_i^p$ pour tout indice i, (A_i^p) étant une suite croissante de compacts.

La suite $(A_1^n \cap A)_n$ est une suite croissante dont la réunion est $A_1 \cap A = A$.

Soit $a < \varphi(A)$; comme on a $\sup_n \varphi(A_1^n \cap A) = \varphi(A)$ (axiome 2), il existe un indice p_1 tel que pour $B_1 = A_1^{p_1} \cap A$ on ait $\varphi(B_1) > a$. Supposons définis les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ tels que pour $B_k = A \cap A_1^{p_1} \cdots \cap A_k^{p_k}$ on ait

(14) Un K_σ est une réunion dénombrable de compacts ; un $K_{\sigma\delta}$ est une intersection dénombrable de K_σ.

https://spartacus-idh.com

$\varphi(B_k) > a$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$; $(B_{n-1} \cap A_n^i)_i$ est une suite croissante d'ensembles dont la réunion est $B_{n-1} \cap A_n = B_{n-1}$ (car $B_{n-1} \subset A \subset A_n$) ; donc $\sup_i \varphi(B_{n-1} \cap A_n^i) = \varphi(B_{n-1}) > a$ et il existe un indice p_n tel que pour $B_n = B_{n-1} \cap A_n^{p_n} = A \cap A_1^{p_1} \cdots \cap A_{n-1}^{p_{n-1}} \cap A_n^{p_n}$, on ait $\varphi(B_n) > a$.

On construit ainsi une suite p_n et la suite (B_n) correspondante telle que $\varphi(B_n) > a$ pour tout entier n. Posons $B'_n = A_1^{p_1} \cap A_2^{p_2} \cap \cdots \cap A_n^{p_n}$, pour tout indice n ; B'_n est un compact et $B_n = A \cap B'_n \subset B'_n$ d'où $\varphi(B'_n) > a$.

La suite de compacts B'_n est décroissante, donc $\varphi(\bigcap_n B'_n) = \inf_n \varphi(B'_n) \geqslant a$ (axiome 3). Or $\bigcap_n B'_n = \bigcap_n A_n^{p_n} \subset \bigcap_i A_i = A$ car $A_n^{p_n} \subset A_n$; $\bigcap_n B'_n$ est un compact contenu dans A, par suite $\sup_{K \subset A} \varphi(K) \geqslant a$ et comme a est un nombre arbitraire $< \varphi(A)$, $\varphi(A) = \sup_{K \subset A} \varphi(K)$. Le lemme est démontré.

Lemme V.8.2. *Soient Ω_0 un espace séparé, Ω un espace séparé muni d'une capacité généralisée φ et f une application continue de Ω_0 dans Ω. Pour toute partie A de Ω_0 posons $\psi(A) = \varphi(f(A))$. L'application $A \to \psi(A)$ est une capacité généralisée dans Ω_0 et la propriété « A est ψ-capacitable » entraîne « $f(A)$ est φ-capacitable ».*

a. ψ est évidemment croissante.

b. Soit (A_n) une suite croissante de parties de Ω_0 ; $(f(A_n))$ est une suite croissante de parties de Ω, et on a $f(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f(A_n)$ d'où

$$\psi\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \varphi\left(f\Big(\bigcup_n A_n\Big)\right) = \varphi\left(\bigcup_n f(A_n)\right) = \sup_n \varphi(f(A_n)) = \sup_n \psi(A_n).$$

c. Soit (K_n) une suite décroissante de compacts Ω_0 ; $(f(K_n))$ est une suite décroissante de compacts de Ω et on a $f(\bigcap_n K_n) = \bigcap_n f(K_n)$ car $f(\bigcap_n K_n) \subset \bigcap_n f(K_n)$.

Inversement, soit $x \in \bigcap_n f(K_n)$, $f^{-1}(x)$ est fermé, donc $f^{-1}(x) \cap K_n$ est une suite décroissante de compacts non vides de Ω_0 (nous supposons ici que $K_n \neq \varnothing$ pour tout n) ; il en résulte que $f^{-1}(x) \cap \big(\bigcap_n K_n\big) = \bigcap_n (f^{-1}(x) \cap K_n) \neq \varnothing$ de sorte qu'il existe un point $y \in \bigcap_n K_n$ tel que $f(y) = x$, donc $x \in f(\bigcap_n K_n)$ et $\bigcap_n f(K_n) = f(\bigcap_n K_n)$. Ainsi

$$\psi\Big(\bigcap_n K_n\Big) = \varphi\Big(f\Big(\bigcap_n K_n\Big)\Big) = \varphi\Big(\bigcap_n f(K_n)\Big) = \inf_n \varphi\big(f(K_n)\big) = \inf_n \psi(K_n).$$

ψ est donc bien une capacité généralisée dans Ω_0.

Soit A une partie ψ-capacitable de Ω_0 : pour tout $\lambda < \psi(A) = \varphi(f(A))$ il existe un compact K contenu dans A tel que $\varphi(f(K)) = \psi(K) \geqslant \lambda$; $f(K)$ est alors un compact contenu dans $f(A)$ tel que $\varphi(f(K)) \geqslant \lambda$, ce qui montre que $f(K)$ est φ-capacitable.

Le théorème de capacitabilité résulte des lemmes V.8.1. et V.8.2.. Considérons un ensemble K-analytique contenu dans un compact de l'espace séparé Ω (muni de la capacité généralisée φ) ; on peut supposer que Ω lui-même est compact. Par définition A est l'image d'un $K_{\sigma\delta}$ B contenu dans un compact B_0 par une application continue $f : B \to \Omega$. Désignons par Γ le graphe de f ; on a $A = \mathrm{pr}\,\Gamma$ (pr est la projection de $B_0 \times \Omega$ sur Ω). f étant continue, son graphe Γ est fermé dans $B \times \Omega$; il en résulte que $\Gamma = \overline{\Gamma} \cap (B \times \Omega)$ ($\overline{\Gamma}$ désignant l'adhérence de Γ dans $B_0 \times \Omega$). Comme Ω et B_0 sont compacts, Γ est compact ;

© Spartacus-Idh 2019

or $B \times \Omega$ est un $K_{\sigma\delta}$ de $B_0 \times \Omega$ comme B dans B_0, donc Γ lui-même est un $K_{\sigma\delta}$ de $B_0 \times \Omega$.

D'après le lemme V.8.1., Γ est capacitable pour la capacité généralisée ψ définie dans $B_0 \times \Omega$ par $\psi(H) = \varphi(\mathrm{pr}(H))$ pour toute partie H de $B_0 \times \Omega$. Il résulte alors du lemme V.8.2. que $A = \mathrm{pr}\,\Gamma$ est φ-capacitable.

Considérons enfin un ensemble K-analytique A contenu dans un K_σ soit $\bigcup_n K_n \subset \Omega$. On peut supposer la suite de compacts K_n croissante. Posons $A_n = A \cap K_n$. On a $A = \bigcup_n A_n$, la suite (A_n) étant croissante, donc $\varphi(A) = \sup_n \varphi(A_n)$. Soit $\lambda < \varphi(A)$; il existe un entier n tel que $\varphi(A_n) > \lambda$; or A_n est un ensemble K-analytique contenu dans un compact, il est donc φ-capacitable. Ainsi il existe un compact $K \subset A_n \subset A$ tel que $\varphi(K) \geqslant \lambda$, ce qui montre que A lui-même est φ-capacitable.

Remarque. On trouvera des variantes dans Brelot (*Lectures on potential theory*, Bombay, 1960).

Bibliographie

En théorie classique, après les premiers travaux généraux de Wiener, De La Vallée Poussin, Frostman etc. signalés dans l'article mentionné dans l'Introduction, consulter surtout :

Brelot *J. de Math.* 1945 (où l'on trouve des extensions comme la contenance-v).

Cartan *Bull. Soc. Math. de France*, 1945 et *Annales, Univ. de Grenoble*, t. 22, 1946.

Landkoff ouvrage récent déjà cité.

Pour les recherches axiomatiques récentes et la capacitabilité voir surtout :

G. Choquet *Ann. Inst. Fourier* 5, 1955 et 9, 1959. *Séminaire de théorie du potentiel*, t. 3, 1958-1959. *Ac. royale de Belgique (Sciences)* 1958-4 (capacitabilité en potentiel logarithmique).

G. Mokobodzki Séminaire d'analyse de Choquet, 2, 1963.

N. Bourbaki Top. générale, chap. 9, *Act. Sc.* n° 1045 (1958).

M. Sion *Trans. Am. Math. Soc.* 96, 1960. *Annales Inst. Fourier*, 13, 1963.

Fuglede *Acta. Math.* 103, 1960 ; *Annales I. F.* t. 12 (1962). Colloque de théorie du potentiel (1964). *Annales I. F.* 15.

Enfin signalons l'étude de la capacité pour une suite décroissante d'ensembles par **Brelot**, 5e symposium (Berkeley) de *Stat. et prob.* (1965).

Autres généralités dans **Auger** (ouvrage à. par. *Akad. Verlag* Berlin).

https://spartacus-idh.com

POTENTIELS GÉNÉRAUX ET THÉORÈME DE CONVERGENCE. APPLICATION AU BALAYAGE

§ 1. — Généralités.

Nous avons déjà annoncé (chap. II, § 9) que la limite d'une suite décroissante ou même d'un ordonné filtrant à gauche de fonctions surharmoniques localement bornées inférieurement est quasi-surharmonique, c'est-à-dire égale à une fonction surharmonique sauf sur un ensemble exceptionnel qui est polaire (ou dans une boule, de capacité extérieure nulle, *cf.* chap. V, § 3).

Historiquement, après les premiers résultats de Szpilrajn-Rado (voir chap. II) sur les fonctions presque surharmoniques, Brelot (1938) a démontré pour les suites que l'ensemble exceptionnel est, par exemple dans une boule, de capacité intérieure nulle (voir bibl. 1re réf.). Cartan en 1942 a amélioré doublement ce résultat en remplaçant les suites décroissantes par des familles filtrantes à gauche et en montrant que l'ensemble exceptionnel est localement de capacité extérieure nulle c'est-à-dire est polaire ; sa démonstration repose sur l'emploi de la norme énergie (*cf.* chap. XI) étrangère au fond à la question.

Nous donnerons d'abord un théorème moins précis dont la démonstration (bibl. 3e réf.), en partie analogue à celle de Brelot, est valable dans des hypothèses beaucoup plus générales qu'il ne sera guère plus long de rappeler ici. Pour d'autres démonstrations dans des conditions variées, voir la bibliographie (4e et 5e articles).

Noyau. Soit Ω un espace topologique localement compact. On appelle noyau une fonction numérique $(x, y) \to G(x, y) \geqslant 0$ définie dans $\Omega \times \Omega$.

On suppose que pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω la fonction $G_x y \to G(x, y)$ est mesurable quel que soit $x \in \Omega$, et on dit que la fonction $G\mu$ définie par

$$G\mu(x) = \int G(x, y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

est le potentiel de μ par rapport au noyau G.

Topologie vague. Considérons l'ensemble M^+ des mesures $\geqslant 0$ sur Ω. On le munit de la « topologie vague » qui est la moins fine des topologies rendant continues toutes les applications $f \to \mu(f) = \int f\, \mathrm{d}\mu$ de M^+ dans $\mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{K}(\Omega)$, ensemble des fonctions finies continues à support compact).

Un système fondamental de voisinages d'une mesure μ_0 pour la topologie vague est constitué par les ensembles $V^{\mu_0}_{(f_i),\varepsilon}$ ainsi définis : $(f_i) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une suite finie de fonctions de $\mathcal{K}(\Omega)$ et ε est un nombre réel > 0 ; $V^{\mu_0}_{(f_i),\varepsilon}$ est

© Spartacus-Idh 2019

l'ensemble des mesures $\mu \geqslant 0$ qui satisfont aux conditions

$$\Big| \int f_i \, d\mu - \int f_i \, d\mu_0 \Big| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On notera $\mathcal{K}(\Omega, K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}(\Omega)$ à support dans un compact K ; on le munit de la topologie de la convergence uniforme.

Propriété de continuité. L'application $(f, \mu) \to \mu(f)$ de $\mathcal{K}(\Omega, K) \times M^+$ dans $\mathbb{R}$ est continue.
En effet, soient $(f_0, \mu_0) \in \mathcal{K}(\Omega, K) \times M^+$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$|\mu(f) - \mu_0(f_0)| = |\mu(f - f_0) + \mu(f_0) - \mu_0(f_0)| \leqslant |\mu(f - f_0)| + |\mu(f_0) - \mu_0(f_0)|.$$

Soient $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ comprise entre 0 et 1 et égale à 1 sur K, η un nombre > 0 et U le voisinage de f_0 dans $\mathcal{K}(\Omega)$ défini par la condition $\sup |f - f_0| < \eta$. Si $f \in U$ on a $|f - f_0| \leqslant \eta\varphi$ d'où $|\mu(f - f_0)| \leqslant \eta\mu(\varphi)$ pour toute mesure $\mu \in M^+$. Supposons d'autre part que $\mu \in V^{\mu_0}_{(f_0, \varphi), \eta}$, alors $|\mu(f_0) - \mu_0(f_0)| \leqslant \eta$ et $|\mu(\varphi) - \mu_0(\varphi)| \leqslant \eta$. Lorsque f et φ appartiennent aux deux voisinages considérés, on a donc $|\mu(f) - \mu_0(f_0)| \leqslant \eta\mu(\varphi) + \eta \leqslant \eta|\mu_0(\varphi) + \eta + 1|$ qui est arbitrairement petit avec η.

Propriété de compacité. Rappelons que l'ensemble des mesures $\mu \geqslant 0$ telles que $(\mu(K))$ soit borné pour chaque compact K est relativement compact en topologie vague.

Considérons en effet un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur cet ensemble de mesures. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, l'image de $\mathcal{U}$ par l'application $\mu \to \mu(f)$ est une base d'ultrafiltre $\mathcal{U}_f$ sur $\mathbb{R}$, dont les ensembles sont bornés, donc $\mathcal{U}_f$ converge vers une limite finie $\nu(f)$. On définit ainsi une application $f \to \nu(f)$ de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, qui est évidemment une mesure positive sur Ω.

Comme pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, $\mu(f)$ converge vers $\nu(f)$, l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ converge vaguement vers ν.

Propriété des masses ponctuelles. L'application $x \to \varepsilon_x$ de Ω dans M^+, qui à tout point $x \in \Omega$ fait correspondre la mesure $\varepsilon_x : f \to \varepsilon_x(f) = f(x)$ (masse $+1$ placée au point x) est un homéomorphisme de Ω dans M^+ muni de la topologie vague.

L'application considérée est évidemment continue, car pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, on a $\varepsilon_x(f) = f(x)$ et f est continue. De plus elle est injective ; en effet si x et y sont deux points distincts de Ω, il existe une fonction $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$, donc $\varepsilon_x(f) = 1$ et $\varepsilon_y(f) = 0$, ce qui montre que $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$. Si Ω est compact, il en résulte que l'application considérée est un homéomorphisme. Sinon, soit $\overline{\Omega}$ le compactifié de Ω par le point d'Alexandroff α ; lorsque x tend vers α dans $\overline{\Omega}$, ε_x tend vers 0 ; on peut donc prolonger à $\overline{\Omega}$ l'application $x \to \varepsilon_x$ en posant $\varepsilon_\alpha = 0$. Ce prolongement est une application continue et injective (puisque $\varepsilon_x \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$) de l'espace compact $\overline{\Omega}$ dans M^+ : c'est donc un homéomorphisme. La propriété en résulte.

https://spartacus-idh.com

§ 2. — Noyaux semi-continus et réguliers.

Théorème. *Pour que l'application $(x, \mu) \to G\mu(x)$ de $\Omega \times M^+$ dans $\mathbb{R}$ soit semi-continue inférieurement, il faut et il suffit que G soit semi-continue inférieurement dans Ω.*

En effet, supposons que $(x, \mu) \to G\mu(x)$ soit semi-continue inférieurement ; il en est de même de sa restriction à $\Omega \times M_0$, M_0 désignant l'ensemble des ε_y. Comme

$$G\varepsilon_y(x) = \int G(x,z)\,\mathrm{d}\varepsilon_y(z) = G(x,y),$$

on voit que G est semi-continue inférieurement dans $\Omega \times \Omega$.

Inversement, supposons G semi-continue inférieurement ; c'est donc la limite d'une famille filtrante à droite (G_i) de fonctions finies continues à support compact, et on a

$$G\mu(x) = \int G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \lim_i \int G_i(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \lim_i G_i\mu(x).$$

Or, pour G_i continue à support inclus dans le produit de compacts $K_i \times K_i$, l'application $(x, \mu) \to G_i\mu(x)$ est composée de l'application $(f, \mu) \to \int f\,\mathrm{d}\mu$ continue dans $\mathcal{K}(\Omega, K_i) \times M^+$ et de l'application $(x, \mu) \to (G_{i,x}, \mu)$ où $G_{i,x}$ est la fonction $y \to G_i(x,y)$ qui appartient à $\mathcal{K}(\Omega, K_i)$ et comme telle, dépend continûment de $x \in \Omega$; cette seconde application est aussi continue. Il en résulte que $(x, \mu) \to G\mu(x)$ est limite d'une famille filtrante à droite de fonctions continues, donc est semi-continue inférieurement.

Corollaire. *Considérons un noyau G semi-continu inférieurement et une suite μ_n de mesures positives sur Ω, convergeant vaguement vers une mesure μ. On a $G\mu \leqslant \lim_n \inf G\mu_n$.*

C'est une conséquence immédiate de la semi-continuité inférieure par rapport à μ.

Ensembles G-négligeables. Soit G un noyau quelconque. On dit qu'un compact K est G-négligeable si toute mesure positive non nulle μ dont le support est contenu dans K admet un potentiel $G\mu$ non borné sur K.

On dit qu'une partie A de Ω est intérieurement G-négligeable si tout compact contenu dans A est G-négligeable.

Noyau adjoint. Si G est un noyau dans l'espace Ω, on appelle noyau adjoint de G le noyau G^* défini par $G^*(x,y) = G(y,x)$. Pour que G^* soit semi-continu inférieurement, il faut et il suffit que G le soit.

On dit qu'un noyau est symétrique s'il est identique à son adjoint.

Noyau régulier (Choquet). On dit qu'un noyau G dans l'espace Ω est *régulier* s'il satisfait à la condition suivante :

> « quels que soient le compact K et la mesure μ positive à support contenu dans K, la propriété que la restriction à K du potentiel $G\mu$ est finie continue entraîne que le potentiel $G\mu$ est fini continu dans Ω ».

© Spartacus-Idh 2019

Nous avons vu (chap. IV, § 5) que le noyau $(x, y) \to h(\|x - y\|)$ est régulier dans $\mathbb{R}^n$. De même par suite le noyau de Green pour une boule.

Théorème. *Considérons un noyau G semi-continu inférieurement, un nombre $\varepsilon > 0$ et une mesure μ positive à support compact K, telle que la restriction à K de son potentiel $G\mu$ soit finie (sur K). Il existe un compact $K' \subset K$ tel que la restriction μ' de μ à K' satisfasse aux conditions suivantes :*

- *la restriction de $G\mu'$ à K' est finie continue ;*
- $\|\mu\| - \|\mu'\| \leqslant \varepsilon$.

En effet, le potentiel $G\mu$ est semi-continu inférieurement, donc (Lusin) il existe un compact K' contenu dans K tel que $|\mu(K) - \mu(K')| \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de $G\mu$ à K' soit finie continue. Désignons par μ' la restriction de μ à K' et posons $\mu'' = \mu - \mu'$, On a $G\mu = G\mu' + G\mu''$, et la restriction de $G\mu$ à K' est continue tandis que celles de $G\mu'$ et de $G\mu''$ sont semi-continues inférieurement ; donc la restriction de $G\mu' = G\mu - G\mu''$ à K' est aussi semi-continue supérieurement donc continue.

Corollaire VI.2.1. *Soit G un noyau régulier semi-continu inférieurement dans l'espace Ω. Pour tout compact K qui n'est pas G-négligeable, il existe une mesure positive non nulle μ à support contenu dans K et dont le potentiel $G\mu$ est fini et continu dans Ω.*

Puisque K n'est pas G-négligeable, il existe une mesure positive non nulle μ_1 à support contenu dans K et dont le potentiel $G\mu_1$ est borné sur K.

D'après le théorème précédent, il existe un compact $K' \subset K$ tel que la restriction μ de μ_1 à K' soit $\neq 0$ et possède la propriété selon laquelle la restriction de son potentiel $G\mu$ à K' est continue. Comme G est régulier, il en résulte que $G\mu$ est fini et continu dans Ω.

Corollaire VI.2.2. *Soit G un noyau régulier semi-continu inférieurement. Tout compact G-négligeable K de Ω est aussi intérieurement G-négligeable.*

Sinon il existerait un compact K' contenu dans K et une mesure μ positive non nulle à support contenu dans K' donc dans K et dont le potentiel $G\mu$ serait fini et continu dans Ω et par suite borné sur K ce qui est absurde.

§ 3. — Théorème de convergence.

Considérons d'abord un espace compact Ω à base dénombrable (donc métrisable), et un noyau G semi-continu inférieurement dont l'adjoint G^* est régulier.

Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures positives sur Ω satisfaisant aux hypothèses suivantes :

1. la famille des potentiels $(G\mu_i)$ est filtrante à gauche ;

2. la famille $(\mu_i(\Omega))$ est bornée.

Il existe alors une mesure μ telle que $G\mu$ coïncide avec $\inf_i G\mu_i$ sauf sur un ensemble intérieurement G^*-négligeable.

https://spartacus-idh.com

Plus précisément, on peut extraire de la famille (μ_i) une suite μ_{α_n} convergeant vaguement vers une mesure μ, et telle que la suite des potentiels $G\mu_{\alpha_n}$ soit décroissante, telle que

$$G\mu \leqslant \inf_i G\mu_i \leqslant \lim_{n\to\infty} G\mu_{\alpha_n},$$

les inégalités ayant lieu sauf sur un ensemble intérieurement G^*-négligeable.

Démonstration. Comme les potentiels $G\mu_i$ sont semi-continus inférieurement et comme Ω a une base dénombrable, on peut appliquer le lemme de topologie (chap. I, § 2) à la famille $(G\mu_i)$: il existe une partie dénombrable $I_0 = \{i_{k_n}\}$ de I telle que la relation « g est une fonction semi-continue inférieurement et $g \leqslant \inf_{i\in I_0} G\mu_i$ » entraîne $g \leqslant \inf_{i\in I} G\mu_i$.
La famille $(G\mu_i)$ est filtrante à gauche, donc on peut remplacer I_0 par une partie $I'_0 = \{i_{k'_n}\} \subset I_0$ possédant la même propriété, mais telle que la suite $G_{i_{k'_n}}$ soit décroissante. Grâce à la propriété de vague compacité, il résulte de la seconde hypothèse de l'énoncé qu'on peut extraire de la suite $\mu_{i_{k'_n}}$ une sous-suite μ_{α_n} convergeant vaguement vers une mesure μ.
Comme la suite $G\mu_{i_{k'_n}}$ est décroissante, il en est de même de la sous-suite $G\mu_{\alpha_n}$ et on a $\lim_n G\mu_{i_{k'_n}} = \lim_n G\mu_{\alpha_n}$. On a vu que $G\mu \leqslant \lim_n G\mu_{\alpha_n} = \lim_n G_{i_{k'_n}}$ (§ 1); comme $G\mu$ est semi-continu inférieurement, il en résulte que

$$G\mu \leqslant \inf_{i\in I} G\mu_i \leqslant \lim_n G\mu_{\alpha_n}.$$

Il reste à montrer que $G\mu$ coïncide avec $\lim_n G\mu_{\alpha_n}$ sauf sur un ensemble intérieurement G^*-négligeable. Or, si l'ensemble des points où $G\mu$ diffère de $\lim_n G\mu_{\alpha_n}$ n'est pas intérieurement G^*-négligeable, il contient un compact K_0 non G^*-négligeable. Sur un tel compact, il existe une mesure ν positive non nulle dont le potentiel $G^*\nu$ est fini et continu dans Ω (§ 2, coroll. VI.2.1.). Posons $\Phi = \lim_n G\mu_{\alpha_n}$, on a $\int G\mu_{\alpha_n}\,d\nu = \int G^*\nu\,d\mu_{\alpha_n}$ (interversion des intégrations car les potentiels sont semi-continus).
Le premier membre tend vers $\int \Phi\,d\nu$ puisque $G\mu_{\alpha_n}$ converge en décroissant vers Φ. Le second membre tend vers $\int G^*\nu\,d\mu = \int G\mu\,d\nu$ (fini puisque $G^*\nu$ est fini continu) d'après la notion de convergence vague. Donc $\int \Phi\,d\nu = \int G\mu\,d\nu$, ce qui est absurde puisque $\Phi \geqslant G\mu$ et $\Phi > G\mu$ sur un ensemble de ν-mesure non nulle. □

Extension. On étend le théorème à un espace Ω localement compact, en remplaçant la condition 2. par

2′. pour tout compact K ; la famille $(\mu_i(K))$ est bornée ;

et en ajoutant la condition :

3. quelle que soit la mesure positive ν à support compact, dont le potentiel $G^*\nu$ est fini continu, $\int G^*\nu\,d\mu_i^{\complement K}$ converge vers 0 selon l'ordonné filtrant à droite des compacts, uniformément par rapport à l'indice i ($\mu_i^{\complement K}$ désignant la restriction de μ_i à $\complement K$).

La seule difficulté nouvelle est de montrer que $\int G^*\nu\,d\mu_{\alpha_n} \to \int G^*\nu\,d\mu < +\infty$. Or $\int G^*\nu\,d\mu_i$ est bornée comme somme $\int_K G^*\nu\,d\mu_i + \int_{\complement K} G^*\nu\,d\mu_i$ d'après 2′ et 3. De $\int G^*\nu\,d\mu \leqslant \lambda < +\infty$, on déduit, en introduisant un compact K, une fonction continue $\varphi \geqslant 0$, nulle en dehors d'un compact, égale à $G^*\nu$ sur K et

© Spartacus-Idh 2019

partout $\leqslant G^*\nu$, que $\int \varphi \, d\nu = \lim_n \int \varphi \, d\mu_{\alpha_n} \leqslant \lambda$. On a donc aussi $\int G^*\nu \, d\mu \leqslant \lambda$ car $G^*\nu$ est limite d'une famille filtrante à droite de telles fonctions φ. Ensuite

$$\Big| \int G^*\nu \, d\mu_{\alpha_n} - \int G^*\nu \, d\mu \Big| \leqslant \Big| \int \varphi \, d\mu_{\alpha_n} - \int \varphi \, d\mu \Big| + \int (G^*\nu - \varphi) \, d\mu_{\alpha_n} + \int (G^*\nu - \varphi) \, d\mu.$$

Les seconde et troisième intégrales sont majorées par $\int_{\complement K} G^*\nu \, d\mu_{\alpha_n}$ et $\int_{\complement K} G^*\mu \, d\nu$, et sont donc arbitrairement petites pour un K convenable, indépendamment de n. On choisit ensuite n assez grand pour que le premier terme soit arbitrairement petit et on conclut.

Remarques.

1. La condition 3 est satisfaite si les μ_i ont leur support dans un compact fixe, ou si les $\mu_i(\Omega)$ sont bornés (ce qui entraîne 2′) et si $G(x,y) \to 0$ uniformément localement en x quand y tend vers le point d'Alexandroff de Ω.
2. Si $G\mu_i$ est une *suite* décroissante, l'hypothèse de la base dénombrable de Ω est inutile. La démonstration n'a plus besoin du lemme topologique et se simplifie.

§ 4. — Application au cas classique.

Théorème (de convergence, forme finale de H. Cartan). *Soit (v_i) une famille de fonctions surharmoniques localement bornée inférieurement sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. L'enveloppe inférieure d'une telle famille diffère seulement sur un ensemble polaire d'une fonction surharmonique (qui est nécessairement la régularisée inférieure de l'enveloppe).*

Il suffit de démontrer le théorème localement (chap. III, § 1). Nous allons raisonner dans une boule ouverte $B \subset \overline{B} \subset \Omega$. Comme la famille (v_i) est minorée dans B, on peut se ramener au cas où les fonctions v_i sont positives. Considérons une boule $B' \subset \overline{B}' \subset B$ concentrique à B. Pour tout indice i, désignons par v_i' la balayée $(\hat{R}_{v_i}^{B'})_B$ qui est un potentiel (voir chap. IV, § 3) dont la mesure annoncée est portée par $\overline{B}'$.

Soit (w_j) la famille filtrante à gauche formée des enveloppes inférieures des sous-familles finies de la famille (v_i'). Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $\inf_j w_j = \inf_i v_i'$ coïncide avec $\inf_i v_i$ dans B' ;
- quel que soit l'indice j, w_j est le potentiel de Green d'une mesure positive μ_j à support contenu dans $\overline{B}'$.

Comme le noyau de Green est semi-continu inférieurement symétrique et régulier, on est dans les conditions d'application du théorème de convergence. On peut donc extraire de la famille (μ_j) une suite μ_{j_n} convergeant vaguement vers une mesure μ dont le potentiel de Green w satisfait à $w \leqslant \inf_i v_i \leqslant \inf_n w_{j_n}$,

https://spartacus-idh.com

l'égalité ayant lieu sauf sur un ensemble intérieurement G-négligeable, donc de capacité intérieure nulle. Or l'ensemble des points où w diffère de $\inf_n w_{j_n}$ est évidemment borélien. D'après le théorème de capacitabilité, il est de capacité extérieure nulle, puisqu'il est capacitable. Ainsi $\inf_i v_i$ est égal au potentiel w sauf sur un ensemble polaire (chap. V, § 3), et par suite $\inf_i v_i$ est quasi-surharmonique dans la boule ouverte B'.

Remarque. On pourrait n'appliquer que le théorème de convergence pour espaces compacts à $\overline{B}'$ et au noyau de Green pour B.

§ 5. — Applications classiques du théorème de convergence. Compléments sur le balayage.

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ un ouvert Ω borné[15] ou même quelconque si $n \geqslant 3$. Soient $E \subset \Omega$ et v surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω. Aux propriétés données chap. II, § 10, le théorème de convergence permet d'ajouter

α. $\mathcal{B}_v^E$ c'est-à-dire $\hat{R}_v^E$ vaut R_v^E quasi-partout.

Donc sur E, $\mathcal{B}_v^E = v$ q.p. De plus $\mathcal{B}_v^E$ *est la plus petite fonction surharmonique* $\geqslant 0$ majorant v quasi-partout sur E.

Car soient w surharmonique $\geqslant 0$ majorant v sur $E - e$, où e est polaire, et u surharmonique > 0 infinie sur e et finie en $x_0 \in \Omega - E$. Alors $w + \varepsilon u$ majore v sur E donc majore R_v^E, en particulier en x_0 ; vu l'arbitraire de ε on conclut que $w(x_0) \geqslant R_v^E(x_0)$. Ainsi w majore R_v^E sur $\Omega - E$ comme sur E ; donc $w \geqslant \hat{R}_v^E$.

D'après cela $\mathcal{B}_v^E = v$ ne change pas si on altère E d'un ensemble polaire.

β. Sur $\Omega - E$, on a $\hat{R}_v^E = R_v^E$.

Car soit e l'ensemble polaire de E où $v > \hat{R}_v^E$. Pour $x_0 \in \Omega - E$, on sait former u surharmonique > 0 dans Ω, infinie sur e, mais finie en x_0. La fonction $\hat{R}_v^E + \varepsilon u$ majore v sur E, donc majore R_v^E d'où $\hat{R}_v^E(x_0) \geqslant R_v^E(x_0)$ et l'égalité.

Balayage des masses. Raisonnons d'abord dans le cas où Ω est une boule B. Considérons une mesure positive μ dans B et un ensemble E. Soit

$$v = G\mu(x) = \int G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

le G^B-potentiel supposé $\not\equiv +\infty$. Alors $\mathcal{B}_v^E$ dans B est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ minorant v, donc c'est un potentiel de Green $\mathcal{B}_v^E(x) = \int G(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(y)$. On dit que la mesure correspondante μ_1 est obtenue par balayage de μ (ou la balayée de μ) relativement à E.

En particulier si E est fermé dans B, la fonction $\mathcal{B}_v^E$ est harmonique dans $B - E$ et le support de μ_1 est contenu dans E. Si E est compact et que μ soit la distribution uniforme de masses sur une sphère B'^* concentrique à B, $(B' \supset E)$, de potentiel égal à 1 dans B', alors $G\mu_1$ et μ_1 sont le potentiel capacitaire et la mesure capacitaire de E.

Même théorie dans $\mathbb{R}^n$, en remplaçant G par $h(\|x - y\|)$.

(15) Hypothèse de commodité assurant l'existence pour tout ensemble polaire dans Ω d'une fonction surharmonique > 0 dans Ω, valant $+\infty$ sur e. Mais il suffit en fait pour cela si $n = 2$ que $\complement\Omega$ soit non polaire. Voir la fin du chapitre III.

© Spartacus-Idh 2019

Exemple historique du balayage. C'est l'exemple à propos duquel Poincaré a introduit la notion de balayage. Il concerne le balayage dans l'espace $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$).

On considère une boule ouverte $B(x_0, R)$, et son complémentaire E. Soient $x \in B$ et $\mu = \varepsilon_x$ la masse $+1$ placée en x. Nous allons faire le balayage de ε_x relatif à E. D'après la fin du chap. II, $R^E_{h_x}$ vaut l'intégrale de Poisson $I^B_{h_x}$ dans B ; elle est continue et vaut donc $\mathcal{B}^E_{h_x}$. Or on montre facilement que la mesure sur B^* ayant pour densité le noyau de Poisson

$$y \to (1/\alpha_n R)(R^2 - \|x - x_0\|^2)/\|y - x\|^n \qquad \text{de pôle } x$$

a un potentiel continu égal à $R^E_{h_x}$ dans B et dans $\complement\overline{B} = \mathring{E}$. C'est donc la mesure balayée.

Cet exemple sera généralisé au chapitre IX et on reviendra aussi sur le balayage au chap. X.

Bibliographie

M. Brelot Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques, *CR.* t. 207, Nov. 1938.

M. Brelot Nouvelle démonstration du théorème fondamental sur la convergence des potentiels - *Annales Institut Fourier VI*, 1955-1956.

M. Brelot et G. Choquet Le théorème de convergence en théorie du potentiel, *Journal Madras Univ.*, 1957, p. 277-286.

G. Choquet Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *Sem. théorie du potentiel*, t. 1, Paris, 1957.

M. Brelot Séminaire (potentiel) t. 2, Paris, 1958.

H. Cartan *C.R.* t. 214 (1942) p. 944.

H. Cartan Théorie du potentiel newtonien. Énergie, capacité. Suites de potentiels, *Bull. Soc. Math.*, 1945.

https://spartacus-idh.com

ENSEMBLES EFFILÉS

§ 1. — Définition.

On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est effilée[16] *en un point $x_0 \notin E$ si x_0 n'est pas adhérent à E ou si, x_0 étant adhérent à E, il existe une fonction v surharmonique au voisinage de x_0 (ou encore dans $\mathbb{R}^n$) telle que*

$$v(x_0) < \liminf_{x \to x_0, x \in E} v(x).$$

On dira aussi que E est effilé en $x_0 \in E$ si $E - x_0$ est effilé en x_0.

Ainsi, lorsque E est non effilé en x_0, on a pour toute fonction v surharmonique au voisinage de x_0

$$v(x_0) = \liminf_{\substack{x \to x_0, x \in E, \\ x \neq x_0}} v(x) = \liminf_{x \to x_0, x \in E} v(x).$$

Critère plus commode. Pour qu'un ensemble E soit effilé en un point adhérent $x_0 \notin E$, il faut et il suffit qu'il existe au voisinage de x_0 une fonction surharmonique v finie en x_0 et telle que

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} v(x) = +\infty.$$

Cette condition est évidemment suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, supposons E effilé en x_0, et soit u une fonction surharmonique telle que $u(x_0) < \liminf_{x \to x_0, x \in E} u(x)$; on se ramène au cas où u est le potentiel d'une mesure $\mu \geqslant 0$. Considérons une suite ε_n de nombres > 0, et désignons par u_n le potentiel de la restriction de μ à $B(x_0, \varepsilon_n)$. Comme $u(x_0)$ est fini, on peut choisir la suite ε_n de manière que la série de terme général $u_n(x_0)$ converge. La fonction $v_p = \sum_{n=1}^{p} u_n$ est surharmonique. Soit $\delta = \liminf_{x \to x_0, x \in E} u(x) - u(x_0)$, on a aussi $\delta = \liminf_{x \to x_0, x \in E} u_n(x) - u_n(x_0)$, car $u - u_n$ est harmonique dans $B(x_0, \varepsilon_n)$ donc continue en x_0 ; par suite $\liminf_{x \to x_0, x \in E} v_p(x) - v_p(x_0) \geqslant p\delta$. Il en résulte que $v = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sup_p v_p$ qui est une fonction surharmonique finie en x_0 satisfait à $\lim_{x \to x_0, x \in E} v(x) = +\infty$.

§ 2. — Propriétés.

1. Toute partie d'un ensemble effilé en un point x_0 est effilée en x_0. La réunion d'un nombre fini d'ensembles effilés en x_0 est effilée en x_0.

(16) Notion introduite dans Brelot, *J. de Math.*, 1940, pour généraliser les notions de point frontière irrégulier d'un ouvert et de point-frontière instable d'un fermé.

© Spartacus-Idh 2019

2. Un ensemble polaire est effilé en tout point.

En effet, si E est un ensemble polaire et si x_0 est un point adhérent quelconque à E, on sait qu'il existe une fonction v surharmonique au voisinage de x_0, finie en x_0 et infinie en tout point de E du voisinage (*cf.* chap. III, § 1).

Nous verrons plus loin que réciproquement tout ensemble effilé en chacun de ses points est polaire.

On notera que, d'après ces propriétés, l'altération d'un ensemble selon un ensemble polaire conserve l'effilement ou le non effilement en tout point.

Comme application au balayage (voir chap. VI, § 5), $\mathcal{B}_v^E = v$ *au moins en tout point où* E *n'est pas effilé.*

3. Soit E un ensemble effilé en un point x_0. Lorsque $r > 0$ tend vers 0, la mesure de la trace de E sur $S(x_0, r)$ est infiniment petite par rapport à la mesure totale de cette sphère.

Considérons en effet, lorsque x_0 est adhérent à $E - \{x_0\}$ une fonction surharmonique $u \geqslant 0$ finie en x_0 et telle que $\lim_{x\to x_0, x\neq x_0, x\in E} u(x) = +\infty$.

On a

$$u(x_0) \geqslant \mathcal{M}_u^r(x_0) \geqslant A(r)\frac{\operatorname{mes}\big(E \cap S(x_0, r)\big)}{\operatorname{mes}\big(S(x_0, r)\big)}$$

avec

$$A(r) = \inf_{x\in E\cap S(x_0,r)} u(x) \to +\infty \qquad (r \to 0).$$

D'où résulte que le rapport des mesures considérées tend vers 0.

On voit donc qu'un ensemble contenant au voisinage de x_0 l'intérieur non vide d'un cône de sommet x_0 est non effilé en x_0.

4. Conservation de l'effilement par déformation : soit E un ensemble effilé en x_0, si f est une application borélienne contractante de E dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|f(x)-f(x_0)\| = \|x-x_0\|$ pour tout point x de E, l'image E' de E par f est effilée en $f(x_0)$.

Exemple historique de Lebesgue. Considérons sur le segment $[0, 1]$ de l'axe des abscisses dans l'espace $\mathbb{R}^3$ la mesure de densité ρ telle que $\rho(x) = x$. Son potentiel est égal à 1 en 0, mais il est infini en tout point de $]0, 1]$. L'ensemble E des points de $\mathbb{R}^3$ où ce potentiel majore une constante $k > 1$ est de révolution autour de l'axe des x et est effilé en 0. On montre que la méridienne de la surface de révolution qui le limite est le graphe d'une fonction de la forme $y = ae^{-\frac{\lambda(x)}{x}}$ où $\lim_{x\to 0} \lambda(x) = \frac{k}{2}$. L'ensemble E au voisinage de 0 est appelé *épine de Lebesgue*.

§ 3. — Critère général d'effilement.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et x_0 un point de Ω. Considérons une fonction surharmonique $w > 0$ dans Ω, finie en x_0, telle que pour tout voisinage V de x_0 on ait $w(x_0) > \sup_{x\notin V} w(x)$ ($w(x_0)$ est donc le maximum absolu de w).

https://spartacus-idh.com

Pour qu'une partie α de Ω soit effilée en x_0, il faut et suffit que pour le balayage dans Ω

$$\mathcal{B}_w^\alpha(x_0) < w(x_0).$$

Il suffit, en ôtant éventuellement x_0 de α, de supposer $x_0 \notin \alpha$, puisque cela ne change pas $\mathcal{B}_w^\alpha$. Alors la condition peut aussi s'écrire $\mathcal{B}_w^\alpha(x_0) = R_w^\alpha(x_0) < w(x_0)$.

Elle est suffisante car s'il n'y avait effilement, on aurait l'égalité, comme on l'a vu. Ou encore, plus directement la condition entraîne l'existence d'une fonction surharmonique $v \geqslant 0$, majorant w sur α et arbitrairement voisine de $R_w^\alpha(x_0)$ en x_0, donc satisfaisant à

$$\liminf_{x\to x_0, x\in\alpha} v(x) > \liminf_{x\to x_0, x\in\alpha} w(x) > v(x_0).$$

Inversement, supposons α effilé en x_0. Si $x_0 \notin \overline{\alpha}$, introduisons un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 ne rencontrant pas α et $K = \sup_{x\notin\mathcal{V}} w(x)$; la fonction $w' = \inf(w, K)$ est surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω et vaut w sur α donc majore R_w^α d'où

$$R_w^\alpha(x_0) \leqslant w'(x_0) = K < w(x_0).$$

Si $x_0 \in \overline{\alpha}$, il existe une fonction surharmonique $v \geqslant 0$ bornée dans Ω, telle que

$$v(x_0) < \liminf_{x\to x_0, x\in\alpha} v(x) = \ell.$$

Soient γ un nombre tel que $v(x_0) < \gamma < \ell$ et $\varphi(x) = w(x_0) + \lambda(v(x) - \gamma)$ pour laquelle on va choisir $\lambda > 0$ convenablement.

D'abord dans un voisinage V de x_0, $x \in V \cap \alpha$ entraîne $v(x) > \gamma$ donc $\varphi(x) > w(x)$. Prenons $\lambda > 0$ assez petit pour que $\lambda|v(x) - \gamma| \leqslant w(x_0) - w(x)$ dans $\Omega - V$ (où le second membre majore une constante > 0). Alors $\varphi(x) \geqslant w(x)$ dans $\Omega - V$, donc dans α d'où $\varphi \geqslant R_w^\alpha$ et $w(x_0) > \varphi(x_0) \geqslant R_w^\alpha(x_0)$.

Autre critère fondamental. Par une démonstration analogue on montre le critère suivant.

Soit w surharmonique > 0 dans Ω borné, finie et continue en $x_0 \in \Omega$. Pour que l'ensemble $\alpha \subset \Omega$ soit effilé en x_0, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage δ de x_0 tel que, pour le balayage dans Ω

$$\mathcal{B}_w^{\alpha\cap\delta}(x_0) < w(x_0).$$

On renvoie à la bibliographie pour tout complément, en particulier pour les critères utilisant la capacité classique (du type célèbre de Wiener), qui ne sont plus indispensables et ne s'étendent pas aux axiomatiques actuelles.

§ 4. — Théorème fondamental sur l'ensemble des points d'effilement d'un ensemble [17].

Lemme. *Il existe dans Ω ouvert borné une fonction surharmonique finie (et même continue) $w > 0$ qui, pour tout choix d'un point $x_0 \in \Omega$ est la somme de deux fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω, dont l'une w_1 satisfait à la condition*

$$w_1(x_0) > \sup_{x\notin V} w_1(x),$$

quel que soit le voisinage V de x_0.

(17) Voir Brelot (1944) bibliogr. 2e article (puis aussi 3e article).

© Spartacus-Idh 2019

Il suffit pour $n > 3$ de considérer le potentiel newtonien de la mesure de Lebesgue dans Ω. Il est la somme des potentiels de la mesure de Lebesgue dans $B(x_0, r) \subset \Omega$ et dans $\Omega - B(x_0, r)$. Le premier potentiel peut être pris pour w_1. Dans le cas $n = 2$, on ajoute des constantes convenables aux potentiels logarithmiques analogues pour les rendre $\geqslant 0$.

Théorème. (18) *L'ensemble des points d'un ensemble E où E est effilé est polaire.*

On se ramène au cas de $E \subset \Omega$ ouvert borné. Introduisons selon le lemme une fonction surharmonique $w > 0$ dans Ω et une décomposition $w = w_1 + w_2$, où w_1 répond aux conditions du lemme. Si E est effilé en x_0, on a $\mathcal{B}_w^E(x_0) < w_1(x_0)$ d'où

$$\mathcal{B}_w^E(x_0) \leqslant \mathcal{B}_{w_1}^E(x_0) + \mathcal{B}_{w_2}^E(x_0) < w_1(x_0) + w_2(x_0) = w(x_0).$$

Les points de E où E est effilé sont les points de E où $\mathcal{B}_w^E < w$ et forment par conséquent un ensemble polaire.

Remarque.

1. L'ensemble où $\mathcal{B}_w^E < w$ est un K_σ. Comme tout ensemble polaire est contenu dans un $K_{\sigma\delta}$ polaire, l'ensemble du théorème est l'intersection de E et d'un $K_{\sigma\delta}$ polaire.

2. On peut aussi démontrer le théorème en utilisant l'autre critère (§ 3, fin), en se servant d'une base dénombrable d'ouverts (ω_i) de Ω et en considérant $\mathcal{B}_w^{E\cap\omega_i}$, avec w continue, par exemple constante (voir le cours de Bombay mentionné fin chap. V).

Corollaire. *Pour qu'un ensemble soit polaire, il faut et il suffit qu'il soit effilé en chacun de ses points.*

§ 5. — Cas des ensembles fermés.

Lemme. *Soit E un ensemble fermé dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$. Il existe une fonction surharmonique finie et continue $U > 0$ qui n'est harmonique dans aucune composante connexe de $\Omega - E$.*

Tel est (en ajoutant au besoin une constante) le potentiel de la mesure de Lebesgue dans Ω, ou encore $x \to k - \|x - x_0\|$ (k Cte, $x_0 \in \omega$).

Théorème. *Soit E un ensemble fermé dans Ω borné. Pour que E soit non effilé en $x_0 \in E^* \cap \Omega$, il faut et il suffit qu'il existe dans $\Omega - E$ (ou seulement au voisinage de x_0 dans $\Omega - E$) une fonction surharmonique > 0 tendant vers 0 en x_0.*

Si E n'est pas effilé en $x_0 \in E^* \cap \Omega$, la fonction $\mathcal{B}_U^E$ relative à Ω et à la fonction U du lemme, vaut $U(x_0)$ en x_0, et l'on a

$$\liminf_{x\to x_0,\, x\in \complement E} \mathcal{B}_u^E \geqslant U(x_0).$$

Comme U est continue et majore $\mathcal{B}_U^E$, la fonction $U - \mathcal{B}_U^E$ satisfait aux conditions de l'énoncé.

(18) Un théorème récent plus fort de Choquet est que l'ensemble de points de Ω où E est effilé, peut être enfermé dans un ouvert dont l'intersection avec E est de capacité arbitrairement petite (voir bibl.) (au point de vue local dans une boule ou globalement avec la capacité relative au noyau de Green, selon la mention chap. V § 3).

https://spartacus-idh.com

Il est plus délicat de montrer que la condition est suffisante. Soient B une boule ouverte de centre x_0 et v une fonction surharmonique > 0 dans $B \cap \complement E$ tendant vers 0 en x_0. Si E est effilé en x_0, il existe une fonction sousharmonique u bornée supérieurement dans un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, telle que $u(x_0) = 1$ et $u(x) < -1$ pour $x \in \mathcal{V} \cap E$, $x \neq x_0$. On peut supposer $B \subset \mathcal{V}$. Soit dans B une boule concentrique plus petite B_1 ; u est < 0 sur un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de $E \cap B_1^*$ et $\inf_{x \in B_1^* \cap \complement \mathcal{W}} v(x) > 0$. Donc il existe un nombre $\lambda > 0$ assez grand pour que $x \in B_1^* \cap \complement E$ entraîne $u(x) - \lambda v(x) \leqslant 0$.
Par suite $u - \lambda v - \varepsilon h_{x_0}$ (ε nombre > 0 arbitraire) est négatif dans $B_1 \cap \complement E$, car en tout point y de $(B_1^* \cap \complement E)^*$ on a

$$\limsup_{x \to y, x \in B_1 \cap \complement E} (u(x) - \lambda v(x) - \varepsilon h_{x_0}(x)) \leqslant 0.$$

Comme ε est arbitraire, on a $u(x) \leqslant \lambda v(x)$ pour $x \in B_1 \cap \complement E$, donc

$$\limsup_{x \to x_0, x \in \complement E} u(x) \leqslant 0,$$

ce qui, avec $u(x) \leqslant -1$ pour $x \in B_1 \cap E$, est incompatible avec $u(x_0) = 1$. Donc E n'est pas effilé en x_0.

Remarque VII.5.1. Il existe même une fonction harmonique $v > 0$ dans $\Omega - E$ s'annulant en x_0 et telle que pour tout voisinage V de x_0 on ait $\inf_{x \notin V} v(x) > 0$, si E n'est pas effilé en x_0.

Il suffit de prendre $U(x_0) - \mathcal{B}_U^E \geqslant U(x_0) - U$, où U est une fonction surharmonique > 0 satisfaisant à $U(x_0) > \sup_{x \notin V} U(x)$ pour tout voisinage V de x_0, p. ex. $U = k - \|x - x_0\|$.

Remarque VII.5.2. Si $E \subset \Omega$ est non effilé en x_0, alors pour tous les domaines composants ω_i de $\Omega - E$, $\complement \omega_i$ n'est pas effilé en x_0 et réciproquement.

Car dans la réciproque on associe à chaque ω_n une fonction surharmonique v_n, $0 < v_n < 1/n^2$ qui, pour $x_0 \in \overline{\omega_n}$, tend vers 0 quand $x \in \omega_n$ tend vers x_0. Cela définit dans $\complement E$ une fonction surharmonique montrant que E est non effilé.

Application. Dans le plan, un segment de droite ouvert n'est effilé en aucun de ses points, car avec deux fonctions linéaires s'annulant sur le segment, on forme au voisinage de chaque point x_0 du segment une fonction harmonique > 0 hors du segment, s'annulant en x_0.

On en déduit qu'un segment ouvert ou fermé n'est pas effilé en ses extrémités.

Corollaire. *Si un ensemble E quelconque du plan est effilé en un point x_0, il existe des circonférences arbitrairement petites de centre x_0 ne rencontrant pas E. (Équivalent, pour E fermé, à un résultat de Beurling).*

Car si on rabat E sur une demi-droite d'origine x_0 par des rotations autour de ce point, on obtient un ensemble linéaire E' effilé comme E (chap. V § 2, prop. 4), qui ne peut contenir un segment ouvert d'extrémité x_0.

C'est là une propriété topologique qui n'a pas d'analogue dans les espaces de dimensions $\geqslant 3$ (*cf.* épine de Lebesgue), et qui, sous une forme différente un

© Spartacus-Idh 2019

peu moins forte, pour E fermé avec le langage des points irréguliers, avait été remarquée par Lebesgue en 1907.

En conséquence un ensemble polaire plan est totalement discontinu. Mais signalons que dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble fermé de Cantor sur l'axe des abscisses obtenu à partir de $[0,1]$ par ablation répétée des tiers du milieu n'est effilé en aucun de ses points [19] donc d'intersection non polaire dans tout voisinage d'un de ses points, mais de mesure linéaire nulle.

§ 6. — Topologie fine.

Dès l'introduction de l'effilement, H. Cartan en a remarqué une interprétation topologique importante. On appelle avec lui topologie fine dans $\mathbb{R}^n$ la moins fine des topologies qui rendent continues toutes les fonctions surharmoniques dans $\mathbb{R}^n$. Les qualificatifs « fin », « finement » signifieront « en topologie fine ».

Théorème (Cartan). *Dans la topologie fine, les voisinages d'un point sont les ensembles contenant ce point et de complémentaire effilé en ce point.*

La topologie fine est engendrée par les images réciproques, au moyen des fonctions surharmoniques v dans $\mathbb{R}^n$, des ensembles $\overline{\mathbb{R}}$, $]\alpha,+\infty]$, $]-\infty,\beta[$, $]\alpha,\beta[$, (α, β finis).

Le premier type est un ouvert ordinaire, vu la semi-continuité des v, le dernier type est l'intersection d'un ouvert ordinaire et d'un ensemble du deuxième type. Noter que les ouverts ordinaires sont des ouverts fins, comme réunion de boules ouvertes puisqu'une boule $B(x_0,r)$ est l'ensemble où $h_{x_0} > h(r)$. Autrement dit la topologie fine est plus fine que la topologie euclidienne.

Considérons alors un voisinage fin $\mathcal{V}$ de x_0. Il contient un ouvert fin contenant x_0, qui est intersection finie d'ouverts de l'un des trois types, c'est-à-dire soit un ouvert ordinaire, soit l'intersection d'un ouvert ordinaire contenant x_0 et de plusieurs ensembles e_i : $v^{-1}([-\infty,\beta_i[)$ avec $v(x_0) < \beta_i$. Sur $\complement e_i$, on a $v \geqslant \beta_i$ donc $\complement e_i$ est effilé en x_0 et de même la réunion de ces $\complement e_i$.

Réciproquement, soit un ensemble $\mathcal{V}$ tel que $x_0 \in \mathcal{V}$ et $\complement\mathcal{V}$ soit effilé en x_0. Si x_0 est intérieur à $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ est voisinage ordinaire donc fin, de x_0. Si $x_0 \in \mathcal{V}^*$, il existe au voisinage de x_0 une fonction v surharmonique telle que $v(x_0) < \beta < \liminf_{x\to x_0, x\notin\mathcal{V}} v(x)$, (qu'on peut d'ailleurs prendre bornée) donc aussi (chap. III, lemme 1) une fonction surharmonique dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant à ces propriétés et qu'on notera encore v. Ainsi pour un voisinage ordinaire convenable δ de x_0, on a $v \geqslant \beta$ dans $\delta \cap \complement\mathcal{V}$, c'est-à-dire

$$v^{-1}([-\infty,\beta[) \subset \complement(\delta \cap \complement\mathcal{V}) = \mathcal{V} \cup \complement\delta$$

d'où $\delta \cap v^{-1}([-\infty,\beta[) \subset \mathcal{V}$. Donc $\mathcal{V}$ est un voisinage fin de x_0.

Remarque.

1. Un raisonnement très voisin appliqué aux fonctions surharmoniques finies fournit les mêmes voisinages donc la même topologie.

(19) Cela résulte p. ex. du critère de Wiener, laissé de côté ici. Voir bibl. 1re réf.

https://spartacus-idh.com

2. Toute fonction surharmonique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ y est finement continue, puisque sa restriction à une boule fermée contenue dans l'ouvert peut se prolonger surharmoniquement dans $\mathbb{R}^n$.
3. Pour qu'un ensemble E soit effilé en l'un de ses points, il faut et il suffit que ce point soit finement isolé dans E.

Limite fine. (20)

Soit non E effilé en x_0 qui est donc finement adhérent à E. Considérons une fonction numérique f (finie ou non) sur E. Dire qu'elle admet la limite λ en x_0 au sens de la topologie fine (limite fine, dite aussi pseudo-limite) c'est dire que quel que soit le voisinage δ de λ dans $\overline{\mathbb{R}}$, il existe un voisinage fin $\mathcal{V}$ de x_0 tel que $x \in \mathcal{V} \cap E$ entraîne $f(x) \in \delta$.

Théorème (Cartan). *Soient x_0 un point finement adhérent à un ensemble E et f une fonction définie sur E et admettant une limite fine λ en x_0. Il existe un voisinage fin $\mathcal{V}$ de x_0 tel que λ soit limite en x_0 de la restriction de f à $E \cap \mathcal{V}$ au sens de la topologie habituelle de $\mathbb{R}^n$.*

On peut se placer dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit (δ_n) une base de voisinages de λ. Il existe pour tout n un voisinage fin $\mathcal{V}_n$ de x_0 tel que $x \in E \cap \mathcal{V}$ entraîne $f(x) \in \delta_n$. Soit v_n surharmonique > 0 dans Ω, finie en x_0, telle que l'on ait $\lim_{x \to x_0, x \in e_n} v_n(x) = +\infty$ pour x_0 adhérent à $e_n = \complement \mathcal{V}_n$. On choisit des $\lambda_n > 0$ tels que $\sum_n \lambda_n v_n(x_0)$ soit fini ; alors $v = \sum_n \lambda_n v_n$ est surharmonique et finie en x_0.

Introduisons la partie e'_n de e_n où $\lambda_n v_n > n$ et $F = \cup_n e'_n$. On va montrer que $\lim_{x \to x_0, x \in F} v(x) = +\infty$ pour $x_0 \in \overline{F}$; il en résultera que F est effilé en x_0.

Le nombre N étant choisi, on a $\lambda_n v_n \geqslant N$ dans e'_n pour $n \geqslant N$; d'autre part pour $n < N$, il existe un voisinage ω_n de x_0 tel que $\lambda_n v_n \geqslant N$ dans $e'_n \cap \omega_n$. Alors, pour $\omega = \bigcap_1^N \omega_n$, $x \in F \cap \omega$ entraîne $v(x) \geqslant N$. Remarquons enfin que, n étant fixé, il existe un voisinage α de x_0 tel que $\alpha \cap e_n \subset e'_n$, donc $\alpha \cap e_n \subset \alpha \cap F$ d'où $\alpha \cap \complement e_n \supset \alpha \cap \complement F$ et $\mathcal{V}_n \supset \alpha \cap \complement F$. On satisfait donc à l'énoncé en prenant $\mathcal{V} = \complement F$.

Exemple de limite fine.

Théorème. *Soient E un ensemble fermé effilé en un point x_0 et v une fonction surharmonique > 0 définie sur $\complement E$ au voisinage de x_0 ; alors v admet une limite fine en x_0 (on sait même qu'elle est > 0)* (21).

En effet, soit au voisinage de x_0 une fonction w surharmonique finie en x_0 et telle que $\lim_{x \to x_0, x \neq x_0, x \in E} w(x) = +\infty$. Supposons d'abord que

$$\lambda = \liminf_{x \to x_0, x \in \complement E} (v + w)(x) < +\infty,$$

et soit $k > \lambda$; on voit immédiatement qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout point $y \in V \cap (E^* - \{x_0\})$ on ait $\liminf_{x \to y, x \in \complement E} (v + w)(x) > k$. La

(20) La question est approfondie et étendue axiomatiquement dans une étude abstraite, inspirée aussi de Doob (voir Brelot, bibl. 6e réf. et *Lecture Notes* 31).

(21) Voir avec des compléments et des précisions si v est harmonique, Brelot, bibliogr. 4e et 5e réf.

© Spartacus-Idh 2019

fonction $u_1 = \inf(v+w, k)$ est surharmonique dans $\complement E$ et vaut k au voisinage de tout $y \in V \cap (E^* - \{x_0\})$.

Prolongeons u_1 à $E - \{x_0\}$ par k ; d'après ce qui précède, ce prolongement est surharmonique dans $V - \{x_0\}$ et se prolonge surharmoniquement selon une fonction v à V tout entier. Ainsi la fonction u surharmonique dans V est finement continue et admet une limite fine égale à

$$u(x_0) = \liminf_{x \to x_0, x \neq x_0} u(x) = \lambda < k.$$

On voit donc que dans $\complement E$, les fonctions u_1 et $v+w$ admettent la même limite fine en x_0 ; de plus, w étant surharmonique et finie en x_0 admet la limite fine $w(x_0)$ finie. Il en résulte que v admet une limite fine en x_0.

Si $\liminf_{x \to x_0, x \in \complement E}(v+w)(x)$ est infini, $v+w$ admet évidemment la limite fine $+\infty$ en x_0, et la conclusion subsiste.

Nota. Une propriété analogue a lieu pour le quotient par $h(\|x - x_0\|)$ (voir bibl. 4e réf., 2e article) ; elle est liée à un critère d'effilement (bibl. 2e réf.).

Bibliographie

Brelot Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *J. de Math.* , t. 19, 1940.

Brelot Sur les ensembles effilés, *Bull. Sc. Math.*, 1944

Brelot Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités, *J. de Math. 24*, 1945.

Brelot *Annales Univ. de Grenoble*, t. 22, p. 167 et p. 205.

Brelot *Journal d'Analyse Math. IV*, 1954-56.

Brelot Introduction axiomatique de l'effilement, (22) *Annali di matematica*, 1962.

Choquet *Annales Inst. F.* t. 9 (1959) p. 91.

Deny *Acta Math.* t. 82, 1950.

Deny *Annales Un. de Grenoble*, t. 23, 1948.

N. Wiener *J. Math. Phys.* III, 1924 ou *M.I.T.* 1924.

(22) On y étudie l'effilement et la topologie fine relatifs à une famille générale donnée de fonctions $\geqslant 0$ et s.c.i. Voir un aperçu plus récent sur la topologie fine dans un article de Brelot (*Lecture Notes* no 31, 1967).

https://spartacus-idh.com

PROBLÈMES DE DIRICHLET DANS $\mathbb{R}^n$

§ 1. — Définition de la fonction $\overline{H}_f$.

La méthode employée dans ce chapitre est issue d'un travail de Perron (1923).

Elle repose sur une idée d'approximation qu'on trouve déjà dans Peano (1880) pour l'étude d'une équation différentielle $y' = f(x,y)$:

> *à une valeur initiale y_0 de y on associe la famille Ψ des fonctions y telles que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x) \leqslant f(x,y(x))$, et la famille Φ des fonctions z telles que $z(x_0) = y_0$ et $z'(x) \geqslant f(x,z(x))$ (y, z dérivables) ; on est amené à considérer les fonctions $u = \sup_{y\in\Psi} y$ et $v = \inf_{z\in\Phi} z$ qui fournissent des intégrales de l'équation donnée avec valeur initiale y_0.*

C'est cette méthode que nous allons adapter à la résolution du problème de Dirichlet dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ en utilisant au lieu des y et z des fonctions sousharmoniques et surharmoniques satisfaisant à des conditions aux limites.

On se limitera ici à un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction numérique (finie ou non) définie sur la frontière Ω^*. Désignons par Φ_f^Ω ou seulement Φ l'ensemble des fonctions v surharmoniques au sens large dans Ω, chacune bornée inférieurement et telles que

$$\liminf_{y\to x} v(y) \geqslant f(x)$$

quel que soit $x \in \Omega^*$. On posera

$$\overline{H}_f^\Omega = \inf_{v\in\Phi} v.$$

On peut considérer de même l'ensemble Ψ des fonctions u sousharmoniques au sens large bornées (chacune) supérieurement et telles que

$$\limsup_{y\to x} u(y) \leqslant f(x)$$

quel que soit $x \in \Omega^*$. On posera

$$\underline{H}_f^\Omega = \sup_{u\in\Psi} u.$$

On a $\underline{H}_f^\Omega = -\overline{H}_{-f}^\Omega$.

Remarque VIII.1.1. Si ω est une composante connexe de Ω, on a, dans ω,

$$\overline{H}_f^\omega = \overline{H}_f^\Omega,$$

car toute fonction surharmonique de la famille Φ^ω prolongée par $+\infty$ devient une fonction de Φ^Ω.

© Spartacus-Idh 2019

Remarque VIII.1.2. Si f est la restriction à Ω^* d'une fonction F surharmonique dans un ouvert $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$, $\overline{H}_f^{\Omega}$ prolongée par F est $S_{\mathcal{B}}$ et surmédiane dans Ω_0 ; et si $F \geqslant 0$, $\overline{H}_f^{\Omega}$ vaut dans Ω la réduite $(R_F^{\complement\Omega})_{\Omega}$.

Car si $v \in \Phi$, la fonction $\inf(v, F)$ prolongée par F est surharmonique dans Ω_0. De même si v est hyperharmonique $\geqslant 0$ dans Ω et si ω est un ouvert partiel, $R_v^{\complement\omega}$ et $\hat{R}_v^{\complement\omega}$ prises dans Ω valent $\overline{H}_{\varphi}^{\omega}$ dans ω, φ étant la fonction v prolongée par 0.

§ 2. — Propriétés.

1. Nature de la fonction $\overline{H}_f$ en x

La fonction $\overline{H}_f^{\Omega} = \inf_{v\in\Phi} v$ est dans chaque composante connexe de Ω égale à $+\infty$ ou à $-\infty$, ou bien est harmonique.

En effet, soit $\overline{B}$ une boule fermée contenue dans une composante connexe de Ω. Pour toute fonction $v \in \Phi$, la fonction v' égale à v dans $\Omega - B$ et à l'intégrale de Poisson de v dans B est encore surharmonique au sens large, donc appartient à Φ ; comme $v' \leqslant v$ on a $\overline{H}_f = \inf_{v\in\Phi} v = \inf_{v\in\Phi} v'$. En particulier $\overline{H}_f$ vaut dans B l'enveloppe inférieure des intégrales de Poisson I_v^B $(v \in \Phi)$; si toutes ces intégrales sont infinies, on a $\overline{H}_f = +\infty$ dans B ; sinon celles qui ne sont pas infinies forment une famille filtrante à gauche, car Φ elle-même est filtrante à gauche ; alors $\overline{H}_f = \inf_{v\in\Phi} I_v^B$ est harmonique ou égale à $-\infty$ dans B. Le théorème en résulte aisément.

2. Comparaison de $\underline{H}_f$ et $\overline{H}_f$

Considérons en effet une fonction $u \in \Psi$ et une fonction $v \in \Phi$. La fonction $u - v$ est sousharmonique au sens large dans Ω. Soit x un point de Ω^* tel que $|f(x)| < +\infty$. Comme on a

$$\limsup_{y\to x} u(y) \leqslant f(x) \qquad \text{et} \qquad \liminf_{y\to x} v(y) \geqslant f(x)$$

on a $\limsup_{y\to x}(u(y) - v(y)) \leqslant 0$. De même, si $f(x) = +\infty$ en un point x de Ω^*, on a $\lim_{y\to x} v(y) = +\infty$. Or $\limsup_{y\to x} u(y) < +\infty$ car u est bornée supérieurement, donc

$$\limsup_{y\to x}(u(y) - v(y)) = -\infty.$$

Enfin, si $f(x) = -\infty$, on a $\lim_{y\to x} u(y) = -\infty$ et $\liminf_{y\to x} v(y) > -\infty$ donc

$$\limsup_{y\to x}(u(y) - v(y)) = -\infty.$$

On a ainsi $\limsup_{y\to x}(u(y) - v(y)) \leqslant 0$ pour tout $x \in \Omega^*$; il en résulte que $u - v \leqslant 0$ (principe du maximum). Comme u et v sont deux fonctions quelconques de Ψ et Φ respectivement, on a $\underline{H}_f \leqslant \overline{H}_f$.

S'il y a égalité en un point, il y a égalité dans la composante connexe de Ω contenant ce point et la valeur commune y est $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique.

https://spartacus-idh.com

Résolutivité. On dit qu'une fonction f définie sur Ω^* est résolutive si les fonctions $\underline{H}_f^\Omega$ et $\overline{H}_f^\Omega$ sont finies et égales dans Ω. On pose alors

$$H_f^\Omega = \underline{H}_f^\Omega = \overline{H}_f^\Omega$$

et on dit que H_f est la *solution généralisée du problème de Dirichlet* relatif à f ; c'est une fonction harmonique. Lorsqu'il y a une solution classique pour f finie et continue, cette solution appartient à Φ et Ψ, donc est égale à la solution généralisée.

D'après ce qui précède, pour que f soit résolutive, il suffit qu'il existe dans chaque composante connexe de Ω un point x tel que $\underline{H}_f^\Omega(x) = \overline{H}_f^\Omega(x) \neq \pm\infty$.

3. Propriétés de la fonctionnelle $\overline{H}_f$ de f

α. Pour toute fonction f définie sur Ω^* et toute constante k finie, on a $\overline{H}_{f+k} = \overline{H}_f$. Pour toute constante $\lambda > 0$ on a $\overline{H}_{\lambda f} = \lambda \overline{H}_f$, $\overline{H}_{-\lambda f} = -\lambda \underline{H}_f$.

β. L'application $f \to \overline{H}_f$ est croissante. Donc $\inf f \leqslant \overline{H}_f \leqslant \sup f$.

γ. Quelles que soient les fonctions f et g définies sur Ω^*, on a $\overline{H}_{f+g} \leqslant \overline{H}_f + \overline{H}_g$ lorsque le second membre a partout un sens et en définissant arbitrairement $f + g$ là où il est indéterminé.

En effet, si $u \in \Phi_f$ et $v \in \Phi_g$, on a avec la convention précédente

$$\liminf_{y \to x} (u(y) + v(y)) \geqslant f(x) + g(x)$$

quel que soit $x \in \Omega^*$, donc $u + v \in \Phi_{f+g}$ et $u + v \geqslant \overline{H}_{f+g}$. Donc si f et g sont résolutives, on a $H_{\lambda f + \mu g} = \lambda H_f + \mu H_g$ avec les conventions $0 \cdot \infty = 0$, $+\infty - \infty$ arbitraire.

δ. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions définies sur Ω^* et telles que $\overline{H}_{f_n} > -\infty$ pour tout indice n. Si $f = \lim f_n$ on a $\overline{H}_f = \lim \overline{H}_{f_n}$.

On se ramène au cas où Ω est connexe.

Supposons d'abord $\overline{H}_{f_n}$ fini quel que soit n ; soient $\varepsilon > 0$ et (ε_n) une suite de nombres > 0 telle que $\varepsilon = \sum_n \varepsilon_n$. Considérons un point x_0 de Ω. Pour chaque indice n il existe une fonction surharmonique $v_n \in \Phi_{f_n}$ telle que $v_n(x_0) - H_{f_n}(x_0) \leqslant \varepsilon_n$. La fonction $w = \lim_n \overline{H}_{f_n} + \sum_{n=1}^\infty (v_n - \overline{H}_{f_n})$ est surharmonique au sens large, et l'on a, pour tout entier n, $w \geqslant \overline{H}_{f_n} + v_n - \overline{H}_{f_n} = v_n$. Il en résulte que w est bornée inférieurement et que $\liminf_{y \to x} w(y) \geqslant f_n(x)$ pour tout $x \in \Omega^*$ et quel que soit n. En d'autres termes $w \in \Phi_{f_n}$ pour tout n. Soient $y_0 \in \Omega^*$ et $\lambda < f(y_0)$ pour $f(y_0) > -\infty$. Il existe un entier n tel que $\lambda \leqslant f_n(y_0) \leqslant f(y_0)$ d'où $\liminf_{y \to y_0} w(y) \geqslant f_n(y_0) \geqslant \lambda$. On a par suite $\liminf_{y \to y_0} w(y) \geqslant f(y_0)$ puisque λ est arbitraire. Ainsi $w \in \Phi_f$ et $w \geqslant \overline{H}_f$. On a donc au point x_0

$$\overline{H}_f(x_0) \leqslant \lim_{n \to \infty} \overline{H}_{f_n}(x_0) + \sum_{n=1}^\infty (v_n(x_0) - \overline{H}_{f_n}(x_0)) \leqslant \lim_{n \to \infty} \overline{H}_{f_n}(x_0) + \varepsilon$$

puis $\overline{H}_f(x_0) \leqslant \lim_{n \to \infty} \overline{H}_{f_n}(x_0)$ puisque ε est arbitraire. Or $\lim \overline{H}_{f_n} \leqslant \overline{H}_f$. Comme les deux membres sont des fonctions harmoniques (ou $+\infty$), il résulte du principe du maximum que l'on a $\overline{H}_f = \lim_{n \to \infty} \overline{H}_{f_n}$.

© Spartacus-Idh 2019

S'il existe un indice m tel que $\overline{H}_{f_m} = +\infty$, on a $\overline{H}_{f_n} = +\infty$ pour $n \geqslant m$ et $\overline{H}_f = +\infty$: la propriété annoncée est encore vraie.

ε. Si ω est ouvert $\subset \Omega$ et f une fonction sur Ω^* de prolongement F égal à $\overline{H}_f^\Omega$ dans Ω, on a $\overline{H}_f^\omega = \overline{H}_f^\Omega$ dans ω.

On se ramène au cas de Ω et ω connexes. Puis d'après les définitions des H, $\overline{H}_f \geqslant \overline{H}_F^\omega$. Ensuite, si $\overline{H}_f = -\infty$, il y a bien l'égalité cherchée ; si $\overline{H}_f = +\infty$, toute fonction hyperharmonique de Φ_F^ω prolongée par $+\infty$ donne une fonction hyperharmonique majorant $\overline{H}_f$, d'où $\overline{H}_F^\omega = +\infty$. Soit enfin $\overline{H}_f$ fini. Soit w une fonction quelconque de Φ_F^ω ; alors la fonction valant $\inf(w, \overline{H}_f^\Omega)$ dans ω, prolongée par $\overline{H}_f^\Omega$, est une fonction hyperharmonique V dans Ω. Introduisons $v \in \Phi_f^\Omega$ et étudions $U = V + v - \overline{H}_f^\Omega$. En considérant les ensembles où $V = w$ dans Ω, ou bien $V = \overline{H}_f^\Omega$ dans Ω, on conclut que $\liminf U \geqslant f$ et $\liminf U > -\infty$ en tout point-frontière de Ω, d'où $U \geqslant H_f^\Omega$, $V \geqslant H_f^\Omega$, donc $w \geqslant \overline{H}_f^\Omega$ et enfin $\overline{H}_F^\omega \geqslant \overline{H}_f^\Omega$.

Lorsque f est résolutive, on conclut que F l'est aussi pour ω et que $H_F^\omega = H_f^\Omega$, ce qui est facile à démontrer directement.

§ 3. — Cas de la donnée-frontière finie continue.

Théorème (Wiener). *Toute fonction f finie continue sur Ω^* est résolutive.*

Montrons-le d'abord dans le cas particulier où f admet dans $\overline{\Omega}$ un prolongement fini continu F surharmonique dans Ω.

On a $F \in \Phi_f$ d'où $F \geqslant \overline{H}_f$, et quel que soit $x \in \Omega^*$

$$\limsup_{y \to x} \overline{H}_f(y) \leqslant \limsup_{y \to x} F(y) = F(x) = f(x)$$

d'où $\overline{H}_f \in \Psi_f$ et $\underline{H}_f = \overline{H}_f$.

La suite de la démonstration résulte des lemmes suivants :

Lemme VIII.3.1. *Une limite uniforme de fonctions résolutives uniformément bornées f_n est elle-même résolutive et d'ailleurs $H_{f_n} \to H_{\lim f_n}$.*

En effet, $f_n - \varepsilon \leqslant \lim f_n \leqslant f_n + \varepsilon$ entraîne

$$H_{f_n} - \varepsilon \leqslant \underline{H}_{\lim f_n} \leqslant \overline{H}_{\lim f_n} \leqslant H_{f_n} + \varepsilon.$$

Lemme VIII.3.2. *Toute fonction f finie et continue sur un compact K peut être approchée uniformément par la différence de deux fonctions finies et continues, surharmoniques à l'intérieur de K (et si l'on veut $\geqslant 0$ sur K).*

Historiquement, on l'a d'abord vu en approchant f par un polynôme φ.

Les polynômes $x \to \varphi((x_i)) + kx_1^2$ et $x \to kx_1^2$ sont surharmoniques dans toute boule fixée, pour $k < 0$ convenable. Plus directement, selon une remarque de M^me^ Hervé dans une axiomatique ultérieure, cela vient d'un théorème

https://spartacus-idh.com

d'approximation de Stone [23], de l'existence d'une fonction surharmonique séparant deux points quelconques x_1 et x_2, comme la fonction $x \to -\|x - x_1\|$, et du lemme

Lemme VIII.3.3. *Si u et v sont deux fonctions finies continues et surharmoniques dans un ouvert, $u - v$, ainsi d'ailleurs que $(u-v)^+$, $(u-v)^-$, $\sup(u,v)$ et $\inf(u,v)$, sont des différences de fonctions surharmoniques finies continues.*

En effet $(u-v)^+ = u - \inf(u,v)$; $(u-v)^- = v - \inf(u,v)$; $\sup(u,v) = u + v - \inf(u,v)$.

Même énoncé d'ailleurs si l'on supprime les restrictions sur la continuité des fonctions, mais en considérant les différences et égalités quasi-partout.

Variation de Ω. Soit f une fonction numérique continue définie sur Ω^*. Considérons un prolongement fini continu F de f à Ω. Si (Ω_n) est un recouvrement de Ω par une suite croissante d'ouverts $\Omega_n \subset \Omega$, on a

$$H_f^{\Omega} = \lim_n H_F^{\Omega_n}.$$

Le plus bref est de déduire la propriété du cas où F est surharmonique dans Ω grâce au lemme d'approximation. Or, dans ce cas, la suite $H_F^{\Omega_n}$ est $\leqslant F$, décroissante et $\geqslant H_F$, car pour $u \in \Phi_F^{\Omega_n}$, la fonction $\inf(u, F)$ prolongée par F appartient à $\Phi_F^{\Omega_p}$ $(p > n)$ et à Φ_F^{Ω}, la limite de $H_F^{\Omega_n}$ est $\geqslant H_F^{\Omega}$, mais aussi harmonique $\leqslant F$, donc appartient à Ψ_F^{Ω} et est $\leqslant H_F$.

D'ailleurs le seul principe du maximum suffit pour une démonstration directe. (Voir bibl. Brelot 1re réf.).

Remarque. Signalons que pour f finie continue, H_f est la seule fonction harmonique qu'on puisse faire correspondre à f de façon qu'elle soit linéaire et croissante par rapport à f et coïncide avec la solution du problème classique lorsqu'elle existe. Ce résultat de Keldych (valable dans $\mathbb{R}^n$, $(n \geqslant 2)$ dont la démonstration originale était compliquée se démontre maintenant très simplement (voir Brelot, *Journal d'analyse math.* VIII, 1960-61).

Mesure harmonique. Soit x un point de Ω. L'application $f \to H_f(x)$ (f finie et continue sur Ω^*) définit une mesure positive sur le compact Ω^*. Nous désignerons cette mesure par μ_x^{Ω} ou brièvement μ_x : c'est la *mesure harmonique* au point $x \in \Omega$. Ainsi

$$H_f(x) = \int f(y)\, \mathrm{d}\mu_x(y)$$

pour toute fonction f continue sur Ω^* (formule de De La Vallée Poussin obtenue à l'aide du balayage).

Noter que la propriété sur la variation de Ω, $\lim_n H_F^{\Omega_n} = H_F$ équivaut pour les mesures harmoniques à ce que $\mu_x^{\Omega_n}$ converge vaguement vers μ_x^{Ω}.

(23) Si H est un espace vectoriel réel de fonctions finies continues sur un espace compact X, contenant les constantes, séparant les points de X, et tel que $u \in H \Rightarrow |u| \in H$, alors toute fonction numérique continue dans X peut être approchée uniformément par des fonctions de H.

© Spartacus-Idh 2019

§ 4. — Théorème fondamental de résolutivité [24].

Théorème (Brelot). *Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et x un point quelconque de Ω. Pour qu'une fonction f définie sur Ω^* soit résolutive, il faut et il suffit qu'elle soit μ_x-intégrable ; on a alors $H_f(x) = \int f \, d\mu_x$. On a même, quelle que soit f, les relations $\overline{H}_f(x) = \int^* f \, d\mu_x$ et $\underline{H}_f(x) = \int_* f \, d\mu_x$.*

Montrons d'abord que si f est semi-continue inférieurement $> -\infty$ donc bornée inférieurement, $\overline{H}_f(x) = \underline{H}_f(x) = \int f \, d\mu_x \leqslant +\infty$. En effet, f est limite d'une suite croissante de fonctions finies continues f_n sur Ω^* ; grâce à la propriété fondamentale (§ 2, n° **3**, **δ**), on a

$$\overline{H}_f(x) = \sup_n \overline{H}_{f_n}(x) = \sup_n \int f_n \, d\mu_x = \int f \, d\mu_x.$$

De plus $\overline{H}_{f_n} = \underline{H}_{f_n} \leqslant \underline{H}_f$ d'où $\sup_n \overline{H}_{f_n} \leqslant \underline{H}_f$ c'est-à-dire $\overline{H}_f \leqslant \underline{H}_f$. Donc $\overline{H}_f(x)$ et $\underline{H}_f(x)$ valent $\int f \, d\mu_x$ fini ou non. De même si f est semi-continue supérieurement et $< +\infty$.

Considérons maintenant une fonction f quelconque. Montrons que

$$\overline{H}_f(x) = \int^* f \, d\mu_x$$

(et par suite $\underline{H}_f(x) = \int_* f \, d\mu_x$). Désignons par Θ l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement $> -\infty$, définies sur Ω^*, et majorant f. Par définition

$$\int^* f \, d\mu_x = \inf_{\varphi \in \Theta} \int \varphi \, d\mu_x = \inf_{\varphi \in \Theta} \overline{H}_\varphi(x) \geqslant \overline{H}_f(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe, x étant choisi, une fonction $v \in \Phi_f$ telle que $v(x) \leqslant \overline{H}_f(x) + \varepsilon$. La fonction $\theta : z \to \liminf_{y \to z} v(y)$, $(z \in \Omega^*)$ appartient évidemment à Θ et l'on a $\overline{H}_\theta \leqslant v$. Ainsi $\overline{H}_\theta(x) \leqslant \overline{H}_f(x) + \varepsilon$, donc $\int^* f \, d\mu_x \leqslant \overline{H}_f(x)$.

Remarque. Si $\overline{H}_f$ est finie, il existe $g \geqslant f$, résolutive et même borélienne telle que $H_g = \overline{H}_f$. On le déduit du cas d'un domaine, où l'on remarque que $\overline{H}_f(x) = \inf_i \overline{H}_{f_i}(x)$ pour les f_i semi-continues inférieurement $> -\infty$ et majorant f, donc (d'abord en fixant x) pour une suite décroissante de telles fonctions.

§ 5. — Ensembles négligeables sur la frontière.

Critère. Considérons un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$. Pour qu'une partie e de Ω^* soit de μ_x-mesure nulle quel que soit $x \in \Omega$ (auquel cas on dit que e est négligeable pour Ω), il faut et il suffit qu'il existe une fonction surharmonique positive v dans Ω telle que $\lim_{x \to y} v(x) = +\infty$ pour tout $y \in e$.

Désignons par φ la fonction caractéristique de e ; dire que e est négligeable, c'est dire que $\overline{H}_\varphi = 0$. Supposons d'abord Ω connexe et soient $\varepsilon > 0$ et

(24) Dans la démonstration originale (Brelot, *Acta Szeged* (1939)), on utilisait une étude de l'allure des enveloppes à la frontière.

https://spartacus-idh.com

(ε_n) une suite de nombres > 0 tels que $\varepsilon = \sum \varepsilon_n$. Considérons un point $x_0 \in \Omega$; si $\overline{H}_\varphi(x_0) = 0$, pour tout entier n il existe une fonction $v_n \in \Phi_\varphi$ telle que $v_n(x_0) \leqslant \varepsilon_n$. Comme $\liminf_{x\to y} v_n(x) \geqslant \varphi(y) \geqslant 0$ quel que soit $y \in \Omega^*$, on a $v_n \geqslant 0$. Ainsi la fonction $v = \sum v_n$ finie en x_0 est surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω. Soit $y \in e$; pour tout indice n, on a $\liminf_{x\to y} v_n(x) \geqslant 1$ donc $\liminf_{x\to y} v(x) \geqslant \sum \liminf_{x\to y} v_n(x) = +\infty$. La condition est donc nécessaire.

Réciproquement, elle est suffisante, car si une telle fonction v existe, $\lambda v \in \Phi_\varphi$ quel que soit $\lambda > 0$, donc $\overline{H}_\varphi \leqslant \inf_{\lambda>0} \lambda v$; ainsi $\overline{H}_\varphi$ s'annule en tout point de Ω où v est fini, donc presque partout, et par suite $\overline{H}_\varphi = 0$.

Dans le cas où Ω n'est pas connexe, soit (ω_i) la famille de ses composantes connexes. Si e est négligeable, il existe pour tout indice i une fonction v_i surharmonique positive dans ω_i et telle que $\lim_{x\to y, x\in\omega_i} v_i(x) = +\infty$ quel que soit $y \in e \cap \omega_i^*$. Soit dans Ω la fonction v égale à $v_n + n$ dans ω_n. Montrons que v répond à la question ; v est surharmonique > 0. Voyons que $\liminf_{x\to y, x\in\Omega} v(x) = +\infty$ pour tout $y \in e$. Soit A un nombre arbitraire ; pour $n \geqslant A$ on a $v(x) \geqslant n \geqslant A$ pour tout $x \in \omega_n$.

Pour chaque $n < A$ il existe un voisinage de y où $v_n \geqslant A$ (que ce voisinage coupe ou non ω_n) ; donc dans l'intersection ω de ces voisinages les v_n $(n < A)$ majorent A. Par suite v majore A dans $\omega \cap \Omega$.

© Spartacus-Idh 2019

§ 6. — Allure de la solution à la frontière.

Le prolongement le plus naturel du problème classique consiste à étudier d'abord H_f pour f finie et continue.

Définition. *On dit qu'un point-frontière x_0 de Ω est* régulier *si* $\lim_{x\to x_0} H_f(x) = f(x_0)$ *quelle que soit la fonction f finie et continue sur Ω^*.*

La résolubilité du problème classique pour toute f équivaut à la régularité de tous les points-frontière (on dit alors que Ω est régulier).

La première question est alors d'évaluer l'ensemble des points irréguliers. La réponse va résulter du théorème suivant :

Théorème. *Les points-frontière réguliers de Ω sont les points où $\complement\Omega$ n'est pas effilé* [25].

Si x_0 est régulier, la fonction $f : x \to \|x - x_0\|$ sousharmonique continue > 0 dans Ω minore H_f qui est harmonique > 0 et tend vers $f(x_0)$; donc $\complement\Omega$ n'est pas effilé en x_0 (chap. VII, § 5, théorème).

Réciproquement, supposons $\complement\Omega$ non effilé en x_0. Si f est la restriction à Ω d'une fonction surharmonique finie et continue $F > 0$ dans une boule $B \supset \Omega$, il résulte du non effilement de $\complement\Omega$ que $\mathcal{B}_F^{\complement\Omega}$ (relative à B) est égale à F en x_0 : $\mathcal{B}_F^{\complement\Omega} = F(x_0) = f(x_0)$ (chap. VII, § 2). Comme $\mathcal{B}_F^{\complement\Omega} \leqslant F$, $\mathcal{B}_F^{\complement\Omega}$ est continue en x_0 et comme H_f est la restriction à Ω de $\mathcal{B}_F^{\complement\Omega}$ (§ 1, rem. VIII.1.2.), on conclut que $H_f(x) \to f(x_0)$, $(x \to x_0,\ x \in \Omega)$. On passe au cas d'une fonction finie continue quelconque grâce à l'approximation du lemme VIII.3.2. (§ 3).

(25) On ne peut remplacer dans l'énoncé $\complement\Omega$ par Ω^* car deux ouverts peuvent avoir la même frontière au voisinage d'un point, régulier pour l'un, irrégulier pour l'autre.

D'ailleurs cette réciproque résulte encore plus directement du théorème général suivant, indépendant du théorème de Wiener, de l'approximation du lemme VIII.3.2., et basé seulement sur le critère d'effilement des ensembles fermés (chap. VII, § 5).

Théorème. *En tout point frontière x_0 où $\complement\Omega$ est non effilé, on a pour toute fonction numérique f (finie continue, ou non) définie sur Ω et bornée supérieurement*

$$\limsup_{x\to x_0, x\in\Omega} H_f(x) \leqslant \limsup_{y\to x_0, y\in\Omega} f(y) = \lambda.$$

Si $\lambda < +\infty$, soient $\Lambda > \lambda$, majorant donc f dans un voisinage ouvert V de x_0, B une boule contenant Ω, U une fonction surharmonique > 0 dans $B \setminus (\complement\Omega \cap V_1)$ tendant vers 0 en x_0, où V_1 est un voisinage fermé de x_0 contenu dans V. On voit que $\alpha U + \Lambda$ (α assez grand) appartient à Φ_f donc majore $\overline{H}_f$ d'où $\limsup_{x\to x_0} \overline{H}_f(x) \leqslant \Lambda$.

Remarque VIII.6.1. De ce théorème on déduit directement que si f est finie et continue, on a aux points-frontière où $\complement\Omega$ est non effilé donc quasi-partout à la frontière (grâce au théor. p. 86)

$$\liminf_{x\to y} \overline{H}_f(x) = \liminf_{x\to y} \underline{H}_f(x) = f(y)$$

d'où $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ ($\overline{H}_f - \underline{H}_f$ étant majoré par une fonction εv ($v > 0$) dans B associée à un ensemble polaire convenable de la frontière). On a ainsi une démonstration du théorème de Wiener.

Remarque VIII.6.2. On peut sans usage de l'effilement ni du grand théorème de convergence démontrer directement [26] l'équivalence de la régularité et de l'existence d'une fonction surharmonique > 0 sur Ω au voisinage de x_0, s'annulant en x_0, dite fonction de Bouligand (c'est vrai aussi et très facile si cette fonction est assujettie à être en x_0 moindre que sa borne inférieure hors de tout voisinage de x_0 ; elle fut alors utilisée sous le nom de barrière, dû à Lebesgue). Alors comme au chap. VII, § 5, on voit qu'un point irrégulier est point-frontière irrégulier d'un et d'un seul domaine composant.

Remarque VIII.6.3. Ce qui précède ou l'interprétation par l'effilement suffit pour montrer l'existence dans Ω d'une suite croissante de Ω_n réguliers ($\overline{\Omega}_n \subset \Omega$, $\cup_n \Omega_n = \Omega$). (On sait aussi le faire très tôt dans la théorie avec des réunions de boules non tangentes par extension progressive grâce à un « procédé alterné » analogue à celui du chap. I, § 7).

Corollaire fondamental à souligner. *L'ensemble des points-frontière irréguliers est polaire (et c'est un K_σ).*

Résultat fondamental de Kellogg-Evans (1933) (voir bibliographie).

On notera que la théorie de l'effilement fournit tous les critères suffisants de régularité, si nombreux autrefois, même au temps du problème classique qui exigeait en fait la régularité de tous les points-frontière. Mentionnons

(26) Voir l'article de la bibliographie, Brelot, 1re référence.

https://spartacus-idh.com

la condition (Poincaré) d'existence au voisinage de $x_0 \in \Omega^*$ d'un cône de sommet x_0, d'intérieur non vide, dans $\complement\Omega$.

§ 7. — Allure de H_f en un point-frontière irrégulier x_0 (f résolutive).

D'après le dernier théorème du chapitre VII, il y a une limite fine si $f \geqslant 0$, donc aussi si f est bornée dans un sens.

Cas de f finie continue. La limite fine est fonctionnelle linéaire croissante de f donc de la forme $\int f \, d\nu_{x_0}$ (intégrale de Radon).

De plus, selon Keldych-Frostman les valeurs d'adhérence de H_f en x_0 sont comprises entre $f(x_0)$ et $\int f \, d\nu_{x_0}$ (27).

En effet (chap. VII, dernier théorème), il existe dans Ω un ensemble effilé en x_0 hors duquel H_f tend vers $\int f \, d\nu_{x_0}$ quand $x \to x_0$. On l'agrandit selon ω ouvert $\subset \Omega$, effilé en x_0 qu'on peut supposer point-frontière de ω. Comme $H_f^\Omega = H_F^\omega$ où F est le prolongement de f par H_f^Ω, on voit que sur ω, H_f^Ω admet en x_0 des lim. inf. et sup. comprises entre celles de F sur ω donc entre $f(x_0)$ et $\int f \, d\nu_{x_0}$.

Conséquence (théorème de Keldych). *Il existe un ensemble dénombrable de points irréguliers x_i tels que si $\lim_{x \to x_i} H_f(x) = f(x_i)$ pour tout x_i, alors $\lim_{x \to X} H_f(x) = f(X)$ pour tout $X \in \Omega^*$.*

En effet, considérons l'espace des fonctions finies continues f sur Ω pourvu de la topologie de la convergence uniforme. L'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctionnelles linéaires de f d'indice x, $f(x) - \int f \, d\nu_x$ (x irrégulier) admet un sous-ensemble dénombrable dense relativement à la topologie faible sur $\mathcal{F}$ (topologie de la convergence simple).

Cela vient (Banach, *Opérations linéaires*, p. 124) de ce que l'espace des f considéré est séparable. Les x_i correspondant à ce sous-ensemble répondent alors à la question, car la nullité des $f(x_i) - \int f \, d\nu_{x_i}$ (pour tout f) entraîne la nullité des $f(x) - \int f \, d\nu_x$ pour tous les x irréguliers.

À part la démonstration originale compliquée, voir des démonstrations constructives dans Landkoff (ouvrage cité chap. IV) et Choquet, *Ann. I.F.* 18/1, 1968.

Remarque. Signalons seulement encore que (dans une boule quelconque contenant par exemple $\overline{\Omega}$) le balayage de la masse unité en un point-frontière X correspondant à $\mathcal{B}_{G_X}^{\complement\Omega}$ ne change rien si X est régulier et donne la mesure précédente $d\nu_x$ si X est irrégulier (ce qui est au fond contenu dans le th. final du chap. IX). De plus pour toute f résolutive et $d\nu_x$-sommable au sens large, H_f admet en X irrégulier la limite fine $\int d\nu_x$ (voir bibl. Brelot 2e réf.) et cela est à rapprocher de la fin du chap. VII et du rôle de la fonction de Green, chap. IX.

(27) Elles couvrent même cet intervalle si la frontière n'est pas polaire au voisinage de x_0 (c'est-à-dire s'il y a des points réguliers arbitrairement voisins de x_0).

© Spartacus-Idh 2019

Bibliographie

O. Perron Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Zeits.* 18, 1923.

N. Wiener Certain notions in potential theory, *J. Math. and Physics III*, 1924. The Dirichlet problem (*id.* 1924). Note on a paper of O. Perron (*id.* 1925).

Brelot Familles de Perron et problème de Dirichlet. *Acta Szeged* t.9, 1939.

Brelot Le problème de Dirichlet ramifié, *Ann. Un. Grenoble 1946*, t. 22.

Brelot et Choquet Espaces et lignes de Green, *Ann. de l'Institut Fourier* t. 3, 1951-52.

G. C. Evans Application of Poincaré's sweeping out process (*Proc. Nat. Ac. Sc.* 19, 1933).

Une simplification et une adaptation à l'axiomatique ont été données par B. Collin (article des *Ann. I.F.* 14/2, 1964) où est rectifié un bref passage sur ce sujet de l'article Brelot, *Bull. Ac. Sc.* Belgique t. 24, 1938, p. 311).

Keldych *C.R.Ac.Sc.* URSS, 1938, vol. 18, n° 6. Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet (en russe) *Usp. Mat. Nauk* 8, 1941.

La mesure harmonique est d'un très grand usage en théorie des fonctions de variable complexe. Voir les traités classiques.

Compléments. On peut étendre convenablement ce chapitre à des ouverts non bornés et même introduire le point à l'infini dans un ouvert où l'on définit les fonctions harmoniques et surharmoniques, ce qui évite, en les englobant dans une seule théorie, de distinguer les cas des problèmes extérieur et intérieur ; mais il faut examiner, comme on l'a dit chap. II (bibliogr.) le rôle du point à l'infini qui est différent dans le plan et dans les espaces $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ (Brelot, *Annales ENS*, 61).

D'autre part si h est harmonique > 0 dans Ω on peut traiter un problème aux limites analogue en considérant à la frontière les lim, lim sup, lim inf, non des fonctions harmoniques, sousharmoniques, surharmoniques, mais de leurs quotients par h. Voir M. Brelot, *J. de Math.* t. 35, 1956. Adaptation facile.

Cette idée de *relativisation* est devenue d'usage systématique, et cela s'explique par le fait que ces quotients par h sont des fonctions harmoniques, sous- ou surharmoniques dans une axiomatique convenable. (Voir Brelot, cours de Bombay, cité fin chap. V).

Enfin, signalons un problème de Dirichlet pour ensembles compacts (Keldych, Keldych-Lavrentieff et Brelot, voir surtout *Bull. Soc. Math.*, t. 73, 1945) lié à des questions d'approximation (voir aussi là-dessus, Deny, Landkoff ; voir surtout *Annales Institut Fourier*, t. 1, 1949). Il s'y introduit les points « instables » analogues aux irréguliers, encore caractérisés par l'effilement du complémentaire.

https://spartacus-idh.com

Calcul numérique de la solution. Cette question aujourd'hui importante peut être traitée par passage à la limite sur un problème analogue relatif à des réseaux pour des fonctions (définies aux sommets ou nœuds) préharmoniques (c'est-à-dire valant en chaque nœud la moyenne des valeurs aux nœuds les plus proches. Voir initialement Leroux (*J.de Math.* 10), Philipps et Wiener (*Mass. Inst. of Techn.* 55, 1923) puis par exemple M^{me} Lelong (*Cahiers scient. Julia*, 22, 1955), enfin l'ouvrage général de Temam (*Résolution numérique d'équations aux dérivées partielles*, Les Presses univ. de France, 1969).

© Spartacus-Idh 2019

FONCTION DE GREEN

§ 1. — Définition.

Nous nous limiterons à un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$.

Théorème. *Soit x un point de Ω ; il existe dans Ω une fonction surharmonique $\geqslant 0$ minima dont la mesure associée majore la mesure ponctuelle ε_x (c'est-à-dire comporte la masse 1 en x) ; c'est la fonction*

$$G_x^\Omega : y \to G_x^\Omega(y) = h_x(y) - H_{h_x}(y) \qquad (y \in \Omega)$$

d'ailleurs > 0 si Ω est connexe.

D'abord cette fonction G_x^Ω satisfait aux conditions imposées. Soit inversement v une fonction surharmonique $\geqslant 0$ répondant aux conditions, donc de la forme $v = h_x + U + f$ au voisinage de x, U étant un h-potentiel de mesure $\geqslant 0$ et f harmonique. On voit que $w = v - h_x$ définie dans $\Omega - \{x\}$ se prolonge surharmoniquement en x ; si on désigne encore ce prolongement par w, on a

$$\liminf_{y \to z,\ y \in \Omega} w(y) \geqslant -h_x(z)$$

en tout point z de Ω^*, et comme w est bornée inférieurement $w \geqslant H_{-h_x} = -H_{-h_x}$. Donc $v \geqslant h_x - H_{h_x}$.

Remarque IX.1.1. G_x est aussi dans $\Omega \setminus \{x\}$, la fonction harmonique $\geqslant 0$ minima de la forme $h_x +$ fonction harmonique au voisinage de x. On conçoit donc des extensions non seulement sur des variétés lorsqu'on ne dispose pas de frontière mais pour des équations généralisant celle de Laplace.

Remarque IX.1.2. Si l'on introduit une boule $B \supset \overline{\Omega}$ et G_x^B déjà connue, on peut dans ce qui précède et dans l'expression de G_x^B remplacer h_x par G_x^B. Ce sera valable aussi dans ce qui suit.

Remarque IX.1.3. Si ω est la composante connexe de Ω contenant $x \in \Omega$, G_x^Ω vaut G_x^ω dans ω et 0 dans $\Omega \setminus \omega$. Aussi se ramène-t-on souvent au cas de Ω connexe.

Propriétés.

1. L'application $\Omega \to G_x^\Omega$ (Ω voisinage ouvert borné de x) est croissante.

© Spartacus-Idh 2019

2. Soit $(\omega_n) \subset \Omega$ un recouvrement ouvert croissant de Ω ; on a

$$G_x^\Omega = \lim_{n\to\infty} G_x^{\omega_n}.$$

En effet $\lim_{n\to\infty} G_x^{\omega_n} \leqslant G_x$ d'après **1.** ; de plus $\lim_{n\to\infty} G_x^{\omega_n}$ est surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω (limite d'une suite croissante) et vaut comme les $G_x^{\omega_n}$, au voisinage de x, h_x + fonction harmonique.

3. Symétrie. Quels que soient les points x et y de Ω, on a

$$G_x^\Omega(y) = G_y^\Omega(x).$$

On a en effet

$$G_x^\Omega(y) = h_x(y) - \int_{\Omega^*} h_x(z)\,\mathrm{d}\mu_y(z) = h_y(x) - U^{\mu_y}(x).$$

Ainsi $x \to G_x^\Omega(y) = h_y(x) - U^{\mu_y}(x)$ est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ de x dans Ω dont la mesure associée est ε_y (U^{μ_y} est harmonique dans Ω) par suite $G_x^\Omega(y) \geqslant G_y^\Omega(x)$; de même $G_y^\Omega(x) \geqslant G_x^\Omega(y)$, d'où la propriété.

4. Continuité en (x, y). La continuité simple (c'est-à-dire en x et y séparément) est évidente. Puis le résultat est évident en un point (X, X) car $H_{h_x}(y)$ reste borné pour x et y voisins de X.

En un point (X, Y), $X \neq Y$, la propriété résulte de la continuité simple et de l'égale continuité en y voisin de Y de la famille des fonctions harmoniques > 0, $y \to G_x(y)$ (x variant au voisinage de X). On a en effet

$$|G_x(y) - G_{x_1}(y_1)| \leqslant |G_x(y) - G_{x_1}(y)| + |G_{x_1}(y) - G_{x_1}(y_1)|.$$

5. Il est évident que $G_x(y)$ tend vers 0 quand y tend vers un point-frontière régulier, mais de plus uniformément en $x \in K$ compact ; car si $x \in$ boule $B(x_0, r) \subset \Omega$, il suffit de considérer $G_y(x)/G_y(x_0)$.

Notation. On pose

$$G^\Omega(x, y) = G_x^\Omega(y) = G_y^\Omega(x) = G^\Omega(y, x).$$

On peut écrire indifféremment

$$G^\Omega(x,y) = h(\|y-x\|) - \int h(\|z-x\|)\,\mathrm{d}\mu_y(z) = h(\|x-y\|) - \int h(\|z-y\|)\,\mathrm{d}\mu_x(z).$$

La fonction $y \to G_x^\Omega(y)$ est appelée *fonction de Green de pôle x dans Ω*.

On dit que la fonction $(x, y) \to G^\Omega(x, y)$ est le noyau de Green de Ω.

Potentiel de Green. Si μ est une mesure $\geqslant 0$ sur Ω, $\int G(x, y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ dit G-potentiel ou potentiel de Green est dans chaque domaine composant $+\infty$ ou surharmonique de mesure associée μ. (S'il est surharmonique, on dit aussi vrai potentiel de Green). Lorsque μ ne charge qu'un compact de Ω, le G-potentiel tend vers 0 aux points frontière réguliers.

En effet, $H_{h_x}(y)$ est symétrique, harmonique de chaque variable dans Ω et continue de (x, y) (ce qui peut se voir directement ou résulte de propriétés de $G(x, y)$). Donc si μ ne charge qu'un compact, le G-potentiel est bien surharmonique et l'expression de G montre que μ est la mesure associée.

Dans le cas général, on passera à la limite sur le potentiel de la restriction de μ à Ω_n croissant, relativement compact. La fin résulte de la propriété **5.**

https://spartacus-idh.com

§ 2. — Prolongement de la fonction de Green.

Théorème. *La fonction obtenue en prolongeant par* 0 *la fonction* G_x *dans* Ω *(*x *fixé dans* Ω*) est sous-médiane (et à peu près hypoharmonique) dans* $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$.

La régularisée sousharmonique vaut 0 *sur* $\complement\Omega$, *et* $\limsup_{y\to z,\ y\in\Omega} G_x(y)$ *en tout* $z \in \Omega^*$ *(d'ailleurs* 0 *en tout point régulier) et s'exprime aussi*

$$h_x(y) - \int h_z(y)\,\mathrm{d}\mu_x(z), \qquad y \neq x \qquad (\ \mu_x \textit{ mesure harmonique}) \tag{IX.1}$$

Cette fonction définira la fonction de Green prolongée. (28)

Le début résulte de l'expression de G_x au moyen de H_{h_x} et de la remarque 2 (chap. VII, p. 89), ou bien de l'introduction de Ω_n régulier croissant ($\cup_n \Omega_n = \Omega$), car $G_x^{\Omega_n}(y)$ prolongée par 0 dans $\complement\Omega_n$ est sousharmonique dans $\complement\{x\}$ et tend vers G_x^{Ω} prolongée par 0.

On remarque aussi que l'expression (IX.1) est sousharmonique dans $\complement\{x\}$ et vaut 0 sur $\complement\overline{\Omega}$.

Introduisons un Ω_n précédent, non nécessairement régulier mais tel que Ω_n^* soit de mesure de Lebesgue nulle (p. ex. polyédral). Soient $z_0 \in \Omega^*$ et $A_r(F)$ la moyenne spatiale de F dans la boule $B(z_0, r)$. Si φ et φ_n sont les prolongements par 0 des fonctions G_x^{Ω}, $G_x^{\Omega_n}$, on a sur $\complement\Omega_n^*$

$$\varphi_n(y) = h_x(y) - \int h_z(y)\,\mathrm{d}\mu_x^{\Omega_n}(z)$$

d'où

$$A_r(\varphi_n) = \int A_r\big(h_x(y) - h_z(y)\big)\,\mathrm{d}\mu_x^{\Omega_n}(z)$$

Le 1er membre tend vers $A_r(\varphi)$ quand $n \to \infty$. Comme $A_r(h_x(y) - h_z(y))$ est finie continue en z et que $\mu_x^{\Omega_n}$ converge vaguement vers μ_x^{Ω} on a

$$A_r(\varphi) = \int A_r(h_x(y) - h_z(y))\,\mathrm{d}\mu_x^{\Omega}(z) = A_r\Big(\int \big(h_x(y) - h_z(y)\big)\,\mathrm{d}\mu_x^{\Omega}(z)\Big).$$

Quand r tend vers 0, le 1er membre tend vers la régularisée en z_0 de « G_x^{Ω} prolongée par 0 », c'est-à-dire $\limsup_{z\to z_0,\ z\in\Omega} G_x(z)$ et le 2e membre vers l'expression (IX.1).

§ 3. — Application. Caractérisation des points irréguliers.

Sans notion d'effilement et sans le théorème de convergence, il suffit de savoir que la régularité de x_0 équivaut à l'existence au voisinage dans Ω d'une fonction surharmonique > 0 tendant vers 0 en x_0 pour conclure (fonction de Bouligand).

1. Si Ω est un domaine, la régularité de x_0 équivaut à $\lim_{y\to x_0} G_x(y) = 0$ pour un x fixé quelconque $\in \Omega$ (Bouligand).

(28) Pour un prolongement pour x et y quelconques, voir Brelot (*Annales ENS*, t. 61).

© Spartacus-Idh 2019

2. Dans le cas général, la régularité (équivalant à celle relative à chaque domaine composant dont x_0 est point-frontière) se traduit par $\lim_{y\to x_0} G_x(y) = 0$ pour tout $x \in \Omega$ (ou un x dans chaque composante) ou $G_x(x_0) = 0$, quel que soit $x \in \Omega$.

Conséquences.

a. Un critère de régularité général est $H_{h_{x_0}} = h_{x_0}$ dans Ω et si $\Omega_0 \supset \Omega$, une condition équivalente est $H^{\Omega_0}_{G^{\Omega_0}_{x_0}} = G^{\Omega_0}_{x_0}$ dans Ω.

b. On peut aussi, sans plus de connaissances, voir que les points irréguliers forment un ensemble polaire (voir bibl. 1re réf.).

Voyons-le, en se ramenant à un domaine, sans la notion d'effilement, mais avec le théorème de convergence. Soit (ω_n) un recouvrement ouvert relativement compact croissant de Ω ; $\omega_n \subset \overline{\omega}_n \subset \Omega$; $G^{\omega_n}_x$ prolongée par 0 et régularisée donne à la limite ($n \to \infty$) G^{Ω}_x prolongée par 0. La régularisation de ce prolongement qui fournit la nouvelle fonction G_x introduite, n'altère la fonction limite que sur un ensemble polaire.

§ 4. — Mesure harmonique et balayage.

Dans $\complement\{x\}$, la mesure associée à

$$-G_x(y) = -h_x(y) + \int h_y(z)\,\mathrm{d}\mu_x(z)$$

est μ_x ; donc μ_x est aussi la mesure associée à la fonction surharmonique $h_x - G_x$ qui vaut d'ailleurs la régularisée de la fonction égale à h_x dans $\complement\Omega$ et à H_{h_x} dans Ω. On a ainsi $U^{\mu_x} = h_x = U^{\varepsilon_x}$ à l'extérieur de Ω et aux points réguliers de Ω^*, et $U^{\mu_x} = H_{h_x}$ dans Ω. De plus, on peut *caractériser* la mesure harmonique μ_x comme la mesure positive sur Ω^*, unique, telle que son h-potentiel satisfasse aux conditions :

1. ce potentiel est majoré par h_x ;

2. dans $\complement\Omega$, ce potentiel est égal quasi-partout à h_x.

En effet, la mesure harmonique possède bien ces propriétés.

Inversement, si une mesure $\mu \geqslant 0$ satisfait à 1. et 2., montrons d'abord que U^μ majore H_{h_x} dans Ω. Soient $y \in \Omega$ et v une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$, associée à l'ensemble polaire des points de $\complement\Omega$ où U^μ diffère de h_x et telle que $v(y) \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitraire) ; la fonction $w = U^\mu + v$ est surharmonique et majore h_x sur Ω^* donc elle majore H_{h_x} dans Ω et en particulier

$$U^\mu(y) \geqslant H_{h_x} - v(y) \geqslant H_{h_x}(y) - \varepsilon \quad \text{d'où} \quad U^\mu \geqslant H_{h_x} \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

D'autre part, d'après (IX.1), $U^\mu \leqslant H_{h_x}$ dans Ω. Ainsi $U^\mu = H_{h_x}$ dans Ω. Les mesures μ et μ_x ont même potentiel quasi-partout, donc partout, d'où $\mu = \mu_x$.

https://spartacus-idh.com

En outre, la première partie du raisonnement montre aussi que si μ est seulement une mesure positive sur Ω^* satisfaisant à $U^\mu \geqslant h_x$ quasi-partout dans $\complement\Omega$, on a $U^\mu \geqslant U^{\mu_x}$ dans Ω, donc quasi-partout, donc partout.

Autrement dit, μ_x est aussi la mesure positive sur Ω dont le potentiel est *le plus petit* majorant h_x quasi-partout dans $\complement\Omega$.

Si l'on raisonne dans une boule $B \supset \Omega$ (ou bien dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$) avec les potentiels de Green, on se trouve dans les conditions de notre étude antérieure du balayage (chap. VI) ; μ_x apparaît alors comme la *mesure balayée* de ε_x relativement à $B \setminus \Omega$ dans B.

§ 5. — Représentation globale de F. Riesz dans un ouvert borné quelconque.

Définition. *Un potentiel abstrait dans Ω (ou potentiel lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) est toute fonction surharmonique $v \geqslant 0$ dont la plus grande minorante harmonique est 0, c'est-à-dire telle que*

$$\lim_{n\to\infty} R_v^{\Omega_n} = \lim_{n\to\infty} H_v^{\Omega_n} = 0$$

pour $\Omega = \cup\Omega_n = \cup\overline{\Omega_n}$.

Alors toute minorante surharmonique est un potentiel, et la somme de deux potentiels est un potentiel ; l'égalité de deux tels potentiels à une fonction harmonique près entraîne leur égalité.

Exemple.

1. Si $v \geqslant 0$ est surharmonique, $\hat{R}_v^e$ (avec $\overline{e} \subset \Omega$) est un potentiel (comme p. 59).

2. La fonction $\int G^\Omega(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ ($\mu \geqslant 0$ de support compact $K \subset \Omega$) est un potentiel.

Le cas de K ponctuel résulte de la définition de G (§ 1) qui montre même l'identité à un facteur près avec les potentiels harmoniques hors d'un point.

Théorème. *Il y a identité des potentiels abstraits et des vrais potentiels de Green de mesures $\geqslant 0$ (dans ouvert borné) et cela équivaut au résultat suivant : soit v surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω. Si μ est la mesure associée, on a, avec la fonction de Green G de Ω*

$$v(y) = \int G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) + v^*(y)$$

où v^* est la plus grande minorante harmonique de v dans Ω.

Si v est un potentiel abstrait, de mesure associée μ, la fonction $\hat{R}_v^K$ (K compact) est aussi un potentiel de mesure associée μ_1 ($= \mu$ sur $\mathring{K}$). Les potentiels $\hat{R}_v^K$ et $\int G\,\mathrm{d}\mu_1$ sont égaux à une fonction harmonique h près, localement donc globalement. On a $\lim_{n\to+\infty} H_h^{\Omega_n} = 0$, donc $h = 0$. Ainsi $\hat{R}_v^K \geqslant \int_{\mathring{K}} G\,\mathrm{d}\mu$, puis $v \geqslant \int G\,\mathrm{d}\mu$. Les deux membres diffèrent localement d'une fonction

© Spartacus-Idh 2019

harmonique et puisque ce sont des potentiels abstraits, ils sont égaux. La représentation générale s'ensuit.

Si à un potentiel de Green v surharmonique, on applique cette représentation, on trouve $v^* = 0$, c'est-à-dire $v =$ pot. abstrait.

Voir d'autres démonstrations de la représentation de Riesz dans la 3e édition de ce cours.

Extension de la représentation. Soit maintenant v *surharmonique de signe quelconque* dans Ω ouvert borné quelconque ; utilisons un recouvrement ouvert relativement compact croissant (Ω_n), $\Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega$ et le résultat précédent dans Ω_n appliqué à l'excès de v sur sa plus grande minorante harmonique dans Ω ; on voit que dans Ω l'existence d'une minorante harmonique équivaut à ce que $\int G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ soit surharmonique (ou fini en un point de chaque domaine composant) et la formule de décomposition de Riesz est alors encore valable.

§ 6. — Meilleure et plus grande minorante harmonique.

Soit dans un ouvert Ω_0, un ouvert Ω tel que $\overline{\Omega} \subset \Omega_0$. Pour toute fonction v surharmonique dans Ω_0, on dit que H_v^Ω est la *meilleure minorante harmonique notée* $\overline{v}$ *de* v *dans* Ω (définition équivalente à celle de F. Riesz).

On sait d'autre part que v admet dans Ω une plus grande minorante harmonique v^* qu'on obtient aussi comme limite des meilleures minorantes harmoniques $H_v^{\Omega_n}$, (Ω_n) étant un recouvrement ouvert croissant de Ω avec $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$, car toute minorante harmonique dans Ω minore $H_v^{\Omega_n}$.

Frostman a montré que les deux minorantes $\overline{v}$ et v^* sont égales si Ω^* n'a pas de point irrégulier. Mais sa démonstration donnait en fait davantage et même le résultat suivant, qu'on va établir,

$$v^*(x) - \overline{v}(x) = \int_{\Omega^*} G_x^\Omega(z)\,\mathrm{d}\rho(z)$$

pour tout $x \in \Omega$ (avec G_x^Ω prolongée), ρ désignant la mesure associée à v.

Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que les deux minorantes soient égales est que l'ensemble des points irréguliers (d'ailleurs réunion des ensembles des points irréguliers pour les domaines composants) soit de* ρ*-mesure nulle.*

Remarquons que les applications $v \to \overline{v}$ et $v \to v^*$ sont additives et que $\overline{v} = v^*$ si v est finie continue au voisinage de Ω^*. On peut donc se ramener au cas d'un h-potentiel de mesure $\geqslant 0$ portée par un ouvert quelconque contenant Ω, et même d'un potentiel de Green dans une boule B. Si δ est un voisinage assez petit de Ω^*, le potentiel de Green de la restriction de ρ à $\delta \setminus \Omega^*$ est arbitrairement petit en tout point fixé de Ω, donc aussi les deux minorantes. Il s'ensuit l'égalité des minorantes pour un potentiel d'une mesure ne chargeant pas Ω^*. Il reste à examiner le cas où la mesure associée est portée par Ω^*. Il revient au même de prendre un potentiel de Green ou un h-potentiel v. Alors

$$v^*(x) = v(x) = \int h(\|x-y\|)\,\mathrm{d}\rho(y)$$

https://spartacus-idh.com

et

$$\overline{v}(x) = \int v(z)\,\mathrm{d}\mu_x(z) = \iint h(\|y-z\|)\,\mathrm{d}\rho(y)\,\mathrm{d}\mu_x(z)$$
$$= \iint h(\|y-z\|)\,\mathrm{d}\mu_x(z)\,\mathrm{d}\rho(y)$$

d'où

$$v(x) - \overline{v}(x) = \int \left(h(\|y-x\|) - \int h(\|y-z\|)\,\mathrm{d}\mu_x(z) \right) \mathrm{d}\rho(y)$$
$$= \int G(x,y)\,\mathrm{d}\rho(y).$$

Remarque. Cela contient le critère de régularité du § 3 ***a***.

Application IX.6.1. (**Principe de domination, forme faible**). Soit v un vrai potentiel de Green de mesure $\mu \geqslant 0$ dans un ouvert Ω borné. On suppose que v est fini sur le support (fermé) S de μ, ou encore sur S^* (29) ou même seulement que l'ensemble des points d'effilement de S (polaire) est de μ-mesure nulle. Alors toute fonction surharmonique $w \geqslant 0$ dans Ω qui majore v sur S la majore partout.

En effet, soit Ω_n ouvert croissant $\subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega$ avec $\cup_n \Omega_n = \Omega$, et posons $\omega_n = \Omega_n \cap \complement S$. On voit que

1. $v = H_v^{\omega_n}$ dans ω_n ;
2. si v' est surharmonique dans Ω_n et satisfait en tout point-frontière y à

$$\liminf_{x \to y,\ x \in \Omega_n} v'(x) \geqslant v(y),$$

on conclut $v' + w \geqslant H_v^{\omega_n} = v$ dans ω_n, d'où $H_v^{\Omega_n} + w \geqslant H_v^{\omega_n}$ dans ω_n et puisque $H_v^{\Omega_n} \to 0$, $w \geqslant v$ dans $\Omega - S$ donc dans Ω.

Cas particulier. Si w est la constante $k = \sup_{x \in S} v(x)$, on a $v \leqslant k$ partout. C'est le fameux *principe du maximum de Maria-Frostmann*.

Application IX.6.2. (**Théorème**). Soit Ω un ouvert borné ; l'ensemble des points de Ω^* où Ω est effilé est de mesure harmonique nulle.

Soit v une fonction surharmonique $\geqslant 0$ et localement bornée dans une boule $B \supset \overline{\Omega}$. Les fonctions v et $v' = \mathcal{B}_v^{\Omega}$ sont égales dans Ω et y ont donc même plus grande minorante harmonique, et par suite les meilleures minorantes H_v^{Ω} et $H_{v'}^{\Omega}$ dans Ω coïncident aussi de sorte que v et v' ne diffèrent dans Ω^* que sur un ensemble de mesure harmonique nulle. On achève en rappelant que l'on peut choisir v telle que les points d'effilement de Ω appartiennent à l'ensemble des points où $v > v'$ (voir chap. VII).

(29) Cette hypothèse entraîne que μ ne charge aucun ensemble borélien polaire de S^* (voir fin du chap. IV), donc la condition qui suit, utilisée dans la démonstration.

© Spartacus-Idh 2019

§ 7. — Balayage dans un ouvert borné quelconque avec le noyau de Green.

On peut compléter les notions relatives à la réduite R_v^E et à la balayée $\mathcal{B}_v^E = \hat{R}_v^E$ dans le cas d'un ouvert borné Ω, en opérant à partir d'un potentiel de Green $G\mu(x) = \int G^\Omega(x,y)\,d\mu(y)$, ce qui n'avait été considéré (chap. VI) que pour la boule ou $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. La mesure associée à $\mathcal{B}_{G\mu}^E$ est la balayée de μ relative à E.

D'autre part, on dispose des éléments nécessaires pour étendre à Ω les notions de potentiel capacitaire et de capacité. Sans reprendre le détail des démonstrations indiquons ce qui suit :

Soient $v = 1$, K un compact dans Ω, R_1^K, $\mathcal{B}_1^K = \hat{R}_1^K$ (potentiel capacitaire), μ_K mesure associée (distribution capacitaire), $\|\mu_K\| = \mathcal{C}(K)$ (capacité) possédant les propriétés suivantes :

- $\mathcal{B}_1^K$ est le plus grand potentiel de Green (d'une mesure $\geqslant 0$ portée par K) qui soit $\leqslant 1$ (dans Ω ou encore seulement sur K grâce au principe de domination) ; il vaut dans $\Omega - K$ la solution du problème de Dirichlet pour cet ouvert avec valeurs frontières 0 sur Ω^*, 1 sur K.
- $\|\mu\|_K$ est la borne supérieure des $\mu(\Omega)$ pour les mesures $\geqslant 0$ de support dans K et de potentiel de Green $\leqslant 1$ (dans Ω ou seulement sur K) et aussi la borne inférieure des $\mu(\Omega)$ pour les mesures $\geqslant 0$ de potentiel $\geqslant 1$ sur K.
- R_1^K et $\|\mu_K\|$ ont les propriétés de croissance, continuité à droite et sous-additivité forte.

On introduit les capacités intérieure et extérieure et on démontre que la nullité de la capacité extérieure signifie que l'ensemble est polaire. La capacité extérieure de e ($\bar{e} \subset \Omega$) vaut la masse totale associée à $\mathcal{B}_1^e$.

Problème de l'équilibre dans Ω. On appelle ainsi la recherche, sur un compact $K \subset \Omega$ non polaire (c'est-à-dire de capacité $\neq 0$) d'une mesure $\mu \geqslant 0$ telle que

1. $\mu(K) = Q > 0$ donné ;
2. $G_\mu^\Omega(x)$ vaille sur K une même constante quasi-partout ;
3. G_μ^Ω soit borné, ou encore seulement, μ ne charge aucun ensemble polaire.

Alors il existe une solution unique, proportionnelle à la distribution capacitaire.

En effet, $\frac{Q}{\|\mu_K\|}\mu_K$ répond aux conditions. De plus, les conditions entraînent que pour deux solutions μ_1 et μ_2, les constantes sur K soient égales d'après

$$\int G\mu_K\,d\mu_1 = \int G\mu_K\,d\mu_2 = \int G\mu_1\,d\mu_K = \int G\mu_2\,d\mu_K$$

et l'identité résulte alors du principe de domination.

Noter que la distribution d'équilibre μ satisfait à $Q = \mathcal{C}(K)V$ où V est la valeur constante de $G\mu$ quasi-partout sur K. D'ailleurs cela s'adapte immédiatement à $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

https://spartacus-idh.com

Indication de résultats sur le balayage général. Soient encore dans Ω une mesure $\mu \geqslant 0$ admettant un potentiel (vrai) $v = \int G\,\mathrm{d}\mu$ et E un ensemble quelconque de Ω.

Théorème. *La balayée $\hat{R}_v^E$ est dans Ω un potentiel $v' = \int G\,\mathrm{d}\mu'$ qui est déterminé aussi par les deux propriétés simultanées suivantes :*

a. *$v' = v$ quasi-partout sur E (ou de façon équivalente sur la base $\mathcal{B}_E$, ensemble des points où E n'est pas effilé) ;*

b. *μ' (mesure balayée) est portée par la base $\mathcal{B}_E$ (c'est-à-dire que $\complement\mathcal{B}_E$ est de μ'-mesure nulle).*

De plus $v' = \hat{R}_v^E = \int \hat{R}_{G_x}^E(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, et μ' est l'intégrale par rapport à μ de la famille ε'_x (balayée de la mesure de Dirac ε_x) ; d'ailleurs si v est seulement surharmonique $\geqslant 0$, on a $\hat{R}_v^E(x) = \int v\,\mathrm{d}\varepsilon'_x$.

Ces résultats plus difficiles, établis par Brelot (*J. de Math.* 1945) [30] en utilisant le théorème de convergence (forme forte de Cartan) ont été retrouvés par Cartan (*Ann. Univ. Grenoble* 1946) de manière directe dans sa théorie de l'énergie (explicitée pour $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$) dont nous indiquerons le début plus loin (chap. XI).

Applications.

1. Principe de domination (forme forte).

Si u surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω majore un potentiel de Green $v = \int G^\Omega\,\mathrm{d}\mu$ quasi-partout sur un ensemble E dont la base porte $\mu \geqslant 0$, elle le majore partout dans Ω.

Car alors $v = \hat{R}_v^E$. Ce principe est plus fort que la forme classique du « principe de maximum de Cartan » qu'on verra plus loin (chap. XI).

2. La fonction de Green prolongée G_x^Ω (voir § 2) est la seule fonction sousharmonique dans $\complement\{x\}$, nulle dans $\complement\overline{\Omega}$, égale dans Ω à la fonction de Green initiale G_x définie dans Ω.

En effet, G_x (prolongée) est la plus petite possible ; soit u un prolongement considéré et introduisons $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$; $G_x^{\Omega_0} - u$ et $G_x^{\Omega_0} - G_x^\Omega$ (noté w), prolongés par continuité en x, sont surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω_0 et $G_x^{\Omega_0} - u \leqslant w$.

L'égalité cherchée qui a lieu dans $\complement\Omega^*$ a lieu aussi sur Ω^* parce que $\left(R_w^{\complement\Omega^*}\right)_{\Omega_0} = w$, et cela vient de ce que la mesure associée à w qui est μ_x est portée par la base de Ω^* (d'après la fin du § 6).

Bibliographie

M. Brelot A new proof of the fundamental theorem of Kellogg-Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem, *Rend. di Palermo*, série 2, t. 4, 1955.

(30) Même pour Ω dans $\overline{\mathbb{R}}^n$ (espace $\mathbb{R}^n$ muni du point à l'infini, et $\complement\Omega$ seulement non polaire au sens de la théorie dans $\overline{\mathbb{R}}^n$ introduite dans l'article des *Annales de l'ENS*, t. 61, 1944) ; et ce serait même valable pour Ω « espace de Green ». Ajoutons que μ' ne charge que la frontière fine ε de E si $\mu(\mathcal{B}_\varepsilon) = 0$ (*C. R. Ac. Sc.* 227, 1948, p. 19).

© Spartacus-Idh 2019

Parmi les nombreux travaux anciens voir :

Frostmann Thèse, Lund, 1935.

M. Brelot Fonctions sousharmoniques et balayage, *Bulletin Ac. royale des Sc. de Belgique* 1938, p. 301-312 et 421-436. Une démonstration a été rectifiée dans une étude axiomatique de B. Collin (bibl. chap. VIII).

M. Riesz Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, *Acta Szeged* IX, 1938.

M. Brelot *Annales E.N.S.*, t. 61, 1944. *J. de Math.* t. 24, 1945.

Les travaux parallèles de Cartan sont cités au chap. XI.

https://spartacus-idh.com

NORME ET PRINCIPE DE DIRICHLET

§ 1. — Forme Préliminaire.

Limitons-nous encore à un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$; reprenons (comme chap. I, § 5) l'espace $\mathcal{P}_0$ des fonctions finies continues dans Ω qui admettent un gradient fini continu de carré sommable, le produit scalaire

$$(f_1, f_2) \to \int (\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2)\, \mathrm{d}x$$

et la semi-norme (de Dirichlet) correspondante $f \to \|f\|$. On utilisera encore, avec produit scalaire et norme correspondants l'espace séparé associé $\mathcal{P}$ des classes d'équivalence de fonctions égales à une constante près ; $\mathcal{P}$ est un espace préhilbertien. On pourra confondre par abus de langage une fonction avec sa classe dans $\mathcal{P}$.

Principe de Dirichlet ; forme préliminaire (Zaremba-Nikodym). *Pour toute fonction $f \in \mathcal{P}$, il existe une fonction harmonique unique $u \in \mathcal{P}$ telle que $\|u - f\|$ soit minimum. (Projection dans $\mathcal{P}$ de f sur le sous-espace $\mathcal{H}$ des fonctions harmoniques).*

En effet, on a démontré (chap. I, § 5) que l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions harmoniques de $\mathcal{P}$ est un sous-espace complet de $\mathcal{P}$; il suffit d'appliquer le théorème de projection : u est la projection de f sur ce sous-espace. On sait que $\|u\| \leqslant \|f\|$ et que $\|u\| = \|f\|$ équivaut à ce que f appartienne au sous-espace $\mathcal{H}$, c'est-à-dire soit égale à sa projection ou encore soit harmonique.

© Spartacus-Idh 2019

§ 2. — Principe classique de Dirichlet.

Théorème. *Soit f une fonction de $\mathcal{P}_0$ bornée dans Ω borné et admettant un prolongement fini et continu à Ω (nous désignerons encore par f ce prolongement). La fonction harmonique de $\mathcal{P}$ qui minimise $\|u - f\|$ est H_f^Ω (projection de f sur $\mathcal{H}$).*

Si, de plus, tout point de Ω^* est régulier, H_f est l'unique fonction de $\mathcal{P}_0$ de norme minimum admettant en tout point de Ω^* la même limite que f.

1. Supposons d'abord Ω « très régulier », c'est-à-dire égal à l'intérieur de son adhérence, avec une frontière qui au voisinage de chacun de ses points est définie au moyen d'une coordonnée fonction deux fois continûment différentiable des autres coordonnées ; supposons de plus que f admette un prolongement deux fois continûment différentiable dans un voisinage ouvert Ω' de $\overline{\Omega}$.

Les hypothèses de régularité entraînent $H_f^\Omega \in \mathcal{P}_0$ (v. chap. I, § 8), et il suffit de démontrer que $H_f - f$ est orthogonale dans $\mathcal{P}$ au sous-espace $\mathcal{H}$ des fonctions harmoniques de $\mathcal{P}$. Soit $V \in \mathcal{P}_0$ une fonction > 0 deux fois continûment différentiable dans Ω, tendant vers 0 en tout point de Ω^* et dont les dérivées premières admettent des limites finies en tout point

de Ω^* ; on suppose enfin que la dérivée normale de V sur Ω^* est partout > 0. Une telle fonction s'obtient en régularisant la fonction de Green G_x au voisinage du pôle x. Nous allons voir que V est orthogonale à $\mathcal{H}$. En effet, $D_\varepsilon = V^{-1}(]\varepsilon, +\infty[)$, pour ε assez petit, est un ouvert très régulier (théorème des fonctions implicites) ; on peut donc lui appliquer la formule de Green avec V et $h \in \mathcal{H}$, soit

$$\int_{D_\varepsilon} (\operatorname{grad} V, \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}x + \int_{D_\varepsilon^*} V.(\mathrm{d}h/\,\mathrm{d}\sigma) = 0$$

$$\int_{D_\varepsilon} (\operatorname{grad} V, \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}x = 0$$

(car $V = \varepsilon$ sur D_ε^*), d'où, en faisant tendre ε vers 0, $(V, h) = 0$.

Or, moyennant les hypothèses faites sur f et sur Ω^*, la fonction $H_f^\Omega - f + \lambda V$ possède les mêmes propriétés que V si λ est assez grand pour que sa dérivée normale (intérieure) sur Ω^* soit > 0. Ainsi

$$(H_f^\Omega - f, h) = (H_f^\Omega - f + \lambda V, h) = 0$$

pour tout $h \in \mathcal{H}$.

2. Étudions maintenant le cas où, Ω étant toujours très régulier, f admet un prolongement qui est seulement une fois continûment différentiable dans un ouvert $\Omega' \supset \overline{\Omega}$. Par médiation ou produit de convolution, on construit une suite de fonctions f_n deux fois continûment différentiables dans un ouvert $\Omega'' \supset \overline{\Omega}$ (et dont les restrictions à Ω appartiennent donc à $\mathcal{P}_0$), qui converge vers f uniformément sur tout compact de Ω'' et telle que grad f_n converge vers grad f uniformément sur tout compact de Ω''. Alors f_n converge vers f dans l'espace $\mathcal{P}$; comme $H_{f_n}^\Omega$ est la projection de f_n sur $\mathcal{H}$, $H_{f_n}^\Omega$ converge dans $\mathcal{P}$ vers la projection de f sur $\mathcal{H}$. Mais comme f_n converge uniformément vers f sur Ω, $H_{f_n}^\Omega$ converge uniformément vers H_f^Ω et la limite de $H_{f_n}^\Omega$ dans $\mathcal{P}$ est aussi H_f^Ω (chap. I, § 5). La projection de f sur $\mathcal{H}$ est donc bien H_f^Ω.

3. Plaçons-nous enfin dans le cas général de l'énoncé et soit Ω_n un recouvrement croissant de Ω par des ouverts très réguliers Ω_n tels que $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$. Voyons successivement :

α. La solution $u_n = H_f^{\Omega_n}$ tend vers $u = H_f^\Omega$; la convergence est uniforme sur tout compact de Ω pour u_n et les dérivées.

β. $u \in \mathcal{P}_0$, c'est-à-dire que $\|u\|_\Omega$ est finie. En effet, en prolongeant par 0 les fonctions $\operatorname{grad}^2 u_n$ on obtient une suite convergeant vers $\operatorname{grad}^2 u$ d'où

$$\int_\Omega \operatorname{grad}^2 u\, \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} \operatorname{grad}^2 u_n\, \mathrm{d}x.$$

Comme $\|u_n\|_{\Omega_n} \leqslant \|f\|_{\Omega_n} \leqslant \|f\|_\Omega$, il vient $\|u\|_\Omega \leqslant \|f\|_\Omega$.

γ. $\|u_n - f\|_{\Omega_n} \to \|u - f\|_\Omega$.

D'abord la règle générale du passage à la limite sous $\int$ donne

$$\|u - f\|_\Omega \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n - f\|_{\Omega_n}.$$

Il suffit alors de voir qu'on ne peut avoir

$$\|u - f\|_\Omega < \limsup_{n\to\infty} \|u_n - f\|_{\Omega_n}.$$

https://spartacus-idh.com

Sinon, en effet, on trouverait n arbitrairement grand tel que

$$\|u-f\|_\Omega < \lambda < \|u_n - f\|_{\Omega_n}$$

et on trouverait n tel que $\|u-f\|_{\Omega_n} < \lambda < \|u_n-f\|_{\Omega_n}$ ce qui contredirait la propriété minimisante de u_n dans Ω_n.

δ. u est minimisante. Sinon pour un $v \in \mathcal{P}_0$ on aurait $\|v-f\|_\Omega < \|u-f\|_\Omega$ donc pour n assez grand $\|v-f\|_{\Omega_n} \leqslant \|v-f\|_\Omega < \|u-f\|_{\Omega_n}$ ce qui contredirait la propriété minimisante de u_n dans Ω_n. Ainsi la projection de f sur $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{P}$ est encore H_f.

Complétons en supposant réguliers tous les points-frontière. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{P}_0$ prenant à la frontière les mêmes valeurs que f. Quelle que soit $\varphi \in \mathcal{F}$, H_f est la projection de φ sur $\mathcal{H}$ et $\|H_f\|_\Omega \leqslant \|\varphi\|_\Omega$. Si $\|H_f\|_\Omega = \|\varphi\|_\Omega$, alors comme on l'a rappelé, $\varphi = H_f$.

Cette caractérisation de H_f par la norme minima parmi les fonctions de $\mathcal{F}$ signifie (à une équivalence près) que H_f est la projection de l'origine sur $\mathcal{F}$ considéré dans $\mathcal{P}$ et constituant un hyperplan.

Remarque X.2.1. $\|u-u_n\|_{\Omega_n} \to 0$ d'où $\|u_n\|_{\Omega_n} \to \|u\|$ car $\|u-u_n\|_K \to 0$ et il suffit de voir que $\|u_n - u\|_{\Omega_n - K} < \varepsilon$ pour K convenable et n assez grand. Or

$$\|u_n - f\|^2_{\Omega_n - K} = \|u_n - f\|^2_{\Omega_n} - \|u_n - f\|^2_K \to \|u-f\|^2_{\Omega - K}$$

d'où

$$\|u_n - f\|_{\Omega_n - K} \leqslant \|u_n - f\|_{\Omega_n - K} + \|u-f\|_{\Omega_n - K} \to 2\|u-f\|_{\Omega - K}.$$

Remarque X.2.2. Adaptation banale en remplaçant Ω par $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, f tendant vers k à l'infini, et H_f étant remplacée par k.

Extension. En perfectionnant le raisonnement, signalons qu'on peut arriver à l'énoncé (v. bibl. 1re réf.) :
Soit f une fonction de $\mathcal{P}_0$ bornée dans Ω, admettant une limite $\varphi(x)$ en tout point $x \in \Omega^*$ sur le complémentaire d'une partie de mesure harmonique nulle. Notons encore φ un prolongement arbitraire de la fonction φ à Ω^*. La fonction H^Ω_φ est la seule fonction harmonique de $\mathcal{P}$ qui minimise $\|u-f\|$, et la seule fonction de $\mathcal{P}_0$ de norme minimum parmi celles qui ont à la frontière même limite que f presque partout en mesure harmonique.

§ 3. — Fonctions B.L.D.

On songera naturellement à compléter l'espace normé $\mathcal{P}$. Mais cela conduit à des fonctions qui ne sont pas assez précises pour un bon usage en théorie du potentiel. Aussi, précisant les fonctions considérées par Beppo Levi et Nikodym, Deny a-t-il introduit les fonctions suivantes dites « BL précisées » ou BLD (bibl. 2e réf.) :
On appelle ainsi une fonction f définie et finie quasi-partout dans Ω, limite quasi-partout d'une suite de fonctions f_n de $\mathcal{P}_0$ (fonctions qu'on peut même supposer indéfiniment différentiables), cette suite étant une suite de Cauchy pour la norme de Dirichlet.

© Spartacus-Idh 2019

On démontre que f admet presque partout un gradient de carré sommable et que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ (avec la même norme de Dirichlet). Les classes d'équivalence de ces fonctions (définies par l'égalité quasi-partout à une constante près) forment donc avec le même produit scalaire un espace de Hilbert.

En ce qui concerne notre problème, indiquons seulement que le principe préliminaire s'applique aussitôt et que si f est BLD dans un ouvert Ω_1 contenant $\overline{\Omega}$, H_f^Ω existe et que c'est (bibl. 1ère réf.) :

1. la seule fonction BLD harmonique (toujours à une constante près) minimisant $\|u - f\|$;
2. la seule fonction harmonique dans Ω dont le prolongement par f soit BLD dans Ω_1.

Nous renvoyons pour quantité de travaux qui s'y rattachent à la bibliographie.

En particulier, cette norme de Dirichlet a conduit par un effort axiomatique à l'introduction et l'étude par Beurling et Deny des « espaces de Dirichlet », aspect d'une axiomatique de la théorie du potentiel en cours de développement.

Bibliographie

Le texte dérive de l'article :

Brelot Étude et extensions du principe de Dirichlet, *Ann. de l'Institut Fourier*, 5, 1953-54.

L'idée devenue classique d'utiliser les espaces de Hilbert remonte à :

Nikodym *Fundam. Math.* 21, 1933 ; *J. de Math.* 12, 1933 ; *Mathematica* 9, 1935.

Bibliographie nombreuse sur les fonctions BL (de Beppo Levi-Nikodym). Voir surtout outre **Nikodym**, **Calkin-Morrey** (*Duke Math. J.* 6, 1940) et pour les BLD :

Deny *Acta Math.* 82, 1950.

Deny-Lions *Annales I. F.* 5, 1953-54.

Aronszajn et Smith *Annales I. F.* 6, 1955-56.

Fuglede *Acta Math.* 98, (1957).

Ohtsuka *J. d'analyse math.* XIX (1967).

Consulter aussi

Lelong Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée, *Cah. scient.* n° 22, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

Courant Dirichlet's principle. *Intersc. publ.* New York, 1950.

Extension : fonctions h-BLD et principe de Dirichlet correspondant par **L. Lumer-Naïm** (*C.R.* juillet 62).
Sur les espaces de Dirichlet voir

Beurling-Deny *Acta Math.* 99, 1958, *Proc. Nat. Ac.* 45, 1959.

https://spartacus-idh.com

Deny *Sem. potentiel* 1, 1957 ;
Elliott *Sem. pot* 6 ;
Thomas *Sem. pot.* 9 (1965), cours prévu de **Deny**, *CIME*, été 69.
Landkoff (ouvrage cité)

© Spartacus-Idh 2019

NOTIONS SUR L'ÉNERGIE

§ 1. — Préliminaires.

On se placera d'abord dans le cas de $\mathbb{R}^n$, ($n \geqslant 3$) tout entier et du noyau $\|x-y\|^{2-n}$ en suivant le début de l'exposé classique et autonome de Cartan (qui ne suppose que les relations de F. Riesz entre fonctions surharmoniques et potentiels). On fera ensuite la liaison avec ce qui précède et d'autre part l'extension à un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, ($n \geqslant 2$) avec le noyau de Green.

Cette extension se ramène d'ailleurs à étendre le « principe de l'énergie » établi au début, le reste s'appliquant tel quel ou s'adaptant immédiatement.

Dans ce chapitre, les potentiels seront donc d'abord, sauf avis contraire, des h-potentiels.

© Spartacus-Idh 2019

Définition. *Soit Ω un espace topologique localement compact. On dira qu'un ensemble $H \subset \mathcal{K}(\Omega)$ de fonctions numériques finies continues $\geqslant 0$ à support compact définies dans Ω est positivement riche (resp. très riche) si quels que soient la fonction $f \geqslant 0$ finie continue à support compact K et le nombre $\varepsilon > 0$, pour un voisinage (resp. tout voisinage) $\mathcal{V}$ de K il existe une combinaison linéaire à coefficient $\lambda_i > 0$, $g = \sum_i \lambda_i g_i$ de fonctions $g_i \in H$ à supports contenus dans $\mathcal{V}$ telle que*

$$\|f-g\| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On voit aisément que

a. une mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω est entièrement déterminée par ses valeurs pour les fonctions (de type précédent) d'un ensemble positivement riche ;

b. pour une suite de mesures $\mu_n \geqslant 0$ la convergence de $\int f \, \mathrm{d}\mu_n$ (vers un nombre fini) pour les f d'un tel ensemble entraîne la convergence vague de μ_n.

Exemple. Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Considérons un ensemble H de fonctions finies continues $\geqslant 0$ à support compact dans Ω possédant les deux propriétés :

1. pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de 0, il existe une fonction $f \in H$ dont le support est contenu dans $\mathcal{V}$,
2. H est invariant par les translations de $\mathbb{R}^n$.

Nous allons voir que H est positivement très riche.

Soit f une fonction $\geqslant 0$ continue à support compact K. Considérons un voisinage $\mathcal{V}$ compact de K, et soit $\mathcal{W}$ un voisinage de 0 tel que tout translaté de $\mathcal{W}$ rencontrant K soit contenu dans $\mathcal{V}$. Il existe une fonction $\varphi \geqslant 0$

proportionnelle à une fonction de H, dont le support est contenu dans $\mathcal{W}$ et telle que $\int \varphi \, dx = 1$ (mesure de Lebesgue dx). La fonction

$$F(x) = \varphi * f(x) = \int \varphi(y) f(x-y)\, dy = \int \varphi(x-y) f(y)\, dy$$

a son support dans $\mathcal{V}$. Soit $\varepsilon > 0$; on a pu choisir $\mathcal{W}$ tel que $y \in \mathcal{W}$ entraîne $|f(x)-f(x-y)| \leqslant \varepsilon$ quel que soit x (continuité uniforme de f). Alors

$$|f(x)-F(x)| = \left| \int \varphi(y)(f(x)-f(x-y))\, dy \right| \leqslant \int \varphi(y)|f(x)-f(x-y)|\, dy \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part il existe une partition finie (A_i) de K formée d'ensembles intégrables et une famille (y_i) de points $y_i \in A_i$ tels que

$$|\varphi(x-y_i) - \varphi(x-y)| \leqslant \varepsilon$$

pour $y \in A_i$, x quelconque, d'où

$$\left| F(x) - \sum_i \varphi(x-y_i) \int_{A_i} f(y)\, dy \right| \leqslant \varepsilon \int f(y)\, dy$$

et

$$\left| f(x) - \sum_i \varphi(x-y_i) \int_{A_i} f(y)\, dy \right| \leqslant \varepsilon \Big(1 + \int f(y)\, dy\Big),$$

x quelconque, d'où le résultat, puisque le second membre est arbitrairement petit.

Nous allons, grâce à cela, construire un ensemble positivement très riche de fonctions dans $\mathbb{R}^n$, qui de plus, soient des différences de potentiels.

Pour tout nombre $\rho > 0$, considérons la fonction ψ_ρ valant

$$\begin{gathered} h(\rho/2) - h(\rho) \text{ dans } B(0,\rho/2) \\ h(\|x\|) - h(\rho) \text{ dans } B(0,\rho) - B(0,\rho/2) \\ 0 \text{ hors } B(0,\rho). \end{gathered}$$

Si σ_ρ est la mesure sur la sphère $S(0,\rho)$ proportionnelle à la mesure-aire et de total 1 on voit que $\psi_\rho = U^{\sigma_\rho/2} - U^{\sigma_\rho}$, différence de potentiel (et localement, harmonique, surharmonique ou sousharmonique) fournit par ses translatées notées ψ' ou $\psi_\rho^{x_0}$ (correspondant au centre pris en x_0) est un exemple de H.

§ 2. — Énergie mutuelle de deux mesures.

Soient μ et ν deux mesures $\geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. L'*énergie mutuelle* est par définition

$$(\mu,\nu) = \int U^\mu \, d\nu = \int U^\nu \, d\mu. \tag{XI.1}$$

Pour toute $\mu \geqslant 0$, on appelle énergie de μ le nombre $(\mu,\mu) \geqslant 0$ et on note

$$\|\mu\|_e = \sqrt{(\mu,\mu)} \qquad \text{(norme-énergie)}$$

On désignera par $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des mesures $\geqslant 0$ d'énergie finie. La propriété que la somme de deux mesures de $\mathcal{E}^+$ est une mesure de $\mathcal{E}^+$ va résulter de l'inégalité suivante.

https://spartacus-idh.com

Inégalité fondamentale. Quelles que soient les mesures positives μ et ν, on a

$$(\mu,\nu) \leqslant \|\mu\|_e \|\nu\|_e \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\mu,\nu)^2 \leqslant \int U^\mu \,\mathrm{d}\mu \int U^\nu \,\mathrm{d}\nu. \tag{XI.2}$$

Cela résulte, d'après M. Riesz, du lemme suivant spécial à $\mathbb{R}^n$, pour le potentiel « d'ordre α » défini par le noyau $(x,y) \to \|x-y\|^{\alpha-n}$.

Lemme. *Soient α et β deux nombres réels ; on a pour la mesure de Lebesgue* $\mathrm{d}x$

$$\int \|x-y\|^{\alpha-n}\|x-z\|^{\beta-n}\,\mathrm{d}x = K\|y-z\|^{\alpha+\beta-n}$$

où K est une constante > 0.

En effet, l'homothétie de centre 0 et de rapport $\|y-z\|^{-1}$ amène y et z en des points y_0 et z_0 respectivement, tels que $\|y_0 - z_0\| = 1$. La même transformation sur la variable d'intégration donne

$$\int \|x-y\|^{\alpha-n}\|x-z\|^{\beta-n}\,\mathrm{d}x = \|y-z\|^{\alpha+\beta+n} \int \|x-y_0\|^{\alpha-n}\|x-z_0\|^{\beta-n}\,\mathrm{d}x$$

et cette dernière intégrale est évidemment une constante $K > 0$ (car elle ne dépend pas de y_0 et z_0 qui sont liés par $\|y_0 - z_0\| = 1$).

Le lemme étant établi, posons

$$U^\mu_\alpha(x) = \int \|x-y\|^{\alpha-n}\,\mathrm{d}\mu(y)$$
$$U^\mu_\beta(x) = \int \|x-y\|^{\beta-n}\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Alors

$$\begin{aligned}\int U^\mu_\alpha(x) U^\mu_\beta(x)\,\mathrm{d}x &= \int \|x-y\|^{\alpha-n}\|x-z\|^{\beta-n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\nu(z)\\ &= K\int \|y-z\|^{\alpha+\beta-n}\\ &= K\int U^\mu_{\alpha+\beta}(z)\,\mathrm{d}\nu(z).\end{aligned}$$

En particulier

$$\int (U^\mu_\alpha)^2\,\mathrm{d}x = K\int U^\mu_{2\alpha}\,\mathrm{d}\mu \tag{XI.3}$$

Si nous remplaçons α et β par $\alpha/2$, il vient

$$\int U^\mu_\alpha\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{K}\int U^\mu_{\alpha/2} U^\nu_{\alpha/2}\,\mathrm{d}x$$

d'où

$$\Big(\int U^\mu_\alpha\,\mathrm{d}\nu\Big)^2 \leqslant \frac{1}{K^2}\int (U^\mu_{\alpha/2})^2\,\mathrm{d}x \int (U^\nu_{\alpha/2})^2\,\mathrm{d}x$$

et grâce à (XI.3)

$$\Big(\int U^\mu_\alpha\,\mathrm{d}\nu\Big)^2 \leqslant \int U^\mu_\alpha\,\mathrm{d}\mu \int U^\nu_\alpha\,\mathrm{d}\nu$$

ce qui, pour $\alpha = 2$, est l'inégalité cherchée.

© Spartacus-Idh 2019

§ 3. — Énergie des mesures de signe quelconque.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des mesures μ, du type $\mu_1 - \mu_2$ pour $\mu_1 \in \mathcal{E}^+$, $\mu_2 \in \mathcal{E}^+$.

Le potentiel $U^\mu = U^{\mu_1} - U^{\mu_2}$ n'est pas partout défini.

On définit l'*énergie mutuelle* (μ, ν) de deux telles mesures par

$$(\mu,\nu) = \int U^\mu \, \mathrm{d}\nu = \int U^{\mu_1} \, \mathrm{d}\nu_1 + \int U^{\mu_2} \, \mathrm{d}\nu_2 - \int U^{\mu_1} \, \mathrm{d}\nu_2 - \int U^{\mu_2} \, \mathrm{d}\nu_1$$

c'est-à-dire $(\mu_1, \nu_1) + (\mu_2, \nu_2) - (\mu_1, \nu_2) - (\mu_2, \nu_1)$ ce qui est indépendant de la décomposition de μ et ν.

L'*énergie* de μ est par définition

$$(\mu,\mu) = \|\mu_1\|_e^2 + \|\mu_2\|_e^2 - 2(\mu_1,\mu_2) \geqslant (\|\mu_1\|_e - \|\mu_2\|_e)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, l'énergie est $\geqslant 0$ (ce qui se traduit pour un noyau quelconque en disant qu'il est de type positif). On pose $\|\mu\|_e = \sqrt{(\mu,\mu)}$. Il s'ensuit, comme on sait, pour $\mu, \nu \in \mathcal{E}$ et a et b réels quelconques

$$\|a\mu + b\nu\|_e^2 = a^2\|\mu\|_e^2 + b^2\|\nu\|_e^2 + 2ab(\mu,\nu) \geqslant 0$$

d'où

$$|(\mu,\nu)| \leqslant \|\mu\|_e \|\nu\|_e \tag{XI.4}$$

sans restriction de signe sur μ et ν.

Théorème. *Pour toute $\mu \in \mathcal{E}$, la nullité de la norme-énergie c'est-à-dire la condition $\|\mu\|_e = 0$, équivaut à $\mu = 0$ (propriété qui, jointe à celle de l'énergie $\geqslant 0$ s'appelle* principe de l'énergie*).*

Si μ est nulle, on a $\|\mu\|_e = 0$. Réciproquement, si $\|\mu\|_e = 0$, on a $|(\mu,\nu)| \leqslant \|\mu\|_e\|\nu\|_e = 0$ pour toute $\nu \in \mathcal{E}$ donc $(\mu,\nu) = 0$. C'est vrai en particulier pour les mesures ν associées aux translatées ψ' de ψ_ρ. Donc, pour la décomposition $\mu = \mu_1 - \mu_2$,

$$\int \psi' \, \mathrm{d}\mu_1 = \int \psi' \, \mathrm{d}\mu_2.$$

Mais les ψ' forment un ensemble positivement riche, donc $\mu_1 = \mu_2$ et $\mu = 0$.

On en conclut que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel préhilbertien, pour le produit scalaire (μ,ν) et la norme $\|\mu\|_e$.

§ 4. — Principe de domination ou principe du maximum de Cartan.

De la représentation potentielle d'une fonction surharmonique $v \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^n$ (chap. IV), il résulte que, pour que v soit un potentiel, il faut et il suffit que $\lim_{r\to\infty} \mathcal{M}_v^r(0) = 0$. (Étendant le langage du chap. IX, cela signifie l'identité dans $\mathbb{R}^n$ des h-potentiels vrais (chap. IV) et des potentiels abstraits). On a déjà dit (chap. IV) que dans $\mathbb{R}^n$ une fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorée par un potentiel surharmonique est un potentiel surharmonique.

D'autre part, si U^μ ($\mu \geqslant 0$) est un potentiel d'énergie finie, tout potentiel U^μ ($\nu \geqslant 0$) majoré par U^μ est aussi d'énergie finie, car

$$\int U^\nu \, \mathrm{d}\nu \leqslant \int U^\mu \, \mathrm{d}\nu = \int U^\nu \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int U^\mu \, \mathrm{d}\mu = \|u\|_e^2 < +\infty.$$

https://spartacus-idh.com

Principe de domination. *Soient v une fonction surharmonique $\geqslant 0$ et U^μ un potentiel d'énergie finie de mesure positive dans $\mathbb{R}^n$. Si v majore U^μ sur un support restreint de μ (c'est-à-dire sur un ensemble dont le complémentaire est de μ-mesure nulle), on a $v \geqslant U^\mu$ dans $\mathbb{R}^n$.*

En effet, $\inf(v, U^\mu)$ est une fonction surharmonique majorée par U^μ ; c'est donc un potentiel d'énergie finie : $\inf(v, U^\mu) = U^\nu$ où ν est une mesure positive. On a

$$\|\mu - \nu\|^2 = \int (U^\mu - U^\nu)\, \mathrm{d}\mu - \int (U^\mu - U^\nu)\, \mathrm{d}\nu = -\int (U^\mu - U^\nu)\, \mathrm{d}\nu \leqslant 0$$

car U^μ et U^ν coïncident sur un borélien support de μ donc la première intégrale du second membre est nulle ; la seconde est bien $\geqslant 0$, car ν est positive et $U^\nu \leqslant U^\mu$. Il en résulte que $\|\mu - \nu\|_e = 0$, c'est-à-dire $\mu = \nu$ d'où

$$U^\mu = \inf(U^\mu, v) \leqslant v.$$

Remarque.

1. C'est une conséquence du principe de domination fort (fin chap. IX) parce qu'un ensemble borélien polaire est de μ-mesure nulle (voir plus loin, § 7).

2. Signalons que des formes affaiblies de ce principe (comme la plus faible du chap. IX) ou seulement le principe du maximum de Frostman entraînent le principe de l'énergie, même pour des noyaux bien plus généraux (voir Ninomya, bibliogr.).

§ 5. — Théorème fondamental (Cartan).

Théorème. *Dans l'espace préhilbertien $\mathcal{E}$, l'ensemble $\mathcal{E}^+$ est complet* (31).

On dégagera d'abord plusieurs lemmes.

Lemme XI.5.1. *Soit (U^{μ_n}) une suite monotone de potentiels de mesures positives d'énergie finie, convergeant vers un potentiel U^μ de mesure positive d'énergie finie. La suite (μ_n) converge fortement vers μ dans l'espace $\mathcal{E}$.*

Rappelons que si ν et ν' sont deux mesures positives d'énergie finie telles que $U^\nu \leqslant U^{\nu'}$, on a $\|\nu\|_e \leqslant \|\nu'\|_e$ (§ 4). Supposons par exemple la suite croissante. Pour $p \geqslant n$ on a

$$(\mu_n, \mu_p - \mu_n) = \int (U^{\mu_p} - U^{\mu_n})\, \mathrm{d}\mu_n \geqslant 0$$

donc

$$\begin{aligned}\|\mu_p\|_e^2 &= \|\mu_n + \mu_p - \mu_n\|_e^2 = \|\mu_n\|_e^2 + \|\mu_p - \mu_n\|_e^2 + 2(\mu_n, \mu_p - \mu_n) \\ &\geqslant \|\mu_n\|_e^2 + \|\mu_p - \mu_n\|_e^2\end{aligned}$$

(31) Mais d'après un exemple de Cartan, $\mathcal{E}$ n'est pas complet. La complétion est le point de départ des travaux de Deny sur les potentiels (d'énergie finie) obtenus par convolution d'une distribution fixe (noyau) et d'une distribution variable (Deny, *Acta Math.* 82, 1950).

© Spartacus-Idh 2019

c'est-à-dire

$$\|\mu_p - \mu_n\|_e^2 \leqslant \|\mu_p\|_e^2 - \|\mu_n\|_e^2.$$

Comme $U^{\mu_n} \leqslant U^{\mu}$, on a d'après la remarque initiale $\|\mu_n\|_e \leqslant \|\mu\|_e$ pour tout n ; la suite $(\|\mu_n\|_e)$ est croissante et majorée, donc c'est une suite de Cauchy et par conséquent (μ_n) est une suite de Cauchy de l'espace $\mathcal{E}$.

De plus, soit $\lambda \in \mathcal{E}$; la suite $\int U^{\mu_n}\,\mathrm{d}\lambda$ converge vers $\int U^{\mu}\,\mathrm{d}\lambda$ (convergence monotone), c'est-à-dire que μ_n converge faiblement vers μ, et comme c'est une suite de Cauchy elle converge fortement vers μ dans $\mathcal{E}$.

Lemme XI.5.2. *L'ensemble des mesures de $\mathcal{E}$ à support compact et dont le potentiel est fini continu à support compact est dense dans $\mathcal{E}$.*

Nous démontrerons d'abord que l'ensemble des mesures à support compact de $\mathcal{E}^+$ est dense dans $\mathcal{E}^+$. En effet, soit $\mu \in \mathcal{E}^+$; pour tout nombre $r > 0$, désignons par μ_r la restriction de μ à la boule $B(0,r)$. U^{μ} est la limite de la suite croissante U^{μ_n}, et μ_n appartient à $\mathcal{E}^+$. Il résulte alors du lemme XI.5.1. que la suite μ_n converge fortement vers μ dans $\mathcal{E}$.

Or, une mesure $\mu \in \mathcal{E}^+$ à support compact peut être, dans $\mathcal{E}^+$, approchée arbitrairement par une mesure de même type mais de potentiel fini continu. Car par régularisation de U^{μ} (voir chap. II, § 6) on forme une suite croissante de potentiels finis continus tendant vers U^{μ}.

Enfin, une mesure $\nu \in \mathcal{E}$ à support compact et potentiel fini continu peut être approchée arbitrairement dans $\mathcal{E}$ par une mesure de $\mathcal{E}$ dont le support est compact et le potentiel appartient à $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Il suffit d'introduire la fonction φ_n valant U^{ν} hors de $B(0,n)$ et son intégrale de Poisson dans $B(0,n)$; les fonctions φ_n surharmoniques $\geqslant 0$ majorées par U^{ν} forment une suite décroissante de potentiels tendant vers 0 ($n \to \infty$) ; les mesures associées tendent fortement vers 0 d'où l'approximation cherchée de U^{ν} par $U^{\nu} - \varphi_n$.

Lemme XI.5.3. *Soit μ_n une suite appartenant à $\mathcal{E}^+$.*

1. *La convergence faible vers $\mu \in \mathcal{E}^+$ entraîne la convergence vague.*

2. *Si $\|\mu_n\|_e \leqslant M$ fixe, la convergence vague de μ_n vers μ a priori quelconque (nécessairement $\geqslant 0$) entraîne $\mu \in \mathcal{E}^+$ et la convergence faible vers μ.*

D'abord, si μ_n converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{E}^+$, $\int U^{\lambda}\,\mathrm{d}\mu_n$ converge vers $\int U^{\lambda}\,\mathrm{d}\mu$ pour toute λ associée à un ψ_p. Donc $\int f\,\mathrm{d}\mu_n$ converge vers $\int f\,\mathrm{d}\mu$ pour toutes les f d'un ensemble positivement riche, d'où la convergence vague.

Partons maintenant des hypothèses de la seconde partie. Comme U^{μ_p} est semi-continu inférieurement, c'est la limite d'une suite croissante $\varphi_i \geqslant 0$ de fonctions finies continues à support compact et

$$\int U^{\mu_p}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int \varphi_i\,\mathrm{d}\mu.$$

Or

$$\int \varphi_i\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_i\,\mathrm{d}\mu_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \int U^{\mu_p}\,\mathrm{d}\mu_n.$$

Comme

$$\int U^{\mu_p}\,\mathrm{d}\mu_n = (\mu_p, \mu_n) \leqslant \|\mu_p\|_e \|\mu_n\|_e \leqslant M^2$$

on conclut que $\int \varphi_i\,\mathrm{d}\mu$ donc $\int U^{\mu_p}\,\mathrm{d}\mu$ ou $\int U^{\mu}\,\mathrm{d}\mu_p$ sont majorées par M^2.

https://spartacus-idh.com

De même, U^μ est limite de ψ_i analogue à φ_i et $\int U^\mu \, d\mu_n = \lim_{i\to\infty} \int \psi_i \, d\mu$ avec

$$\int \psi_i \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \psi_i \, d\mu_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \int U^\mu \, d\mu_n \leqslant M^2.$$

Donc

$$\int U^\mu \, d\mu \leqslant M^2 \quad \text{et} \quad \mu \in \mathcal{E}^+.$$

Pour toute mesure $\lambda \in \mathcal{E}^+$ dont le potentiel est fini continu à support compact, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int U^\lambda \, d\mu_n = \int U^\lambda \, d\mu$$

(convergence vague), c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty}(\mu_n, \lambda) = (\mu, \lambda)$ d'où la convergence faible de μ_n vers μ grâce au lemme XI.5.2. (parce que la suite $\|\mu_n\|_e$ est bornée).

Le lemme XI.5.3. (2e partie) va nous permettre de démontrer le théorème fondamental. Soit μ_n une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{E}^+$; la suite des normes $\|\mu_n\|_e$ est bornée. Pour montrer que μ_n converge fortement dans $\mathcal{E}^+$, il suffit de montrer qu'elle converge faiblement (c'est une suite de Cauchy) ; d'après le lemme XI.5.3. la convergence faible résulte de la convergence vague que nous allons montrer.

Soit $\lambda \in \mathcal{E}^+$; on a $|(\mu_p - \mu_n, \lambda)| \leqslant \|\mu_p - \mu_n\|_e \|\lambda\|_e$ donc (μ_n, λ) est une suite de Cauchy de nombres réels et elle est convergente, en particulier pour les mesures λ associées à des ψ'. Ainsi $\int \psi' \, d\mu_n$ converge pour chacun des ψ' dont l'ensemble est positivement riche ; la convergence vague de μ_n en résulte, ce qui démontre le théorème.

§ 6. — Projection dans $\mathcal{E}$.

Soient $\mathcal{F}$ une partie convexe complète de $\mathcal{E}$ et μ une mesure d'énergie finie.

On sait que μ admet une projection ν (unique) sur $\mathcal{F}$, caractérisée par la propriété $\|\mu - \nu\|_e \leqslant \|\mu - \lambda\|_e$ pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$.

Rappelons aussi, en la démontrant, une propriété équivalente, dans les espaces préhilbertiens :

α. Autre caractérisation de la projection.

De la condition précédente, on déduit pour tout λ

$$\|\mu-\nu\|_e^2 \leqslant \|\mu-\lambda\|_e^2 = \|\mu-\nu+\nu-\lambda\|_e^2 = \|\mu-\nu\|_e^2 + \|\nu-\lambda\|_e^2 + 2(\mu-\nu, \nu-\lambda)$$

d'où $2(\mu-\nu, \lambda-\nu) \leqslant \|\lambda-\nu\|^2$ pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$ et en particulier pour $\lambda = \nu + k(\lambda_0 - \nu)$ avec $0 < k < 1$ ($\mathcal{F}$ convexe), λ_0 étant choisi arbitrairement dans $\mathcal{F}$. On a donc

$$2k(\mu-\nu, \lambda_0-\nu) \leqslant k^2\|\lambda_0-\nu\|_e^2 \quad \text{ou} \quad 2(\mu-\nu, \lambda_0-\nu) \leqslant k\|\lambda_0-\nu\|_e^2$$

À la limite, lorsque k tend vers 0, on obtient la *propriété*

$$(\mu-\nu, \lambda_0-\nu) \leqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda_0 \in \mathcal{F}. \tag{XI.5}$$

Cette propriété *caractérise* ν comme projection, car si une mesure $\nu \in \mathcal{F}$ satisfait à $(\mu-\nu, \lambda-\nu) \leqslant 0$ pour tout $\lambda_0 \in \mathcal{F}$, on a

$$\|\mu-\lambda\|_e^2 \geqslant \|\mu-\nu\|_e^2 + \|\nu-\lambda\|_e^2 \quad \text{d'où} \quad \|\mu-\nu\|_e \leqslant \|\mu-\lambda\|_e.$$

© Spartacus-Idh 2019

β. Caractérisation de Gauss

Comme

$$\|\mu-\lambda\|_e^2 = \|\mu\|_e^2 - 2(\mu,\lambda) + \|\lambda\|_e^2 = (\lambda - 2\mu,\lambda) + \|\mu\|_e^2$$

la projection de μ sur $\mathcal{F}$ est la mesure $\nu \in \mathcal{F}$ qui rend minimum l'intégrale

$$\int (U^\lambda - 2U^\mu)\,\mathrm{d}\lambda = (\lambda - 2\mu,\lambda) \quad \text{parmi les} \quad \lambda \in \mathcal{F}.$$

C'est au fond une idée de Gauss (1840), reprise cent ans plus tard (Frostman, De La Vallée Poussin…).

γ. Cas particulier et nouvelle caractérisation

Supposons $0 \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} + \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$; $\mathcal{F}$ est donc un cône convexe complet.

La propriété (XI.5) donne $(\mu-\nu,\nu) \geqslant 0$ pour $\lambda_0 = 0$ et $(\mu-\nu,\lambda) \leqslant 0$ pour $\lambda_0 = \lambda + \nu$, ν projection, $\lambda \in \mathcal{F}$ quelconque.

La projection ν de μ sur $\mathcal{F}$ est caractérisée par les conditions

$$\begin{aligned} &(\mu-\nu,\nu) \geqslant 0, \\ &(\mu-\nu,\lambda) \leqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

En effet, ces conditions entraînent

$$(\mu-\nu,\lambda-\nu) = (\mu-\nu,\lambda) - (\mu-\nu,\nu) \leqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathcal{F}.$$

Noter qu'elles entraînent aussi $(\mu-\nu,\nu) = 0$ ou $(\mu,\nu) = \|\nu\|_e^2$.

§ 7. — Balayage relatif à un compact.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $\mathcal{F}_K$ des mesures $\lambda \in \mathcal{E}^+$ dont le support est contenu dans K est un cône convexe complet de $\mathcal{E}$, car c'est évidemment un cône convexe et vaguement fermé, donc fermé dans $\mathcal{E}^+$ (lemme XI.5.3.) ; comme $\mathcal{E}^+$ est complet, $\mathcal{F}_K$ est complet et se prête donc à l'application de la méthode de projection.

Théorème. *Soit $\mu \in \mathcal{E}^+$. La projection μ_K de μ sur $\mathcal{F}_K$ est caractérisée comme la seule mesure $\geqslant 0$ sur K satisfaisant aux conditions*

$$\begin{aligned} &U^\nu \leqslant U^\mu \quad \textit{partout}, \\ &U^\nu = U^\mu \quad \textit{presque partout sur } K \textit{ relativement à toute } \lambda \in \mathcal{E}^+. \end{aligned}$$

En effet, d'après les propriétés de la projection

$$\begin{aligned} &\int (U^\mu - U^{\mu_K})\,\mathrm{d}\lambda \leqslant 0 \quad \text{pour toute } \lambda \in \mathcal{F}_K, \\ &\int (U^\mu - U^{\mu_K})\,\mathrm{d}\mu_K = 0. \end{aligned}$$

https://spartacus-idh.com

L'inégalité montre que l'ensemble des points où $U^\mu > U^{\mu_K}$ est de λ-mesure nulle pour tout $\lambda \in \mathcal{F}_K$, sinon on aurait une contradiction en réduisant une telle mesure λ à l'ensemble. Cela est vrai pour $\lambda = \mu_K$ et la seconde propriété montre alors que l'ensemble où $U^\mu < U^{\mu_K}$ est aussi de μ_K-mesure nulle. Donc $U^\mu = U^{\mu_K}$ sur un support restreint de μ_K et le principe de domination fournit $U^\mu \geqslant U^{\mu_K}$ partout, d'où les propriétés annoncées.

Inversement, l'inégalité $U^\nu \leqslant U^\mu$ entraîne $\nu \in \mathcal{E}^+$ et l'égalité λ-presque partout sur K donne $(\mu - \nu, \lambda)$, quelle que soit $\lambda \in \mathcal{F}_K$. D'où $\nu = \mu_K$.

En nous reportant à la théorie antérieure du balayage ou extrémisation, supposée adaptée à $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, on voit immédiatement que μ_K *est la mesure dite balayée de* μ *relativement à* K, grâce au théorème suivant

Théorème. *Pour qu'un ensemble borélien soit de* λ*-mesure nulle pour toute* $\lambda \in \mathcal{E}^+$ *il faut et il suffit qu'il soit polaire.*

D'après le théorème de capacitabilité, il suffit d'examiner le cas d'un ensemble compact E. S'il n'est pas polaire, il existe sur une mesure μ positive non nulle de potentiel borné ; μ est donc d'énergie finie et $\mu(E) \neq 0$.

Réciproquement, soit $\mu \in \mathcal{E}^+$ telle que $\mu(E) \neq 0$. Alors $\inf(U^\mu, k)$ (k constante) est un potentiel $U^{\mu'}$ non nul d'énergie finie ($\mu' \neq 0$). La mesure μ'_E obtenue par la projection précédente n'est pas nulle, puisque $U^{\mu'_E}$ ne peut différer de $U^{\mu'}$ sur E tout entier vu que $\mu(E) \neq 0$, $\mu \in \mathcal{E}^+$. Comme on a $U^{\mu'_E} \leqslant U^{\mu'} \leqslant k$, E n'est pas polaire.

La projection précédente fournit donc en particulier la distribution capacitaire (à partir d'une distribution uniforme sur une sphère entourant le compact).

Cartan a pu poursuivre la théorie précédente du balayage pour des ensembles quelconques et des mesures positives non d'énergie finie (sans même utiliser le grand théorème de convergence), mais avec moins de simplicité.

© Spartacus-Idh 2019

§ 8. — Distribution capacitaire et énergie.

Considérons sur le compact K de capacité $\neq 0$, les mesures $\lambda \in \mathcal{E}^+$ telles que $\lambda(K) = 1$. Elles forment aussi une partie convexe complète (fermée) $\mathcal{F}'_K$ non vide. La projection de l'origine sur $\mathcal{F}'_K$ est une mesure $\nu_0 \geqslant 0$, unique sous la condition de charger K et d'avoir une énergie minima.

Nous allons voir que ν_0 est *la distribution d'équilibre de la masse unité sur* K, autrement dit vaut $\frac{\mu_0}{C(K)}$ ($C(K)$ capacité de K, μ_0 distribution capacitaire) et l'énergie minima est donc

$$\int U^{\nu_0}\, \mathrm{d}\nu_0 = \frac{1}{C(K)}.$$

En effet, on sait que μ_0 s'obtient en balayant relativement à K la distribution uniforme de masse R^{n-2} sur une sphère $B^*(0,R)$ ($B(0,R) \supset K$) parce que celle-ci donne le potentiel 1 dans $B(0,R)$. Donc, selon la caractérisation **β**., μ_0 est obtenue en minimisant

$$\int (U^\lambda - 2)\, \mathrm{d}\lambda \quad (\lambda \in \mathcal{F}_K) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int U^\lambda\, \mathrm{d}\lambda - 2\lambda(K).$$

Or, pour $\lambda(K) = m$, $\int U^\lambda \, d\lambda$ est minima pour $\lambda = m\nu_0$ seulement et vaut $\|\nu_0\|_e^2 m^2$. Donc le minimum de $\int (U^\lambda - 2)\, d\lambda$ s'obtient lorsque m minimise $\|\nu_0\|_e^2 m^2 - 2m$ soit $m = \frac{1}{\|\nu_0\|_e^2}$, pour $\lambda = \frac{\nu_0}{\|\nu_0\|_e^2}$. Ainsi μ_0 et ν_0 sont proportionnelles, d'où le résultat.

Corollaire. *La distribution capacitaire μ_0 est l'unique distribution de la masse $C(K)$ sur K dont le potentiel soit $\leqslant 1$.*

Car si ν est une telle distribution, $\frac{\nu}{C(K)}$ est d'énergie $\frac{1}{C(K)^2} \int U^\nu \, d\nu \leqslant \frac{1}{C(K)}$, ce qui exige l'égalité et l'identité $\frac{\nu}{C(K)} = \nu_0$.

§ 9. — Énergie et intégrale de Dirichlet.

À côté de l'énergie mutuelle (μ_1, μ_2) de mesures de $\mathcal{E}$ et de la norme énergie $\|\mu\|$, on rappelle, pour les fonctions (BLD), le produit scalaire

$$(f_1, f_2) = \int (\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2)\, dx$$

et la norme de Dirichlet $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ (on mettra en indice, s'il y a lieu, l'ensemble de restriction pour les mesures ou les fonctions).

Lemme XI.9.1. *Si $\mu \in \mathcal{E}^+$ et si $v = U^\mu$ est deux fois continûment différentiable, $\|U^\mu\|$ est fini, $\lim_{r\to\infty} \|I_v^r\| = 0$ (intégrale de Poisson de v dans $B(0,r)$) et $\varphi_n \|\mu\| = \|U^\mu\|$ (φ_n flux de r^{2-n} à travers $S(0,R)$).*

Désignons, en effet, par v_r le potentiel de Green dans $B(0,r)$ de la restriction de μ à cette boule ; on a $v_r = v - I_v^r$ dans $B(0,r)$, et l'intégrale de Poisson I_v^r admet, vu la régularité de v, un gradient dans $B(0,r)$ qui se prolonge continûment sur $S(0,r)$. De sorte que, par une formule de Green

$$\varphi_n \int v_r \, d\mu = \int \operatorname{grad}^2 v_r \, dx \qquad \text{(intégrales sur } B(0,r))$$

puisque μ est la mesure de densité $-\Delta v / \varphi_n$. D'où

$$\int \operatorname{grad}^2 v \, dx \leqslant \int \varphi_n \int v \, d\mu < +\infty.$$

Appliquons les résultats du chap. X (§ 2, remarque X.2.2.) ou reprenons-en le raisonnement : $\|v\| \leqslant \liminf_{r\to\infty} \|v_r\|$, et l'on ne peut avoir $\|v\| < \limsup_{r\to\infty} \|v_r\|$ sinon on aurait pour r convenable $\|v\| < \|v_r\| = \|v - I_v^r\|$ contrairement à la propriété minimisante de $I_v^r = H_v^{B_r}$. Donc $\lim_{r\to\infty} \|v_r\| = \|v\|$ et $\varphi_n \|\mu\| = \|v\|$. Cela entraîne $\lim_{r\to\infty} \|I_v^{B_r}\|_{B_r} = 0$, (raisonnement du chap. X (§ 2, remarque X.2.1.)).

Lemme XI.9.2. *Si μ_1 et μ_2 satisfont aux hypothèses du lemme XI.9.1. on a*

$$\varphi_n(\mu_1, \mu_2) = (U^{\mu_1}, U^{\mu_2}).$$

En effet, la formule de Green dans $B(0,r) = B_r$ donne

$$\int_{B_r} (v_1)_r \Delta v_2 \, dx + \int_{B_r} (\operatorname{grad}(v_1)_r, \operatorname{grad} v_2)\, dx = 0$$

https://spartacus-idh.com

(avec les notations du lemme XI.9.1.), d'où

$$\lim_{r\to\infty}((v_1)_r, v_2)_{B_r} = \varphi_n(\mu_1,\mu_2)$$

et comme

$$\lim_{r\to\infty}\|v_1-(v_1)_r\|_{B_r}=0,\quad \lim_{r\to\infty}(v_1,v_2)_{B_r}=\varphi_n(\mu_1,\mu_2).$$

Le lemme s'étend trivialement à des différences de mesures satisfaisant aux hypothèses du lemme XI.9.1..

Théorème. *Quelle que soit $\mu\in\mathcal{E}^+$, U^μ est une fonction BLD et $\varphi_n\|\mu\| = \|U^\mu\|$; quelles que soient μ_1 et $\mu_2\in\mathcal{E}$, on a $\varphi_n(\mu_1,\mu_2) = (U^{\mu_1}, U^{\mu_2}))$ (φ_n coefficient numérique de flux défini plus haut).*

Cela se déduit du cas des mesures $\mu\in\mathcal{E}^+$. Alors on introduit par régularisation une suite croissante de fonctions surharmoniques positives v_p deux fois continûment différentiables convergeant vers U^μ ; v_p est un potentiel U^{μ_p} ($\mu_p\in\mathcal{E}^+$) et l'on sait que $\|\mu-\mu_p\|$ tend vers 0 quand p tend vers ∞. D'autre part $\|U^{\mu_q}-U^{\mu_p}\| = \varphi_n\|\mu_q-\mu_p\|$ de sorte que U^{μ_p} est une suite de Cauchy en norme de Dirichlet, et que sa limite est une fonction BLD. On a enfin $\lim_{p\to\infty}\|U^{\mu_p}-U^\mu\|=0$. D'où les résultats annoncés par passage à la limite.

§ 10. — Extension à un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$.

La même théorie peut être développée pour des mesures dans Ω avec noyau de Green G^Ω et potentiel de Green $G\mu$ à partir de l'inégalité fondamentale (XI.2) étendue à ces potentiels. Toute la suite, dès le § 3, s'adapte en effet sans difficulté : ainsi les translatées $\psi_\rho^{x_0}$ des ψ_ρ (relatives à $x_0\in\Omega$ à une distance $>\rho$ de la frontière) forment un ensemble positivement très riche de fonctions dans Ω qui sont des potentiels de Green, de masses situées sur $B^*(x_0,\rho)$ et $B^*(x_0,\rho/2)$. Les approximations de $\mathbb{R}^n$ par des boules $B(0,n)$ se remplacent par des approximations au moyen de Ω_n croissants ($\overline{\Omega}_n\subset\Omega$) dont on supposera, si nécessaire, que la frontière est assez régulière.

Établissons donc l'inégalité (XI.2) dans les nouvelles conditions. Soit d'abord une mesure $\mu\geqslant 0$ à support compact $K\subset\Omega$. Si l'on remplace dans Ω, le h-potentiel (c'est-à-dire newtonien ou logarithmique) U^μ par $H^\Omega_{U^\mu}\leqslant U^\mu$, on obtient une fonction quasi-surharmonique dans $\mathbb{R}^n$, dont la régularisée est une fonction surharmonique V, bornée au voisinage de Ω^* et de mesure associée μ' avec support dans Ω^*, telle que $\mu'(\Omega^*)=\mu(K)$. Voyons que V est le h-potentiel de μ' ; c'est évident si $n\geqslant 3$ et cela résulte, si $n=2$, de ce que $V-U^{\mu'}$ tend vers 0 à l'infini. Noter que $\int G\mu\,\mathrm{d}\mu$ est fini ou infini ($+\infty$) en même temps que $\int U^\mu\,\mathrm{d}\mu$, et que $\int U^{\mu'}\,\mathrm{d}\mu' = \int U^\mu\,\mathrm{d}\mu' = \int U^{\mu'}\,\mathrm{d}\mu$ est fini.

On constate alors que $U^\mu - U^{\mu'}$ vaut dans Ω le potentiel de Green $G\mu$, car la différence dans Ω vaut quasi-partout une fonction harmonique qui est bornée au voisinage de Ω^* et tend vers 0 aux points réguliers. Ainsi $\int G\mu_1\,\mathrm{d}\mu_2$ (μ_1,μ_2 mesures $\geqslant 0$ du type précédent) vaut

$$\int(U^{\mu_1}-U^{\mu_1'})\,\mathrm{d}\mu_2 - \int(U^{\mu_1}-U^{\mu_1'})\,\mathrm{d}\mu_2'$$

car la seconde intégrale est nulle.

© Spartacus-Idh 2019

1. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, on conclut, en utilisant les produits scalaires dans $\mathcal{E}$

$$\int G\mu_1 \, d\mu_2 = (\mu_1 - \mu_1', \mu_2 - \mu_2') \qquad (\mu_1, \mu_2 \text{ dans } \mathcal{E}^+)$$

d'où, grâce à la théorie développée dans $\mathbb{R}^n$,

$$\Big(\int G\mu_1 \, d\mu_2 \Big)^2 \leqslant \int G\mu_1 \, d\mu_1 \int G\mu_2 \, d\mu_2.$$

On étend cela à des mesures $\geqslant 0$ quelconques dans Ω par passage à la limite grâce à la remarque suivante : si μ_n, ν_n sont les restrictions de mesures μ, ν (mesures $\geqslant 0$ dans Ω) à Ω_n tel que $\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega$ et $\cup_n \Omega_n = \Omega$, on a

$$\int G\mu \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{p\to\infty} \int G\mu_n \, d\nu_p \Big).$$

2. Si $n = 2$, il suffit encore d'examiner le cas des mesures $\geqslant 0$ à support compact dans Ω. Posant $h_\varepsilon(x,y) = \frac{\|x-y\|^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon}$, on utilisera, comme M. Riesz, le fait que

$$\log \frac{1}{\|x-y\|} = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x,y)$$

d'ailleurs en croissant pour ε assez petit ($\|x-y\|$ étant borné). Alors si $\int \log \frac{1}{\|x-y\|} \, d\mu(x) \, d\mu(y)$ est fini (μ mesure $\geqslant 0$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$), de même $\int h_\varepsilon(x,y) \, d\mu(x) \, d\mu(y)$ pour ε assez petit.

Considérons donc l'ensemble $\mathcal{M}_\varepsilon$, des mesures $\geqslant 0$ dans $\overline{\Omega}$, telles que $\int \|x-y\|^{-\varepsilon} \, d\mu(x)$ soit fini. Le lemme du § 2 s'applique dans $\mathbb{R}^2$ avec $n = 2$, $\alpha = 2 - \varepsilon$; l'inégalité finale s'étend à des différences de mesures de $\mathcal{M}_\varepsilon$, en particulier, sans difficultés, aux différences $\mu = \mu_1 - \mu_1'$, $\nu = \mu_2 - \mu_2'$ introduites plus haut, ce qui donne, grâce au fait que $\mu(\mathbb{R}^2) = \nu(\mathbb{R}^2) = 0$

$$\left| \int h_\varepsilon(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \right|^2 \leqslant \left| \int h_\varepsilon(x,y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \right| \cdot \left| \int h_\varepsilon(x,y) \, d\nu(x) \, d\nu(y) \right|$$

d'où, à la limite l'inégalité analogue avec noyau logarithmique. On en déduit comme plus haut l'inégalité avec le noyau de Green.

En fait la théorie s'étend d'abord à des cas un peu plus généraux, comme les « espaces de Green » (voir plus loin juste avant l'appendice : le cas particulier des surfaces de Riemann hyperboliques a été explicité par Edwards). Mais il est bien plus important d'approfondir le principe de l'énergie qui sert de base, dans des cas étendus d'espace et de noyau, soit directement, par exemple en généralisant le procédé de composition du § 2. (Cartan), soit en le comparant à d'autres « principes » de la théorie générale (Ninomya). Rappelons aussi l'extension dans $\mathbb{R}^n$, par l'emploi des distributions, développée par Deny avec des noyaux-distributions.

Précisons seulement comment un résultat général de Ninomya permet l'extension immédiate de la théorie précédente (à partir du principe d'énergie) avec le noyau G (fonction de Green) dans Ω (par ex. borné dans $\mathbb{R}^n$, mais en fait plus généralement espace de Green).

Le principe de l'énergie est en effet satisfait parce que, selon Ninomya, (d'ailleurs dans des cas très généraux de noyau symétrique) l'inégalité

https://spartacus-idh.com

$\int G\,d\mu \geqslant \int G\,d\nu$, ($\mu, \nu \geqslant 0$, à supports compacts et énergies finies) supposée valable sur le support compact de μ entraîne l'inégalité partout (ou même suffirait-il de le savoir sur un ensemble de ν-mesure nulle). Et cette propriété résulte pour nous du principe de domination (forme forte), fin chap. IX.

Bibliographie

H. Cartan *Bull. Soc. Math. de France*, 1941, et 1945.

H. Cartan *Bull. Sc. Math.* 1942.

H. Cartan *Annales de l'Univ. de Grenoble*, t. 22, 1946.

Deny, Deny-Lions cités chap. X

Deny *Ann. Inst. Fourier* t. 2, 1950, t. 3, 1951.

Edwards *Annales Inst. Fourier*, t. 8/1, 1959.

Ninomya *Journal of the Institute of Polyt. Osaka Univ.* vol. 5, 1954, vol. 8, 1957.

P.-A. Meyer *Séminaire potentiel* 7 (62-63).

Dans la bibliographie ancienne voir surtout

Frostman et G. C. Evans *Trans. Am. M. S.* t. 37, 1935.

De La Vallée Poussin *Act. sc. ind.* n° 578.

M. Riesz cité chap. IX.

Soulignons l'extension aux potentiels d'ordre α de M. Riesz par **Landkoff** (ouvrage cité, bibl. appendice).

© Spartacus-Idh 2019

ÉLÉMENTS EXTRÉMAUX ET FRONTIÈRE DE MARTIN

§ 1. — Introduction.

On a depuis longtemps étudié l'intégrale obtenue en remplaçant dans l'intégrale de Poisson I_f la fonction f, c'est-à-dire la mesure de densité f, par une mesure quelconque sur la sphère. On a même montré qu'on obtient ainsi la fonction la plus générale qui soit égale à une différence de deux fonctions harmoniques $\geqslant 0$ (c'est ce que nous obtiendrons plus loin comme cas particulier de la théorie qui va suivre).

R. S. Martin, en 1941, a étendu ce type de représentation intégrale à des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dans un domaine quelconque, par exemple borné, de $\mathbb{R}^n$. Il utilisait non seulement un noyau convenable mais une frontière « idéale » qu'il construisait spécialement, identifiable à la sphère dans le cas de la boule. C'est la frontière de Martin qu'on introduira par un procédé plus général. Ce travail a beaucoup attiré l'attention sur les points extrémaux d'un compact convexe d'un E.V.T. et les travaux récents sur ce sujet (surtout de Choquet) permettent inversement d'interpréter et de retrouver bien des résultats de la théorie du potentiel. L'une des meilleurs applications concerne précisément la frontière de Martin que nous allons traiter de cette manière en nous appuyant sur quelques résultats généraux.

© Spartacus-Idh 2019

§ 2. — Centre de gravité ou barycentre.

Considérons dans un espace vectoriel réel E localement convexe séparé un compact convexe K sur lequel est donnée une mesure de Radon positive μ de total $\|\mu\| = 1$ (mesure dite unitaire). On veut en définir le barycentre X.

Si la mesure est discrète et formée de masses $m_i > 0$ aux points x_i ($\sum_i m_i = 1$) on pose $X_\mu = \sum m_i x_i$.

On sait que dans l'espace des mesures $\geqslant 0$ sur un compact, pourvu de la topologie de la convergence vague, toute mesure est limite d'une base de filtre portée par le sous-espace des mesures discrètes $\nu \geqslant 0$ de même total.

Théorème. *Considérons une telle base de filtre $\mathcal{F}$ convergeant vers μ de total 1. Alors $X_\nu \in K$ pour ν discrète converge selon $\mathcal{F}$ vers un point $X \in K$ indépendant de $\mathcal{F}$, dit barycentre de μ.*

Car si $\ell(x)$ est une forme linéaire continue et $\nu = \sum_i m_i x_i$ ($\sum m_i = 1$),

$$\ell(X_\nu) = \sum_i m_i \ell(x_i) = \int \ell(x)\,\mathrm{d}\nu(x) \quad \text{converge selon } \mathcal{F} \text{ vers} \quad \int \ell(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Si X' est une valeur d'adhérence de X_ν selon $\mathcal{F}$, donc limite selon un $\mathcal{F}'$ plus fin, on a

$$\int \ell(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \ell(x') = \lim_{\mathcal{F}'} \ell(X_\nu).$$

Cette égalité détermine X', puisque $\ell(X_1) = \ell(X_2)$ pour toute forme linéaire continue exige $X_1 = X_2$ (théorème de Hahn-Banach). Donc $X' = \lim_{\mathcal{F}} X_\nu$.

Remarque.

1. La fin du raisonnement appliquée à μ quelconque montre que X_μ est continue en μ.

2. X_μ est bien déterminé comme le seul point de K tel que $\ell(X) = \int \ell(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ pour toute forme linéaire continue ℓ. On écrit brièvement $X_\mu = \int x\,\mathrm{d}\mu(x)$.

§ 3. — Points extrémaux et représentation barycentrique.

On dit que $X \in K$ (convexe compact non vide) est extrémal si aucun segment ouvert $]x_1, x_2[$, lieu du point $x = tx_1 + (1-t)x_2$, $(0 < t < 1)$, situé dans K ne le contient (On sait qu'il en existe toujours).

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$ considéré comme espace vectoriel, les sommets d'un triangle, les points d'une circonférence sont les points extrémaux de l'ensemble compact défini par le triangle ou le disque correspondant.

Proposition. *Si K est métrisable, l'ensemble des points extrémaux est un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts).*

Car dans l'espace métrisable K^2, le complémentaire de la diagonale est un K_σ ; l'application de K^2 dans K selon $(x_1, x_2) \to \frac{x_1+x_2}{2}$ en donne comme image un K_σ, mais aussi l'ensemble des milieux des segments non nuls de K, c'est-à-dire des points non extrémaux.

Cas de la base d'un cône. Considérons dans E un cône convexe $\mathcal{C}$ dont les génératrices (demi-droites issues de 0) rencontrent toutes un hyperplan fermé ne passant pas par 0. L'ensemble des points d'intersection est convexe et s'appelle la base de E.

Ce cône définit un ordre $x \succ y$ si $x - y \in \mathcal{C}$.

Lorsque la base B est compacte, un point x de B est extrémal si et seulement si tout $y \in \mathcal{C}$, tel que $y \prec x$ est proportionnel à x.

Car si x est non extrémal, il appartient à un segment ouvert $]x_1, x_2[$ de la base : $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$; x_1 n'est pas sur la génératrice de x, donc $\alpha x_1 \prec x$ n'est pas proportionnel à x.

S'il existe inversement $y \in \mathcal{C}$, $y \prec x$, non proportionnel, $x = y + z$ où $z \in \mathcal{C}$ non proportionnel à y ; les points de B où passent les génératrices (distinctes) de y et z sont les extrémités d'un segment ouvert contenant x, et x n'est pas extrémal.

Les points $x \in \mathcal{C}$ tels que tout $y \in \mathcal{C}$, $y \prec x$ soit proportionnel à x sont parfois dits minimaux ; si $x \neq 0$ un critère en est que tout segment ouvert de

https://spartacus-idh.com

$\mathcal{C}$ contenant x appartienne à la génératrice passant par x. Les génératrices des points minimaux sont les génératrices extrémales.

Théorème (de Choquet). *Supposons que la base B du cône convexe soit compacte.*

a. *Si B est métrisable, tout point $x \in B$ est barycentre d'une mesure unitaire portée par l'ensemble des points extrémaux de B.*

b. *Si $\mathcal{C}$ est réticulé pour l'ordre qu'il définit, tout $x \in B$ n'est barycentre que d'au plus une mesure unitaire portée* (32) *par $\mathcal{E}$.*

Cette question a été très approfondie et généralisée ; on connaît maintenant des démonstrations simples surtout pour ***a*** (voir bibl., surtout Choquet-Meyer, Phelps et H. Bauer).

§ 4. — Méthode Générale d'introduction de frontières compactes.

Théorème (Constantinescu-Cornea). *Soit Ω un espace localement compact, non compact et Φ une famille d'applications continues $f : \Omega \to \overline{R} = [-\infty, +\infty]$ (droite numérique achevée). Il existe un espace compact $\hat{\Omega}$ unique à un homéomorphisme près, dont Ω soit un sous-espace partout dense, tel que les fonctions $f \in \Phi$ y admettent un prolongement continu, et que les fonctions prolongées séparent la frontière $\hat{\Omega} - \Omega$. Ω est alors ouvert dans $\hat{\Omega}$.*

L'unicité est facile. L'existence s'établit en considérant l'espace $A = \prod \overline{R}_\varphi$, produit des droites $\overline{R}_\varphi$ correspondant chacune à une fonction φ appartenant à Φ ou réelle finie continue dans Ω et nulle hors d'un compact. L'application Ψ qui à $x \in \Omega$ fait correspondre dans A le point de coordonnées $\varphi(x) \in \overline{R}_\varphi$ est injective et bicontinue ; on obtient ainsi $\Psi(\Omega)$ homéomorphe à Ω et l'adhérence $\overline{\Psi(\Omega)}$ dans A donne le $\hat{\Omega}$ cherché.

Nous renvoyons à l'ouvrage de Constantinescu-Cornea où ce théorème permet de retrouver diverses frontières déjà classiques.

Signalons que la structure uniforme induite sur Ω par celle de $\hat{\Omega}$ est la moins fine rendant uniformément continues les $f \in \Phi$, et compatible avec la topologie de Ω. De sorte que $\hat{\Omega}$ s'obtient aussi par complétion de Ω selon cette structure.

§ 5. — La frontière de Martin.

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ (mais ce serait la même théorie avec un « espace de Green »). On fixe $y_0 \in \Omega$ et on pose

$$K(x,y) = \frac{G(x,y)}{G(x,y_0)} \qquad (G \text{ fonction de Green de } \Omega)$$

complété par la convention de valeur 1 pour x, y, y_0 confondus.

(32) C'est-à-dire que le complémentaire est de mesure nulle.

© Spartacus-Idh 2019

C'est, pour chaque Ω, une fonction continue de x.

Définition. *L'espace de Martin est l'espace $\hat{\Omega}$ obtenu par la compactification du théorème précédent à partir de cette famille de fonctions de x. La frontière $\hat{\Omega} - \Omega$ est notée Δ (frontière de Martin) et la topologie, T. Le prolongement par continuité s'écrit $K(X, y)$, pour $X \in \Delta$, ou K_X.*

Il est essentiel de remarquer que, pour deux positions y_0', y_0'' de y_0, les espaces correspondants $\hat{\Omega}', \hat{\Omega}''$ sont homéomorphes dans une correspondance qui se réduit à l'identité sur la partie commune Ω. Car

$$\frac{G(x,y)}{G(x,y_0'')} = \frac{G(x,y)}{G(x,y_0')} \Big/ \frac{G(x,y_0'')}{G(x,y_0')}$$

a une limite à la frontière de Ω dans $\hat{\Omega}'$ et la même égalité en permutant y_0', y_0'' montre que ces fonctions-limite séparent cette frontière. D'où l'homéomorphisme cherché.

Remarque.

1. $K(X, y)$ est harmonique en y et continue en (X, y) dans $\Delta \times \Omega$ (à cause de l'égale continuité de ces fonctions de y en un point de Ω).

2. y_0 étant fixé, en opérant à partir des fonctions $K(x, y_i)$ pour un ensemble dénombrable partout dense de y_i, on obtient encore le même espace (car la convergence aux y_i entraîne la convergence dans Ω pour $K(x, y)$ lorsque x tend vers un point de la nouvelle frontière).

On en déduit que la structure uniforme de $\hat{\Omega}$ admet une base dénombrable d'entourages donc que $\hat{\Omega}$ est métrisable.

3. Si μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ dans Δ, $\int K(X, y)\, \mathrm{d}\mu(X)$ est harmonique $\geqslant 0$ dans Ω.

Réciproquement :

Lemme. *Toute fonction harmonique $u \geqslant 0$ dans Ω peut se représenter selon*

$$u(y) = \int K(X, y)\, \mathrm{d}\mu(X)$$

où μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur Δ.

Soit Ω_n une suite croissante d'ouverts recouvrant Ω, telle que $\overline{\Omega} \subset \Omega$. La fonction $\hat{R}_u^{\Omega_n}$ est un G-potentiel car elle minore le potentiel λG_{y_0} où λ est choisi pour que $\lambda G_{y_0} \geqslant u$ sur Ω_n^*, donc dans Ω_n. On obtient donc

$$\begin{aligned} \hat{R}_u^{\Omega_n}(y) &= \int G(x,y)\, \mathrm{d}\mu_n \\ &= \int K(x,y)\, \mathrm{d}\nu_n(x) \end{aligned}$$

en introduisant la mesure $\mathrm{d}\nu_n(x) = G(x, y_0)\, \mathrm{d}\mu_n(x)$ (portée par Ω_n^* comme $\mathrm{d}\mu_n$) qui a maintenant l'avantage que son total $\int \mathrm{d}\nu_n$ vaille $u(y_0)$. Par extraction de suite on obtient $\mathrm{d}\nu_{n_p}$ convergeant vaguement sur le compact $\hat{\Omega}$ vers

https://spartacus-idh.com

une mesure μ d'ailleurs nécessairement portée par Δ. La continuité de $K(x,y)$ en $x \in \hat{\Omega}$ entraîne alors

$$u(y) = \int K(X,y)\,\mathrm{d}\mu(X).$$

§ 6. — Les fonctions harmonique minimales.

La représentation précédente n'est en fait pas toujours unique. Martin obtint la représentation canonique que nous allons retrouver par voie barycentrique grâce à l'introduction des fonctions harmoniques positives minimales. Il appelle ainsi toute fonction harmonique $u \geqslant 0$ telle que toute autre $v \leqslant u$ soit proportionnelle à u.

Théorème. *Toute fonction harmonique minimale* $\neq 0$ *est proportionnelle à un* $K(X,y)$. *Les points* X *correspondants sont dits minimaux et leur ensemble noté* $\Delta_1 \subset \Delta$.

Soit u minimale représentable par $\int K(X,y)\,\mathrm{d}\mu(X)$. Il existe $X_0 \in \Delta$ tel que tout voisinage $\mathcal{V}$ dans $\hat{\Omega}$ soit de μ-mesure $\neq 0$. Donc

$$\int_{\mathcal{V}} K(X,y)\,\mathrm{d}\mu(X) = \lambda u(y) \neq 0 \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{1}{u(y_0)} \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mu$$

puis

$$\frac{1}{\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mu} \int_{\mathcal{V}} \frac{K(X,y)}{K(X_0,y)}\,\mathrm{d}\mu(X) = \frac{u(y)}{K(X_0,y)u(y_0)}.$$

Fixons y et ε ; pour $\mathcal{V}$ assez petit, le 1er membre est dans $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. D'où

$$\frac{u(y)}{K(X_0,y)u(y_0)} = 1.$$

§ 7. — Représentation intégrale canonique.

Soit E l'espace vectoriel réel des différences de deux fonctions harmoniques $\geqslant 0$, pourvu de l'ordre naturel qui donne comme cône « positif », le cône convexe U des fonctions harmoniques $\geqslant 0$. U est réticulé pour cet ordre (voir chap. II, § 8).

Mettons sur E la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω ; on sait qu'elle est métrisable. Alors $u \to u(y_0)$ est une forme linéaire continue et $u(y_0) = 1$ définit donc un hyperplan fermé qui coupe U selon une base B métrisable ; elle est compacte (appendice, VII).

Les points extrémaux de B sont justement les fonctions harmoniques > 0 minimales de valeur 1 en y_0. L'application $X \to K_X$ du compact Δ dans B est injective et continue donc bicontinue et cette correspondance de Δ_1 avec l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de B est bijective et bicontinue. Δ_1 est un G_δ dans Δ ou $\hat{\Omega}$.

© Spartacus-Idh 2019

D'après le théorème de Choquet, u est le barycentre $\int h\,\mathrm{d}\mu(h)$ d'une mesure unitaire *unique* μ sur B portée par $\mathcal{E}$; et cela équivaut à

$$u(y) = \int h(y)\,\mathrm{d}\mu(h), \qquad h \in B.$$

Car cette représentation en est conséquence puisque $h(y)$ est forme linéaire continue de h ; d'autre part elle entraîne $u = \int \mathrm{d}\mu(h)$, sinon ces deux fonctions différeraient en un point y où elles valent $u(y)$ et $\int h(y)\,\mathrm{d}\mu(h)$.

L'homéomorphisme de Δ et de son image I par $X \to K_X$ transforme μ qui est aussi une mesure de Radon sur I en une mesure ν sur Δ portée par Δ_1 et la formule s'écrit de façon équivalente

$$u(y) = \int K_X(y)\,\mathrm{d}\nu(X).$$

C'est la représentation canonique de Martin qui, par un facteur de proportionnalité s'étend à toute u harmonique $\geqslant 0$, avec unicité de $\nu \geqslant 0$ portée par Δ_1.

Dans le cas de la boule Ω de centre 0, rayon R (dans $\mathbb{R}^n$), des calculs élémentaires montrent que $K(x,y)$ pour $y_0 = 0$ tend vers $R^{n-2}\frac{R^2-|y|^2}{|X-y|^n}$ (noyau de Poisson) lorsque x tend vers $X \in \Omega^*$. Ce prolongement continu sépare Ω^* et $\hat{\Omega}$ est homéomorphe à l'adhérence euclidienne de Ω. Δ est la sphère et tous ses points sont minimaux (sinon, par rotation, aucun ne le serait). On retrouve ainsi la représentation intégrale de « Poisson-Stieltjes ».

Cette identité de Δ avec la frontière euclidienne subsiste pour des domaines généraux assez réguliers. En général, les structures uniformes sur Ω de $\overline{\Omega}$ (euclidien) et $\hat{\Omega}$ (de Martin) ne sont pas comparables. La frontière de Martin qui pour un domaine plan simplement connexe (à frontière contenant plus d'un point et nécessairement non polaire) coïncide avec celle des « bouts premiers » de Caratheodory (d'après l'application conforme sur le disque, qui conserve le noyau K) apparaît comme une généralisation naturelle de cette dernière.

§ 8. — Indications sur le rôle de la frontière de Martin et l'effilement à la frontière.

Cette frontière se prête à un problème de Dirichlet et sert même de frontière de référence puisque chaque fois que pour une frontière compacte un tel problème est possible, il se ramène à un problème correspondant avec la frontière de Martin (bibl. Brelot-Naïm).

Cependant la topologie de $\hat{\Omega}$ ne suffit pas pour étudier l'allure à cette frontière des fonctions harmoniques ou surharmoniques. Il faut pour cela la notion d'effilement d'un ensemble e de Ω en un point minimal X, qui (L. Naïm) se traduit par $R^e_{K_X} \neq K_X$ [33]. Les complémentaires dans Ω des ensembles effilés en X forment un filtre $\mathcal{F}_X$ et ce sont les limites selon ce filtre, plus fin que celui des traces sur Ω des voisinages de X dans Ω, qui vont permettre des résultats généraux. Il existe d'ailleurs des topologies

(33) Introduite d'abord autrement dans le demi-plan par M^me^ Lelong (v. bibl.).

https://spartacus-idh.com

sur $\Omega \cup \Delta_1$, pour lesquelles les traces des voisinages de X sur Ω sont les ensembles de $\mathcal{F}_X$. On peut même montrer qu'il en existe une et une seule qui coïncide sur Ω avec la « topologie fine » de Ω et satisfait à cette condition ; elle donne sur Δ_1 la topologie discrète et laisse Ω ouvert ; on peut l'appeler topologie fine sur $\Omega \cup \Delta_1$, et les limites selon $\mathcal{F}_X$ deviennent des « limites fines » (voir Brelot, *Ann. I. F.* 17/2). La théorie développée (Naïm-Doob) en analogie avec l'effilement classique conduit à des résultats définitifs ; ainsi u/h (u surharmonique $\geqslant 0$, h harmonique > 0) admet une limite fine finie aux points de Δ_1 sauf sur un ensemble de mesure nulle pour la mesure canonique de h (extension faite par Doob d'un théorème de Fatou dans la boule). De même (Doob) si u est une fonction BLD, avec $h = 1$ (voir l'extension pour $h > 0$ quelconque et u h-BLD, par M^me^ Lumer-Naïm citée chap. X). Cette topologie fine « à la frontière » permet de retrouver et de perfectionner les résultats les plus classiques sur les fonctions harmoniques ou méromorphes (limites angulaires, radiales, etc. …). (Brelot-Doob, Constantinescu-Cornea).

Les deux types d'effilement apparaissent comme des outils essentiels qui doivent être comparés (Brelot, résumé dans le Colloque du potentiel).

§ 9. — Autres rôle des éléments extrémaux — Indications.

L'ensemble des fonctions surharmoniques $v \geqslant 0$ définit un « cône positif » (correspondant à l'ordre dit spécifique) dans l'espace vectoriel réel des « différences » de telles fonctions, espace qui sera pourvu d'une topologie convenable. Alors la base B définie par une normalisation des v (en imposant une moyenne locale particulière égale à 1) est compacte métrisable. Les éléments extrémaux de B sont, à un facteur près, les fonctions harmoniques minimales et les fonctions de Green ; l'ensemble E de ces derniers éléments est homéomorphe à Ω. La théorie de Choquet fournit une représentation intégrale contenant celles de Martin et Riesz (voir références dans l'axiomatique de Brelot, cours de Montréal). Il est plus difficile de traiter aussi de façon autonome le balayage et le problème de Dirichlet, comme l'a tenté Matsushita, même axiomatiquement ; on lui doit en particulier d'avoir interprété les points irréguliers ou instables au moyen d'éléments extrémaux correspondants convenables, ce qui peut se faire aussi à l'aide de l'idée voisine de la « frontière de Choquet » (voir en particulier Bauer).

Il y a là un nouveau moyen systématique et puissant d'exposition et de recherche en théorie du potentiel.

Bibliographie sommaire

H. Bauer Silovscher Rand und Dirichletsches Problem, *Annales Instit. Fourier* 11, 1961.

H. Bauer Konvexität in topologischen Vektorraumen, *Cours* 1963-64 à l'Université de Hambourg.

M. Brelot Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, *Ann. Univ. Grenoble* 23, 1968.

M. Brelot Le problème de Dirichlet, axiomatique et frontière de Martin, *J. de math.* 35, 1956.

© Spartacus-Idh 2019

M. Brelot On Martin boundary, *Cours d'Hiroshima* 1962, publié en russe dans *Matematika*, 1965.

M. Brelot Étude comparée des deux types d'effilement, *Colloque théorie du potentiel* et *Ann. I. F.* 15.

M. Brelot Aspect statistique et comparé des deux types d'effilement, *Anais. da Ac. Bras. de ciencias* 37 n° 1, 1965.

M. Brelot Recherches sur la topologie fine et ses applications, *Ann. I. F.* 17/2, 1967.

M. Brelot et J. L. Doob Limites angulaires et limites fines, *Ann. I. F.* 13, 1963.

G. Choquet Représentation intégrale au moyen des éléments extrémaux, *C.R.* t. 243 (1956) p. 555, 699, 736, *Séminaire Bourbaki* (1956). *Conf. du Congrès de Stockholm* 1962.

G. Choquet et P.-A. Meyer Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. I. F. 13*, 1963.

C. Constantinescu et A. Cornea Über das Verhalten der analytischen Abbildungen Riemannscher Flächen auf den idealen Rand von Martin, *Nagoya math. J.* 17, 1960. Ideale Ränder Riemannscher Flächen, *Ergeb 32*, Springer, 1963.

J. Deny Le principe des singularités positives de Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine, *Revue scient.* avril 1947, fasc. 14.

J. L. Doob Conditional brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France* 85, 1957.

J. L. Doob A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem, *Annales Inst. F.* , 9, 1959.

J. L. Doob Conformally invariant cluster value theory, *J. of math.* 5, 1961.

J. L. Doob Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, *Ann. I. F.* 12, 1962.

J. L. Doob Some classical function theory theorems and their modern versions, *Colloque potentiel* 1964 et *Ann. I. F.* 15.

J. L. Doob Remarks on the boundary limits of harmonic functions, *J. SIAM. Num. Anal.* 3 n° 2, 1966.

J. Lelong Étude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, *Annales ENS* 66, 1949.

L. Naïm Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel (thèse Paris 1957), *Annales I. F.* 7, 1957.

Matsushita Voir *Proc. Jap. Acad.* 1955 et 56. Notes reprises et rectifiées dans le *Journal of the Institute of Polytechnics*, Osaka City Un. 9.

R. Phelps Lectures on Choquet's theory, *Van Nostrand Math. studies* n° 7, *Van Nostrand Comp.* Princeton, 1965.

https://spartacus-idh.com

Indications et bibliographie complémentaires sur la théorie moderne du potentiel

Nous n'avons, pour simplifier, considéré qu'un domaine borné ou $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Mais on peut, non seulement introduire sur la frontière ou dans le domaine le point à l'infini, mais grâce à des exposés n'utilisant que le domaine et non la frontière faire des extensions à des variétés plus générales comme les « espaces $\mathcal{E}$ » ou les espaces de Green. Un espace $\mathcal{E}$ est un espace topologique séparé connexe dont chaque point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\overline{\mathbb{R}}^n$, compactifié d'Alexandroff) et dont la structure est définie par un atlas (dans $\mathbb{R}^n$ ou $\overline{\mathbb{R}}^n$) pour lequel les changements de carte sont des isométries (ou encore, si $n = 2$, des transformations conformes) ; ceci contient le cas des surfaces de Riemann. Lorsqu'il y a une « fonction de Green » (cas où il existe une fonction surharmonique > 0 non constante, ce qui a lieu dans $\mathbb{R}^n$ si $n \geqslant 3$), on dit que c'est un espace de Green.

On introduit alors diverses « conditions aux limites », par exemple avec les « lignes de Green » (tangentes à grad G_{x_0}) ou grâce à des frontières obtenues par quelque compactification (p. ex. de Constantinescu-Cornea, voir chap. XII), comme celle de Martin (chap. XII), celle de Kuramochi (adaptée aux fonctions BLD et permettant d'après Maeda la convergence des lignes de Green, ce qu'a généralisé Ohtsuka) ou encore de Royden…

Mais il y a bien d'autres directions de recherche et des développements considérables dont nous n'avons pas ou presque pas parlé dans cet ouvrage :

- Rappelons les travaux déjà cités de Deny où des distributions remplacent les noyaux et mesures ordinaires et les recherches de Deny-Beurling sur les *espaces de Dirichlet* (chap. X, XI) (voir aussi l'ouvrage de Landkoff).
- Travaux anciens de Cartan-Deny puis plus récents de Deny-Choquet avec des convolutions de mesures en espace euclidien ou de groupe.
- Potentiel sur les surfaces de Riemann et leur classification (travaux souvent généralisables aux espaces $\mathcal{E}$ ou greeniens) (Parreau, Royden, Bader, Pfluger, etc… ; nombreux articles japonais, surtout de Kuramochi ; ouvrages récents de Tsuji et de Constantinescu-Cornea) et utilisation systématique de la topologie fine interne ou à la frontière, déjà signalée (chap. XII).
- Axiomatiques avec des noyaux-fonctions en espace euclidien ou localement compact ou de groupe, déjà en partie mentionnés. Relations entre les principes ou recherche de noyaux y satisfaisant ; nombreux travaux de Choquet, Deny (qui ont approfondi en particulier le cas de l'espace discret) et d'auteurs surtout japonais (Ugaheri, Kunugi, Kametani, Ninomya, Ohtsuka, Kishi, Mori, Durier, etc.). Le rôle des potentiels continus a été développé en particulier par Anger. Recherches de Fuglede sur les noyaux non symétriques, en relation avec la théorie des jeux.
- Liaison avec les probabilités, aperçue par Kakutani, puis très développée par Doob qui introduisit une axiomatique en espace topologique pour les fonctions harmoniques et surharmoniques, en liaison directe avec les processus de Markov (et pouvant s'appliquer à des équations aux

© Spartacus-Idh 2019

dérivées partielles linéaires du 2e ordre elliptiques ou paraboliques). Étude aussi d'une théorie discrète.

- Travaux fondamentaux de Hunt qui font, en liaison avec les probabilités, une synthèse très générale en étudiant le potentiel comme transformation d'une fonction ou mesure en fonction ou mesure. Compléments de Lion, Faraut.

  L'intérêt considérable de cette liaison a suscité de nombreux travaux probabilistes, de Dynkin, Chur, Girsanov, Ito, Hansen, Watanabe, Kac, Feller, Kemeny, Snell, Williamson, Getoor, Blumenthal, Elliott, Bauer, P. A. Meyer, Neveu, Courrège, Priouret... On insistera sur le grand traité de Dynkin sur les processus de Markov (en anglais, 1965), les trois ouvrages de P. A. Meyer (Probab. et potentiel, processus de Markov), le traité de Getoor et Blumenthal.

- Axiomatique pure des fonctions harmoniques et surharmoniques en espace localement compact (où les potentiels s'introduisent sans noyau comme fonctions surharmoniques de plus grande minorante harmonique nulle). Inspiré par Tautz et Doob, développement systématique conservant les faits essentiels de la théorie classique (et s'appliquant aux équations elliptiques lin. du 2e ordre), par Brelot (Cours du Tata Institute et séminaire pot. 2, 1959 et compléments) puis Mme Hervé, Gowrisankaran , Boboc-Constantinescu-Cornea, Mokobodzki, Loeb, B. Walsh, D. Sibony, de La Pradelle, Mme Lumer-Naïm, Smyrnelis, Taylor... Liaison importante par P. A. Meyer avec la théorie de Hunt et application par Mme Hervé aux équations elliptiques à coefficients discontinus. Voir un aperçu dans un cours d'été, 1965, de Brelot à Montréal.

  Afin d'inclure aussi des équations paraboliques, l'axiomatique a été reprise, élargie à la base — mais poussée moins loin [34] — par H. Bauer et ses élèves (Guber, Hansen, Hinrichsen, Köhn, Sieveking, Bliedtner) avec divers prolongements ; voir les *Lectures notes* 22 et 69), puis Boboc, Constantinescu et Cornea. Liaisons avec les probabilités comme dans le cas classique, mais plus ou moins approfondies. Comparaison des axiomatiques (déjà dans Brelot *Sémin. pot.* 6) et aussi dans l'aperçu général de Constantinescu (*Revue roumaine* 11, 1966).

  Usage de la frontière de Silov ou Choquet (Bauer ; Alfsen ; Saint-Loup, Rogalski, Gamelin-Rossi, Effros-Kazdan...). Recherche approfondie des faisceaux pour les $\mathcal{C}^2$-fonctions dans $\mathbb{R}^n$ (Bony) et applications d'axiomatiques globales ; recherche d'interprétation potentielle d'un cône convexe de fonctions continues (Mokobodzki et Sibony).

- Autres domaines importants : étude ou usage de potentiels spéciaux en partie besséliens (Aronszajn et son école, Carleson), relations avec l'analyse harmonique (Beurling, Herz...), lien avec la théorie des jeux (Fuglede), transposition de l'intégrale de Poisson pour des groupes de Lie semi-simples (Fürstenberg), allure à la frontière (type classique) des fonctions harmoniques ou analytiques (Calderon, Stein, Carleson,

(34) La représentation intégrale, difficile faute de base du cône des surharmoniques positives, a été traitée par Mokobodzki grâce à la théorie complète de Choquet résumée au Congrès de Stockholm.

https://spartacus-idh.com

Solomentsev…), cluster sets (voir Noshiro), travaux connexes sur les équations aux dérivées partielles (Morrey, Stampacchia, M. et M^me^ Hervé, Boboc-Mustata, etc… ; voir les cours d'été de Montréal 1965). Recherches axiomatiques sur les « petits » ensembles généralisant les ensembles polaires et la topologie fine (Doob).

On ne saurait épuiser une telle liste mais on trouvera des résultats dans les C.R. récents, beaucoup de développements et références dans la collection des Séminaires de théorie du potentiel ou des probabilités (Paris, Strasbourg, Erlangen), du Séminaire d'initiation à l'Analyse de Choquet (Paris), dans un Colloque de Hakone (Japon, 1962), dans le volume du Colloque de théorie du potentiel (CNRS, Paris-Orsay, Juin 64, inséré dans les *Annales de l'Institut Fourier* t.15) et dans les volumes du Symposium de Kyoto (1965) sur la frontière de Kuramochi (*Lecture notes* n° 58, Springer) et du Symposium de Loutraki (1966) (*Lecture notes* n° 31). Ajoutons à l'avance le cours d'été 1969 du CIME).

Bibliographie complémentaire sommaire

G. Anger	Thèse Dresde, 1957, Habilitationschrift (Rostock 1966).
G. Anger	*Séminaire du Potentiel*, t. 2 (1958), rectif. t. 4.
M. Aronszajn	*Conf. du Colloque* 1964.
M. Aronszajn et Smith	*Annales Institut Fourier*, 11.
M. Aronszajn, Mulla et Szeptycki	*Annales I. F.* 13.
M. Aronszajn, Adams et Smith	*Ann. I. F.* 17/2.
H. Bauer	*Arch. der Math.* 12, 1961 ; *Math. Annalen* 1, 1962.
H. Bauer	Warscheinlichkeitstheorie 1, 1963 ; *Conf. du Colloque* ; et voir Chap. XII.
H. Bauer	Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, *Lecture Notes* 22, 1966.
H. Bauer	Cours prévu au *CIME* (1969).
H. Bear et A. Gleason	*J. Math. Mech* 16, 1967, p. 639 (représentation intégrale globale avec noyau, de fonctions d'un type harm. axiomatique ayant des représ. locales).
R. Blumenthal et R. Getoor	Markov processes and potential theory, New York, *Acad. Press*, 1967.
N. Boboc, C. Constantinescu et A. Cornea	*Nagoya Math. J.* vol. 23 ; *Colloque du potentiel* ; *Annales Inst. Fourier*, t. 15, fasc. 2.
Boboc et Cornea	*Revue roumaine math.*, 12, 1967.

© Spartacus-Idh 2019

Boboc et Mustata	Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du 2e ordre de type elliptique, *Lecture Notes* 68, 1968.
J. M. Bony	*Ann. I. F.* 17/1, 1967. Cours prévu *CIME*, 1969.
Bony, Courrège et Priouret	*Ann. I. F.* 18/2, 1969.
M. Brelot	*Sém. du potentiel* 1 (1957), 2 (1958), 6 (1961-62) ;
M. Brelot	Lectures on potential theory, Bombay 1960 (2e édition 67) ;
M. Brelot	conf. du Colloque développée dans les Anaïs Ac. du Brésil 27, 1965, et Annales Inst. Fourier 17/2, 1967.
M. Brelot	Axiomatique des fonctions harmoniques (cours d'été 65, Montréal) ; Nagoya Math. J. 30, 1967.
M. Brelot	Voir aussi bibl. chap. XII.
M. Brelot et G. Choquet	*Annales Inst. Fourier*, 3, 1951.
A.P. Calderon	*Trans. Am. Math. Soc.* 68, 1950.
Carleson	*Archiv. f. Math.* 4, 1961, *Conf. du Colloque.*
H. Cartan et J. Deny	*Acta Szeged*, 1950.
G. Choquet	*C. R.* 243 (1950), 244, p.1606 et 1710 ; *sem. pot.* 1 et 3.
G. Choquet et J. Deny	*C. R.* 242 et 243 – *Journal d'Anal. Math.*, 1957.
C. Constantinescu	*Revue roumaine des sc.* t. X no 3, 6, 9, t. XI, t. XIII ;
C. Constantinescu	*C. R. Ac. Sc.* 262, p. 1309.
C. Constantinescu et Cornea	*Nagoya J.* t. 25 ; *Annales Inst. Fourier*, 13, et 15 et ouvrage cité chap. XII.
Courrège	*Cours 3e cycle*, Inst. H. Poincaré 1963-64 – *Sém. Pot.* 6 et suivants.
P. Courrège et P. Priouret	*Sém. potentiel* 8.
J. Deny	Articles dans tous les volumes du *Sémin. du potentiel* 1-9 ;
J. Deny	*Annales Inst. Fourier* 12 ; *Conf. du Colloque*.
J. L. Doob	*Proceed. third Symp. on prob.* 1954-55.
J. L. Doob	*Trans. AMS*, 77-78-80 ; III. J. 2, 1958 ;
J. L. Doob	*Journal of Math. and Mech.* 8, 1959 ;
J. L. Doob	*Bull. Amer. math. Soc.* 72 (1966) et articles cités chap. XII.
R. Durier	*Sém. pot.* 10 et 12, thèse (Paris-Orsay 1969).
E. B. Dynkin	*Les processus de Markov* en 2 vol. , trad. anglaise, 1965.
J. Faraut	*Sém. pot.* 10, thèse, Paris-Orsay 1969.

https://spartacus-idh.com

B. Fuglede	Voir chap. V, X et *conf. du Colloque.*
H. Fürstenberg	*Annals of Math.* 77, 1963 ; Exposé par Delzant, *Sém. pot.* 7.
K. N. Gowrisankaran	*Annales Inst. Fourier*, 13, 1963 ; 16/2 (1966) ; *Math. Zeits.* 94 (1966) ; *Nagoya J.* 28 (1966).
Mme R. M. Hervé	Thèse Paris, 1961, et *Annales Inst. Fourier*, 12 (thèse), 14, 15, 16.
M. et Mme Hervé	*Ann. I. F.* 19 (à l'impression).
C. Herz	*Trans. A. M. S.* 94, 1960 ; *Annales Inst. Fourier*, 13.
D. Hinrichsen	*Ann. I. F.* 17/1 ; sem. pot. 11 (avec le rôle des espaces nucléaires déjà vu par Loeb - B. Walsh).
G. A. Hunt	*Proc. Nat. Ac.* 42, III, 1956. *Journal of Math.* 1, 2, 4, 1957-60.
G. A. Hunt	Martingales et processus de Markov, monog. *Soc. Math. France* n° 1, 1966 ; Conférence du Colloque.
K. Ito et T. Watanabe	V. *Conf. du Colloque.*
M. Kac	Potential theory in 3 dim. *Mimeogr. Notes*, Rockefeller Univ. New-York.
M. Kishi	Nombreux articles de périodiques japonais, voir *Nagoya Math. S.* 23, 1963, et *Journal of Fac. of Sc.* Hiroshima 28, 1964. *Sém. potentiel de Paris*, 11.
Z. Kuramochi	Nombreux articles des périodiques japonais, et surtout *J. Fac. Sc. Hokkaido Univ.* 16, 17, 19.
A. de La Pradelle	*Ann. I. F.* 17/1 19/1.
G. Lion	*Sém. pot.* 5 ; *Ann. I. F.* 16/2, 1966.
P. Loeb	*Ann. I. F.* 16/2 et B. Walsh 15/2, 18/1 et *Bull. A. M. S.* 72, 1966.
Littman, Stampacchia et Weinberger	*Ann. Scuola N. S. Pisa* 17, 1963.
Mme Lumer-Naïm	*Ann. I. F.* 17/2
F. Maeda	*J. of Sc. of the Hiroshima Univ.* 32, 1968.
P.-A. Meyer	*Annales Inst. Fourier*, 12, 13, *Sém. du pot.* 5, 7 ; *Conf. du Colloque*.
P.-A. Meyer	Probabilités et potentiels, *Act. Sc. et ind.* 1318 Paris 1966, ou en anglais, *Blaisdell Publ. Co*, Boston).
P.-A. Meyer	Processus de Markov, *Lectures Notes* 26 et 77, 1967.
G. Mokobodzki	*Conf. du Colloque*, 1964.
G. Mokobodzki	*Séminaires Choquet et du Potentiel* (depuis 1962).
G. Mokobodzki	Cours prévu du CIME (1969).
G. Mokobodzki et Sibony	*C. R. Ac. Sc.* 263-264 ; *Ann. I. F.* 17/1 et 18/2 ; *Sém. pot.* 11.

© Spartacus-Idh 2019

J. Neveu *Conf. du Colloque*.

N. Ninomya Nombreux articles de périodiques japonais, en part. *J. of the Institute of Polyt.* Osaka City Univ. 8, 1957, 12, 13, 1962 ; *Sém. du pot.* 3, 1958-59.

K. Noshiro Cluster sets, *Ergeb.* n° 28, Springer, 1960.

M. Ohtsuka *Nagoya Math. J.* 3, 5 ; *Proceed Ac.* 33 ; *J. Sc. Hiroshima Univ.* 28, 1964.

M. Parreau *Ann. Inst. Fourier*, 3, 1951-52, avec longue bibliog. ;

D. Sibony Thèse Paris, 1967 (réunion d'articles en grande partie en collab. avec **Mokobodzki**) ; voir *Sém. pot.* et *Ann. I. F.* 18/2.

G. Stampacchia *Conf. du Colloque* - Cours d'été à Montréal 65.

E. H. Stein *Acta Math.*, 103, 106.

G. L. Tautz *Math. Nach.* 2, 1949, *Archiv. der math.* 3.

M. Tsuji *Potential theory in modern function theory*, Tokyo, 1959.

B. Walsh *Inventiones math.* (à paraître, sur le flux et la cohomologie en axiomatique).

J. B. Walsh *Ann. I. F.* 18/2.

https://spartacus-idh.com

RAPPEL DES NOTIONS FONDAMENTALES ÉLÉMENTAIRES SUR LES FONCTIONS HARMONIQUES

Nous allons faire d'abord la théorie dans le plan, mais d'une manière qui permettra facilement ensuite l'extension aux espaces supérieurs $\mathbb{R}^\tau$ sauf sur quelques points où elle n'a pas lieu et qui seront étudiés.

I — Premières propriétés fondamentales

§ 1. — Définition.

Considérons dans un ouvert Ω du plan une fonction finie continue $u(M)$ réelle ou complexe et tous les disques fermés $\overline{D}^r_{M_0}$ (de centre M_0, de rayon r). On notera $\mathcal{A}^r_u(M_0)$, $\mathcal{M}^r_u(M_0)$ les moyennes de u, dans le disque $D^r_{M_0}$, ou sur sa circonférence.

$$\mathcal{M}^r_u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{r,\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathcal{A}^r_u(M_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} u_{\rho,\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{r^2}\int_0^r \mathcal{M}^\rho_u(M_0)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

Les conditions

$$\mathcal{A}^r_u(M_0) = u(M_0) \tag{1}$$

$$\mathcal{M}^r_u(M_0) = u(M_0) \tag{2}$$

sont équivalentes pour M_0 fixé et $r < R$ (r variable $< R$, $\overline{D}^R_{M_0} \subset \Omega$) donc elles sont équivalentes pour l'ensemble des disques contenus dans Ω.
La 2e entraîne

$$\mathcal{A}^r_u(M_0) = \frac{2}{r^2}\int_0^r u(M_0)\rho\,\mathrm{d}\rho = u(M_0).$$

La 1re entraîne

$$r^2 u(M_0) = 2\int_0^r \mathcal{M}^\rho_u(M_0)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$2ru(M_0) = 2\mathcal{M}^r_u(M_0)r$$

$$u(M_0) = \mathcal{M}^r_u(M_0).$$

Les passages de $u(M_0)$ aux moyennes donnent pour r fini de nouvelles fonctions de M_0 (à distance $> r$ de la frontière) ; ces passages s'appellent des médiations spatiales ou périphériques.

© Spartacus-Idh 2019

La propriété d'équivalence se traduit en disant que les invariances (quel que soit r) par l'une ou l'autre des médiations sont équivalentes.

Définition. *La fonction u sera dite harmonique dans Ω si elle est invariante par l'une ou l'autre des médiations.*

Il est alors évident que les parties réelles et imaginaires sont harmoniques et réciproquement. Quand on parle d'une fonction harmonique, on sous-entend ordinairement qu'elle est réelle.

Remarque. Si une fonction u admet des dérivées premières continues, la condition d'harmonicité équivaut à $\int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s = 0$ pour la circonférence et tout disque fermé dans Ω, puisque cela s'écrit

$$\int \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int u_{r,\theta}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{indépendant de } r.$$

§ 2. — Premières propriétés.

a. Conservation de l'harmonicité par combinaison linéaire, par transformation par similitude, par convergence uniforme locale.

b. *Théorème de Picard*. « Toute fonction harmonique, réelle, bornée dans un sens dans tout le plan est constante ».

On se ramène au cas $u \geqslant 0$. Prenons un disque de centre M_0 et de rayon r_0, et un disque contenant le précédent, de centre M_1 et de rayon r_1. La comparaison des intégrales en aires dans ces disques donne

$$\pi r_0^2 \mathcal{A}_u^{r_0}(M_0) \leqslant \pi r_1^2 \mathcal{A}_u^{r_1}(M_1)$$
$$r_0^2 u(M_0) \leqslant r_1^2 u(M_1).$$

On peut faire varier r_0 et r_1 dans des suites de façon à ce que le rapport tende vers 1. D'où

$$u(M_0) \leqslant u(M_1)$$

et on obtiendrait l'inégalité contraire en permutant le rôle des deux disques.

c. Pour une fonction harmonique réelle u, impossibilité d'un maximum ou d'un minimum sans constance au voisinage.

Pour une fonction harmonique complexe, on a aussi

$$|u(M)| \leqslant \mathcal{M}_{|u|}^{r}(M)$$

d'où encore impossibilité d'un maximum sans constance au voisinage, pour le module. Ceci nous amène à un principe très important.

§ 3. — Le principe du maximum.

Forme abstraite. Soit dans un espace topologique connexe E une fonction réelle semi-continue supérieurement f, avec la propriété d'impossibilité d'un maximum en un point sans constance au voisinage. Alors :

Si f atteint sa borne supérieure, f = constante, car les ensembles où $f = \sup f$, $f < \sup f$, sont ouverts, donc le second est vide.

https://spartacus-idh.com

Exercice. Si de plus E est non compact

$$\sup f = \inf_K \big(\sup_{M \in \complement K} f(M) \big), \quad K \text{ compact variable dans } E.$$

Application. Soit Ω un ouvert d'un espace E localement connexe et localement compact, par ex. $\mathbb{R}^\tau$. Soit f une fonction réelle semi-continue supérieurement, avec impossibilité d'un maximum sans constance au voisinage. Adjoignons un point à l'infini à E, d'où l'espace $\overline{E}$ compact.

a. Si f atteint sa borne supérieure en un point, $f =$ constante dans la composante connexe de ce point ;

b. si λ est la borne supérieure des limites supérieures à la frontière de Ω, alors $f \leqslant \lambda$;

c. si $K \subset \Omega$ est un compact, alors

$$\sup_K f = \sup_{K^*} f \qquad (K^* \text{ frontière de K}).$$

a. est une conséquence du principe initial. Quant à ***b***., on prolongera f sur Ω^* en l'y prenant en chaque point égale à sa limite supérieure en ce point dans Ω. La fonction devient semi-continue supérieurement sur le compact $\overline{\Omega}$. Si l'on n'avait pas $f \leqslant \lambda$ dans Ω, la borne supérieure de f prolongée dans Ω serait $\alpha > \lambda$ et atteinte en un point de Ω ; ce serait aussi la borne supérieure dans Ω et f serait constante dans un domaine composant, à la frontière duquel la limite supérieure de f dans Ω serait partout $\geqslant \alpha > \lambda$.

Enfin, ***c***. résulte de ce que dans $\mathring{K}$, f est majorée par la borne supérieure des limites supérieures à la frontière, donc par la borne supérieure de f sur K^*.

Remarque. Soit un espace vectoriel Φ de fonctions finies continues réelles dans Ω pour lesquelles il y a impossibilité d'extremum sans constance au voisinage ; si $f_n \in \Phi$ a une limite $\varphi_n(P)$ finie en tout point-frontière, la convergence uniforme de φ_n sur Ω^* entraîne celle de f_n dans Ω.

Le principe du maximum s'applique donc à une fonction harmonique réelle u et $-u$, ainsi qu'à u^+ et, pour une fonction complexe, à $|u|$.

Problème de Dirichlet. Une fonction harmonique dans un ouvert Ω, qui s'annule à la frontière, c'est-à-dire qui tend vers zéro en tout point frontière (frontière prise dans l'espace pourvu d'un point à l'infini) est donc nulle.

Donc deux fonctions harmoniques « prenant les mêmes valeurs finies à la frontière » (c'est-à-dire y admettant en chaque point des limites finies égales) sont égales, puisque la différence s'annule à la frontière.

On se demande s'il existe une fonction harmonique prenant à la frontière des valeurs données. C'est le « problème de Dirichlet ».

Il n'y a qu'une solution si les données sont finies. Mais il n'y en a pas toujours une, même si la donnée sur la frontière est continue.

Ce problème très important en mathématiques et en physique a été beaucoup étudié. Nous le résoudrons plus loin pour le cercle avec donnée finie continue.

© Spartacus-Idh 2019

§ 4. — Dérivation des fonctions harmoniques.

Soit $\varphi(r)$ une fonction réelle finie de $r \geqslant 0$ nulle pour $r \geqslant r_0 > 0$, telle que $\varphi(OM)$ possède des dérivées continues de tous ordres en x, y (coordonnées de M), c'est-à-dire soit « indéfiniment dérivable » ou de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Telle est la fonction valant $\exp\left(\frac{1}{r^2-r_0^2}\right)$ pour $0 \leqslant r < r_0$ et 0 pour $r \geqslant r_0$.

Avec un coefficient multiplicatif on réalisera la condition supplémentaire (pour la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}\omega$)

$$\int_{D_O^r} \varphi(OM)\,\mathrm{d}\omega(M) = 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 2\pi \int_0^{r_0} \varphi(r) r\,\mathrm{d}r = 1.$$

Soit alors $f(M)$ finie continue dans un ouvert Ω. Étudions

$$F(P) = \int \varphi(MP) f(M)\,\mathrm{d}\omega(M)$$

qui est dit « produit de composition de $\varphi(OM)$ et de $f(M)$ ».

Nous supposons P à distance $> r_0$ de la frontière. Dans l'ouvert Ω_0 formé de ces points P, $F(P)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (à cause de la possibilité de dérivation sous le signe $\int$), de plus en prenant des coordonnées polaires r, θ autour de P

$$\begin{aligned} F(P) &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=r_0} \varphi(r) f_{r,\theta} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^{r_0} \mathcal{M}_f^r \varphi(r) r\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Si l'on applique cela à une fonction f harmonique, il vient $F(P) = f(P)$, donc

« *Les fonctions harmoniques sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ ».

Exercice : Montrer qu'une médiation spatiale à rayon constant donne à partir de f (finie continue) une fonction à gradient continu. Si f a des dérivées d'ordre n continues, on obtient une fonction à dérivées d'ordre $n+1$ continues. Application aux fonctions harmoniques.

§ 5. — Rappel des formules de Green.

Soient Ω un ouvert borné à frontière assez régulière, par exemple formée de plusieurs circonférences, et $\vec{V}$ une fonction vectorielle continûment différentiable, réel ou complexe dans un ouvert $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$.

Rappelons alors la formule de Green-Riemann

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{V}\,\mathrm{d}\omega = \int_{\Omega^*} \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s \qquad \text{(App. 1)}$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure, et s l'arc de Ω^*. On dira en général que Ω est régulier greenien s'il se prête à cette formule. Si f et g ont des dérivées secondes continues dans Ω_0, prenons le vecteur $\vec{V} = f \operatorname{grad} g$, il vient alors

$$\iint_\Omega [f \Delta g + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\,\mathrm{d}\omega = \int_{\Omega^*_{\text{ext}}} f \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s \qquad \text{(App. 2)}$$

https://spartacus-idh.com

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

d'où, en particulier,

$$\iint_\Omega \Delta g \, \mathrm{d}\omega = \int_{\Omega^*_{\text{ext}}} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}n} \, \mathrm{d}s \qquad \text{(flux sortant)} \qquad \text{(App. 3)}$$

$$\iint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f) \, \mathrm{d}\omega = \int_{\Omega^*_{\text{ext}}} \left(f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}n} - g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n} \right) \mathrm{d}s. \qquad \text{(App. 4)}$$

§ 6. — Caractère local de l'harmonicité, critère du laplacien.

Si u est une fonction harmonique dans Ω, et $\overline{D}^r_{M_0}$ un disque fermé dans Ω, de frontière γ, on a vu que

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \, \mathrm{d}s = 0 \qquad \text{donc} \qquad \iint_{D^r_{M_0}} \Delta u \, \mathrm{d}\omega = 0,$$

ce qui exige en tout point

$$\Delta u = 0. \qquad \text{(Équation de Laplace)}$$

Réciproquement, s'il y a des dérivées secondes continues, la condition $\Delta u = 0$ partout entraîne $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \, \mathrm{d}s = 0$, d'où l'harmonicité.

L'existence de dérivées secondes continues et la nullité du laplacien constituent un critère d'harmonicité de caractère local.

Exercice : Soit f munie de dérivées secondes continues au voisinage de M_0. Montrer, grâce à (App. 3) et au développement limité au deuxième ordre de f que

$$\begin{aligned}(\Delta f)_{M_0} &= \lim_{r\to 0} \frac{4}{r^2} [\mathcal{M}^r_f(M_0) - f(M_0)] \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{8}{r^2} [\mathcal{A}^r_f(M_0) - f(M_0)].\end{aligned}$$

Lorsque ces limites existent pour certaines f (non nécessairement continues) on dit que ce sont des laplaciens généralisés.

II — Usage du laplacien ordinaire

§ 7. — Polynômes harmoniques.

Si $\mathcal{P}$ est un polynôme harmonique mis sous forme d'une somme de polynômes homogènes $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + \cdots + \mathcal{P}_n$ ($\mathcal{P}_i$ étant de degré i), chacun d'eux est harmonique. C'est évident pour $n = 0$ ou $n = 1$; comme

© Spartacus-Idh 2019

on a $\Delta\mathcal{P} = \Delta\mathcal{P}_0 + \Delta\mathcal{P}_1 + \cdots + \Delta\mathcal{P}_n$, ces termes sont homogènes de degrés différents donc identiquement nuls comme $\Delta\mathcal{P}$.

On est donc ramené à étudier les polynômes harmoniques homogènes. Supposons $n \geqslant 2$. Écrivons que

$$\mathcal{P}_n = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{0,n}y^n$$

est harmonique. Le terme en $x^p y^q$ de $\Delta\mathcal{P}_n$ a pour coefficient

$$a_{p+2,q}(p+2)(p+1) + a_{p,q+2}(q+2)(q+1).$$

En annulant tous ces coefficients pour $p+q = n-2$, on trouve $n-1$ équations aux $n+1$ inconnues $a_{n,0}, \ldots, a_{0,n}$. Remarquons que les premiers membres sont des formes linéaires indépendantes. Il suffit de voir qu'on peut résoudre les équations obtenues en les égalant à des nombres arbitraires. Pour cela, on prendra $a_{0,n}$ et $a_{1,n-1}$ nuls et on obtiendra successivement tous les autres par des équations à une inconnue.

Mais alors notre recherche de $\mathcal{P}_n$ harmonique nous donnera tous les coefficients en fonction linéaire homogène de deux d'entre eux.

Le polynôme $\mathcal{P}_n$ prend la forme $\lambda\mathcal{Q}_n^1 + \mu\mathcal{Q}_n^2$, où chacun des $\mathcal{Q}$ possède un terme que l'autre ne possède pas. Ces $\mathcal{Q}$ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'une combinaison linéaire n'est nulle que si les coefficients sont nuls. (Ce qui équivaut à dire que ces $\mathcal{Q}$ ne sont pas à coefficients proportionnels).

Inversement, on voit que deux tels polynômes harmoniques indépendants donnent par combinaison linéaire homogène, le polynôme général cherché.

On obtient aussitôt deux polynômes indépendants en remarquant que la fonction complexe $z^n = (x+iy)^n$ est harmonique ; les dérivées secondes en x et y sont en effet

$$n(n-1)z^{n-2} \qquad \text{et} \qquad -n(n-1)z^{n-2}.$$

Les parties réelles et imaginaires de z^n donnent les deux polynômes cherchés, qui en coordonnées polaires s'écrivent d'ailleurs

$$\rho^n \cos n\theta \qquad \text{et} \qquad \rho^n \sin n\theta.$$

On remarque donc que tout polynôme en $z = x + iy$ est harmonique, et par suite aussi toute série entière de z dans le cercle de convergence, puisque la convergence uniforme conserve l'harmonicité.

§ 8. — Le laplacien en coordonnées polaires. Fonction harmonique fondamentale.

Il est intéressant d'exprimer le laplacien en diverses coordonnées. Ainsi en coordonnées polaires r, θ

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Lorsque u est seulement fonction de r, on trouve donc, d'ailleurs plus rapidement par un calcul direct

$$\Delta u = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

https://spartacus-idh.com

En égalant à zéro, il vient une équation différentielle fournissant les fonctions harmoniques fonctions de r seul ; on trouve

$$A \log r + B. \qquad (A, B \text{ constantes})$$

Par analogie avec le cas de l'espace, on introduira plutôt $\log \frac{1}{r}$ noté aussi $h(r)$ qui sera dite *fonction harmonique fondamentale.*

§ 9. — Applications des formules de Green.

Considérons, dans un ouvert où u est harmonique, un domaine se prêtant aux formules de Green. Le flux entrant ou sortant est donc nul.

Application : Si u est harmonique dans une couronne circulaire de centre 0

$$\int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s = \text{Cste} \qquad (\gamma_r \text{ circonférence concentrique de rayon } r)$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} r\,\mathrm{d}\theta = K$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{K}{r} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} u(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta = K \log r + \mathrm{C^{te}}$$

la moyenne de u sur γ_r est fonction linéaire de $\log r$ ou $h(r)$.

Exercice : Soit ω un voisinage ouvert d'un point d'une courbe assez régulière ; si une fonction à gradient continu dans ω est harmonique de chaque côté de la courbe, elle est harmonique dans ω.

Reprenons en général u harmonique dans Ω et $P \in \Omega$; entourons P d'un petit disque $\overline{D}_P^R$ de circonférence γ et considérons $\Omega - \overline{D}_P^R$. La formule de Green (App. 4) appliquée à cet ouvert et aux fonctions harmoniques u et $\log \frac{1}{PM}$ donne

$$\int_{\Omega^*_{\text{ext}}} \Big(u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\Big)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_{\text{ext}}} \Big(u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\Big)\,\mathrm{d}s.$$

Dans la première intégrale la dérivée normale est prise vers l'extérieur de Ω ; dans la seconde, vers l'extérieur du disque. La seconde intégrale s'écrit

$$\int_\gamma u \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} h(r)\Big)_R\,\mathrm{d}s - h(R) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s.$$

La seconde partie est nulle, la première vaut

$$-\frac{1}{R} \int_\gamma u\,\mathrm{d}s = -2\pi u(P).$$

D'où nous concluons, avec les dérivées normales vers l'intérieur

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^*_{\text{int}}} \Big(u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \log \frac{1}{PM} - \log \frac{1}{PM} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\Big)\,\mathrm{d}s_M. \qquad \text{(App. 5)}$$

© Spartacus-Idh 2019

§ 10. — Dérivées des fonctions harmoniques — Majoration.

Considérons $u(M,t)$ dépendant d'un paramètre t ; s'il y a des dérivées du troisième ordre continues en (x,y,t), l'harmonicité de u en (x,y) entraîne celle de $\frac{\partial u}{\partial t}$ parce que $\Delta(\frac{\partial u}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta u$.

De même, si u est harmonique, toutes ses dérivées successives en x, y sont harmoniques. Cela permet d'en évaluer des limitations comme suit.

Considérons dans Ω, ouvert où u est harmonique, un point P et le disque fermé $\overline{D}_P^R$ contenu dans Ω, de frontière γ.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P = \frac{1}{\pi R^2}\iint \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi R^2}\int_\gamma u\alpha\,\mathrm{d}s$$

car nous avons $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{div}\cdot(u,0)$ où $\alpha = \cos\theta$ est le cosinus directeur de la normale extérieure donc

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P \leqslant \frac{U_\gamma}{\pi R}\int_0^{2\pi} |\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta = \frac{4U_\gamma}{\pi R}$$

avec

$$U_\gamma = \sup_\gamma |u|.$$

Donc, si $U = \sup|u|$ et δ est la distance de P à la frontière

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P \leqslant \frac{4U}{\pi\delta}. \qquad \text{(App. 6)}$$

On améliore le résultat pour u réelle en considérant les bornes $\overline{B}$ et $\underline{B}$, et en appliquant le résultat précédent à $u - \frac{\overline{B}+\underline{B}}{2}$. Il vient

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P \leqslant \frac{4}{\pi\delta}\left(\frac{\overline{B}-\underline{B}}{2}\right) \qquad \text{(App. 7)}$$

$$|\operatorname{grad} u|_P \leqslant \frac{4}{\pi\delta}\left(\frac{\overline{B}-\underline{B}}{2}\right). \qquad \text{(App..7}_1\text{)}$$

À partir de là, nous retrouvons que si u est harmonique et bornée dans le plan, alors $u =$ Constante.

III — Transformation conforme

§ 11. — Critère.

Considérons une application réelle, continûment différentiable d'un domaine plan Ω, dans le plan.

$$\begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = g(x,y) \end{cases} \quad \text{dans le plan, d'où} \quad \begin{cases} \mathrm{d}X = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}Y = \dfrac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

https://spartacus-idh.com

Supposons qu'en chaque point, $\mathrm{d}X$ et $\mathrm{d}Y$ ne soient pas tous deux nuls, sauf si $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ le sont, ce qui équivaut à $\frac{D(f,g)}{D(x,y)} \neq 0$. Cela implique la biunivocité locale.

Étudions la transformation des directions en un point, donnée par les différentielles. Supposons qu'à deux directions rectangulaires correspondent deux directions rectangulaires. En particulier à

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x = 1,\ \mathrm{d}y = 0 \quad &\text{correspondent} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} \\ \mathrm{d}x = 0,\ \mathrm{d}y = 1 \quad &\text{correspondent} \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

d'où la condition

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

En considérant alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x = 1,\ \mathrm{d}y = 1 \quad &\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \\ \mathrm{d}x = 1,\ \mathrm{d}y = -1 \quad &\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

il vient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Nous avons donc les conditions suivantes

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2 & \text{(App. 8)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0. & \text{(App. 9)} \end{cases}$$

L'expression (App. 8) est nécessairement différente de zéro, on peut la noter $\lambda(x, y)$.

Les relations (App. 8) et (App. 9) entraînent qu'à deux directions rectangulaires quelconques correspondent deux directions rectangulaires (calcul élémentaire) et elles équivalent d'ailleurs à

$$\mathrm{d}S^2 = \lambda\, \mathrm{d}s^2 \qquad (\lambda \neq 0).$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ ne sont pas simultanément nuls, d'après l'hypothèse initiale et si l'une de ces dérivées partielles est nulle, la dérivée de l'autre fonction en x l'est aussi d'après (App. 9). On posera donc

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

expression qui est toujours définie par l'un des rapports, et qui est continue.

En la portant dans (App. 8) nous trouvons $\varepsilon^2 = 1$. Dans le domaine, on a donc partout

$$\varepsilon = +1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = -1.$$

© Spartacus-Idh 2019

D'ailleurs $\frac{D(f,g)}{D(x,y)} = \varepsilon\lambda$ est de signe constant. D'où les deux cas

$$\text{(I)} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \text{(II)} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}. \end{cases}$$

Dans le cas (I), la transformation des différentielles correspond à une rotation suivie d'une homothétie et il y a conservation des angles avec leur sens.

Dans le cas (II), la transformation globale équivaut à une transformation du premier type suivie d'une symétrie par rapport à OX. Il y a donc conservation des angles en grandeur mais changement de sens.

Les transformations considérées plus haut, assujetties à conserver l'orthogonalité de deux directions rectangulaires quelconques (ou d'ailleurs seulement pour deux couples) autour de chaque point sont donc nécessairement de l'un ou l'autre des types précédents dans tout le domaine. Ce sont les transformations dites conformes directe ou inverse.

§ 12. — Transformation du Δ.

De plus, si γ est la circonférence d'un disque fermé quelconque dans Ω, on a d'après (I) ou (II)

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}S = \pm \int_\gamma \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}S = 0.$$

Ainsi, dans les deux cas, f et g sont harmoniques.

Soient maintenant $U(X,Y)$ pourvue de dérivées secondes continues et qui devient par la transformation supposée conforme $u(x,y)$. Un calcul élémentaire donne

$$\Delta u = \Delta U.\lambda(x,y)$$

c'est-à-dire

$$\Delta u.\,\mathrm{d}s^2 = \Delta U.\,\mathrm{d}S^2.$$

Nous pouvons également établir cette propriété comme suit : prenons un petit disque D_r centré sur (x,y) et de transformé l'ensemble E_r

$$\Delta u = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D^*_{\text{ext}}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s, \qquad \Delta U = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\text{aire } E_r} \int_{E^*_{r\,\text{ext}}} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}S.$$

Les intégrales sont égales à cause de la similitude locale en chaque point ; comme le rapport des aires tend vers celui des $\mathrm{d}s^2$, on retrouve le résultat cherché.

En particulier, dans toute transformation du type considéré, l'harmonicité d'une fonction est conservée.

https://spartacus-idh.com

IV — Notions sur le potentiel logarithmique

§ 13. — Définition — Cas particuliers.

Remarquons que si $U(M,t)$ est une fonction harmonique de M dépendant d'un paramètre t, par exemple une variable réelle dans (a,b) et que u est bornée continue dans $\Omega \times (a,b)$

$$\int_a^b u(M,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{est harmonique dans } \Omega.$$

En effet, cette fonction est continue, et elle satisfait à la condition de moyenne, car cela revient, par intégration sous le signe $\int$, à constater cette propriété pour u et chaque t.

L'extension est immédiate au cas où t est un point d'un espace sur lequel est défini une « mesure de Radon » par rapport à laquelle on intègrera.

Un cas particulier important est le potentiel logarithmique

$$U(M) = \int \log \frac{1}{PM}\,\mathrm{d}\mu_P$$

qui est une intégrale de Radon pour une mesure notée μ ou $\mathrm{d}\mu$ (potentiel « des masses μ ») par exemple de support compact K (ou « chargeant » seulement K).

Plus particulièrement si ρ est une densité (continue et bornée), $\mathrm{d}\omega$ étant la mesure-aire dans l'ouvert borné Ω, et γ une courbe d'arc s, on a les exemples

$$\int_\Omega \log \frac{1}{MP}\rho(P)\,\mathrm{d}\omega_P \qquad \int_\gamma \log \frac{1}{MP}\rho(P)\,\mathrm{d}s_P.$$

On les appelle potentiel de simple couche avec une densité ρ. Donnons-en quelques propriétés.

a. En dehors de K, le potentiel U est une fonction harmonique ; cela tient à l'harmonicité en M de $h(MP) = \log \frac{1}{MP}$.

b. Le flux $\int \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s_M$ sortant de tout D_P^r ou de tout ouvert régulier greenien contenant P vaut -2π. Pour étudier le flux $\int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s$ de U sortant d'un tel ouvert contenant K, il suffit de faire passer le $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}$ sous le signe somme de l'expression de U, de permuter les deux signes somme et d'utiliser la propriété précédente du log. On trouve ainsi que le flux sortant du potentiel de $\mathrm{d}\mu$ est égal à $-2\pi M$ (M = masse totale).

c. **Exercice** : on étudiera le potentiel $U = \int \log \frac{1}{MP}\rho(P)\,\mathrm{d}\omega_P$ dans Ω, ρ étant borné dans Ω. On verra dans les traités classiques que si ρ admet un gradient continu, U admet dans Ω des dérivées secondes continues et $\Delta U = -2\pi\rho$ (formule de Poisson). On démontrera que si ρ est seulement continu, U admet dans Ω un laplacien généralisé (périphérique et spatial, v. § 6) égal à $-2\pi\rho$.

© Spartacus-Idh 2019

***d*. Couche circulaire uniforme.** Si γ est une circonférence de centre 0, $\int_\gamma \log \frac{1}{MP}\, ds_P$ est harmonique à l'extérieur et à l'intérieur du cercle. En un point M extérieur, c'est la moyenne de $\log \frac{1}{MP}$, qui vaut $\log \frac{1}{OM}$. À l'intérieur comme à l'extérieur, c'est une fonction de la distance $OM = r$. Elle est donc de la forme $A \log \frac{1}{r} + B$. Mais la fonction étant bornée au voisinage de 0, on a $A = 0$, et par suite, le potentiel est constant dans le cercle, il y prend partout sa valeur au centre, soit $2\pi \log \frac{1}{OP}$.

Ainsi une simple couche uniforme circulaire a un potentiel

$$\text{à l'intérieur :} \quad \log \frac{1}{R} \cdot \text{masse totale}$$

$$\text{à l'extérieur :} \quad \log \frac{1}{OM} \cdot \text{masse totale}$$

et ce dernier résultat s'étend aisément à une distribution de masses dans le disque avec une densité fonction seulement de la distance au centre.

§ 14. — Potentiel de double couche.

Partons de $\log \frac{1}{MP}[M(x,y), P(a,b)]$. Les dérivées en x ou en a qui sont respectivement $-\frac{x-a}{MP^2}$ et $\frac{x-a}{MP^2}$ sont harmoniques en (x,y) hors le point (a,b), et harmoniques (a,b) hors (x,y). Donc, en intégrant par rapport à $P(a,b)$ par une mesure quelconque, par exemple portée par un compact K, on aura des fonctions harmoniques en (x,y) hors de K. Par exemple, si Γ est un arc fermé,

$$\int_\Gamma \frac{x-a}{MP^2} f(P)\, ds_P, \qquad f \text{ finie continue}$$

ou, avec une mesure $d\mu$ sur Γ,

$$\int_\Gamma \frac{x-a}{MP^2}\, d\mu_P$$

sont harmoniques hors de Γ. Il en est de même pour y et par suite, α et β étant les cosinus directeurs de la normale orientée, on conclut à l'harmonicité hors Γ de

$$\int \frac{(x-a)\alpha + (y-b)\beta}{MP^2}\, d\mu_P$$

c'est-à-dire au signe près

$$\int_\Gamma \frac{d}{dn_P}\left(\log \frac{1}{MP}\right) d\mu_P$$

et en particulier

$$\int_\Gamma \frac{d}{dn_P}\left(\log \frac{1}{MP}\right)\rho(P)\, ds_P$$

où $\frac{d}{dn_P}\left(\log \frac{1}{MP}\right)$ désigne pour M fixé la dérivée de la fonction de P le long de la normale orientée, au pied de la normale à Γ.

https://spartacus-idh.com

On appelle cette expression un *potentiel de double couche*, car on l'obtient comme limite du potentiel global de deux couches convenables sur deux courbes parallèles voisines (masses opposées dans tout tube de normales).

Remarquons que c'est une somme de dérivées en x et y de potentiels de simple couche. On trouvera une étude plus approfondie dans les ouvrages classiques [35]. Nous n'avons voulu donner ici que des exemples de fonctions harmoniques. Ils sont importants car toute fonction harmonique s'exprime localement, d'après la formule (App. 5), comme une somme de potentiels de simple et double couche par exemple sur une circonférence.

V — Analycité des fonctions harmoniques

§ 15. — Démonstration et conséquences.

La formule (App. 5) nous a donné une expression locale de toute fonction harmonique comme somme de potentiels de simple et de double couche.

On a remarqué qu'un potentiel de double couche est une somme de dérivées en x et y, de potentiels de simple couche. Si donc nous démontrons l'analyticité d'un potentiel de simple couche tel que

$$V(M) = \int_\gamma \log \frac{1}{PM} \rho(P)\, \mathrm{d}s_P$$

(ρ par exemple bornée continue sur l'arc fermé γ) au voisinage d'un point M_0 non situé sur γ, nous aurons démontré l'analyticité des fonctions harmoniques. Or

$$\log \frac{1}{PM} = \frac{1}{2} \log[(x-a)^2 + (y-b)^2]$$

est pour chaque $P(a,b)$ analytique en x et y réels au voisinage de $M_0(x_0, y_0) \neq P$ d'après le théorème de substitution. Détaillons pour examiner le développement

$$\log \frac{1}{PM} = -\frac{1}{2} \log MP^2 = -\frac{1}{2} \log M_0P^2 - \frac{1}{2} \log(1-X)$$

avec

$$X - \frac{MM_0{}^2 + 2\overrightarrow{PM_0}\overrightarrow{M_0M}}{M_0P^2}.$$

Il n'y a qu'à substituer dans le développement en série entière

$$-\frac{1}{2} \log M_0P^2 + \frac{1}{2}\left(X + \frac{X^2}{2} + \cdots\right)$$

à X son expression comme polynôme en $x - x_0$ et $y - y_0$.

Or ce polynôme a des coefficients majorés en module par ceux de

$$\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{M_0P^2} + \frac{2}{M_0P}[(x-x_0) + (y-y_0)]$$

(35) Ces potentiels servaient à résoudre le problème de Dirichlet grâce à la théorie de Fredholm — Exposé modernisé par Kral, *Trans. A. M. S.*, 125 (1966).

© Spartacus-Idh 2019

donc de

$$\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{\delta^2}+\frac{2}{\delta}[(x-x_0)+(y-y_0)]$$

noté $X_1(x-x_0, y-y_0)$, où δ est la distance de M_0 à γ.

De sorte que dans la série, lorsqu'on remplace X par son expression, on obtient deux séries entières en $x-x_0, y-y_0$, dont la seconde est majorante de la première. Comme $X_1(|x-x_0|, |y-y_0|) < 1$ dès que $MM_0 < \varepsilon$ convenable, on voit que les séries doubles sont absolument convergentes sous cette dernière condition. Et comme les coefficients (sauf le premier) de la série majorante sont indépendants de $P \in \gamma$, on peut intégrer terme à terme la 1re série en $\mathrm{d}s_P$ après multiplication par $\rho(P)$. Cela fournit un développement en série double de $x-x_0, y-y_0$ pour V lorsque $|x-x_0|$ et $|y-y_0|$ sont assez petits.

Le résultat est donc établi et s'étend d'ailleurs à $\log \frac{1}{MP}\,\mathrm{d}\mu_P$.

Remarque. La démonstration s'adapte immédiatement à $\int_\gamma MP^\alpha\,\mathrm{d}\mu_P$ où α est réel, même > 0, car on se ramène à utiliser le développement de $(1+X)^\alpha$; lorsque la série n'est pas à coefficients $\geqslant 0$ (cas de $\alpha > 0$) on utilise la série de même rayon de convergence obtenue en prenant les modules des coefficients.

La démonstration s'adapte aussi à $\int_\gamma \frac{x-a}{MP^2}\,\mathrm{d}\mu_P$.

Une fonction harmonique dans un domaine Ω, nulle au voisinage d'un point est donc partout nulle, puisqu'analytique.

Une fonction analytique dans Ω et harmonique au voisinage d'un point est harmonique dans Ω, puisque le laplacien analytique sera alors partout nul.

VI — L'intégrale de Poisson

§ 16. — Introduction de l'expression de l'intégrale.

Considérons une fonction harmonique u dans un ouvert contenant un disque fermé $\overline{D}_0^R$ de frontière γ_R. Nous savons qu'à l'intérieur

$$u(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{\text{int}}}\left(u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\log\frac{1}{PM}-\log\frac{1}{PM}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}s_M.$$

Si P n'est pas au centre, soit P_1 son inverse par rapport au cercle. Alors

$$0=\int_\gamma\left(u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\log\frac{1}{P_1M}-\log\frac{1}{P_1M}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}s_M.$$

Mais $\frac{P_1M}{PM}$ = constante quand M décrit le cercle, donc aussi

$$\log\frac{1}{PM}-\log\frac{1}{P_1M}$$

d'où

$$\int_\gamma \log\frac{1}{PM}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s_M=\int_\gamma\log\frac{1}{P_1M}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s_M.$$

Par combinaison linéaire des premières équations, il vient donc

$$u(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{\text{int}}}u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\log\frac{P_1M}{PM}\,\mathrm{d}s_M. \qquad \text{(App. 10)}$$

https://spartacus-idh.com

Exercice. En déduire la forme

$$u(P) = \frac{1}{2\pi R}\int_\gamma \frac{R^2 - OP^2}{MP^2} u(M)\,\mathrm{d}s_M \qquad \text{(App. 11)}$$

évidemment valable aussi si P est au centre.

Exercice. (Autre méthode pour obtenir cette formule) : on fait l'inversion de pôle P_1 conservant le cercle et qui amène P en 0. La fonction $u(M)$ devient alors une fonction harmonique $v(M_1)$ du point inverse M_1 ; on écrit que la valeur en 0 qui vaut $u(P)$, est la moyenne de v sur γ. En transformant cette intégrale de moyenne sur v, en intégrale relative au point M, il vient la relation précédente.

Exercice.

$$u(P_1) - u(P_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(M)\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{MP_2}, \overrightarrow{MP_1})}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta_M, \qquad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta.$$

§ 17. — Étude à l'intérieure et à la frontière.

Mais peu nous importe la manière d'introduire la relation (App. 11). Nous allons étudier directement « l'intégrale de Poisson »

$$I_f(P) = \frac{1}{2\pi R}\int_\gamma \frac{R^2 - OP^2}{MP^2} f(M)\,\mathrm{d}s_M \qquad \text{(App. 12)}$$

où l'on peut remplacer avantageusement $\frac{\mathrm{d}s_M}{2\pi R}$ par $\mathrm{d}\sigma_M$, mesure de total 1.

La fonction f donnée sur γ peut être finie continue ou plus généralement sommable-ds.

Étude à l'intérieur.

a. Dans D_0^R, $I(P)$ est harmonique. Il suffit de voir que le noyau $\frac{R^2-OP^2}{MP^2}$ est harmonique en $P(x,y)$ pour chaque $M \in \gamma$.

En prenant l'axe des x sur OM, nous avons à vérifier l'harmonicité de $\frac{R^2-(x^2+y^2)}{(R-x)^2+y^2}$. Plutôt que calculer le Δ, observons que cela vaut

$$-1 + \frac{2R^2 - 2Rx}{(R-x)^2 + y^2} \qquad \text{ou} \qquad -1 + 2R\frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\frac{1}{MP}\Big).$$

b. Si $f =$ constante K, $I(P) = K$. $I(P)$ est alors en effet fonction de OP seul. Comme elle est bornée au voisinage de 0, elle est constante et égale à sa valeur au centre

$$\frac{1}{2\pi R}\int_\gamma \frac{R}{R^2} K\,\mathrm{d}s = K.$$

© Spartacus-Idh 2019

Allure de $I(P)$ à la frontière.

En tout point M_0 où f est continue (finie ou non), $I_f(P)$ tend vers $f(M_0)$ quand $P \in D_0^R$ tend vers M_0.

Voyons que

$$\limsup_{P\to M_0} I_f \leqslant f(M_0).$$

C'est évident si $f(M_0) = +\infty$. Si $f(M_0) < +\infty$, soit Λ fini $> f(M_0)$. Il suffit de montrer que

$$\limsup_{P\to M_0} \leqslant \Lambda \qquad \text{ou} \qquad \limsup_{P\to M_0}(I_f - \Lambda) \leqslant 0.$$

Comme $I_f - \Lambda = I_f - I_\Lambda = I_{f-\Lambda}$, nous sommes ramenés à voir que

$$\limsup_{P\to M_0} I_{f-\Lambda} \leqslant 0.$$

Or soit α un arc autour de M_0, où $f < \Lambda$, on a

$$I_{f-\Lambda}(P) = \frac{1}{2\pi R}\int_\alpha \; + \frac{1}{2\pi R}\int_{\gamma-\alpha} \; .$$

La seconde intégrale est définie et continue au voisinage de M_0 dans le plan et nulle en M_0. La première est $\leqslant 0$. D'où l'inégalité cherchée.

On montre de même que $\limsup I_f \geqslant f(M_0)$ par suite

$$\lim_{P\to M_0} I_f(P) = f(M_0).$$

Il est à noter que le raisonnement prouve sans autre hypothèse que la sommabilité de f, que

$$\limsup_{P\to M_0} I_f(P) \leqslant \limsup_{M\in\gamma,\ P\to M_0} f(M). \qquad \text{(App. 13)}$$

Et sans même la sommabilité cela subsiste en remplaçant I_f par l'intégrale supérieure $\overline{I}_f$.

Conséquence. I_f résout le problème de Dirichlet pour le cercle avec la donnée f finie, continue.

Si u est une fonction finie continue dans le disque fermé et harmonique à l'intérieur, elle vaut donc I_u. On retrouve amélioré le résultat initial (§ 16) non utilisé, qui introduisait la forme de l'intégrale de Poisson.

De là résulterait sans introduire les potentiels logarithmiques l'analyticité des fonctions harmoniques d'après celle de

$$\int \frac{f(M)}{MP^2}\, \mathrm{d}s_M.$$

https://spartacus-idh.com

§ 18. — Applications.

1. Critère local d'harmonicité

Si pour f finie, continue, réelle (et par suite aussi pour f complexe) dans Ω, il existe pour tout $M_0 \in \Omega$ un $\rho_{M_0} > 0$ tel que

$$\mathcal{M}_f^r(M_0) = f(M_0) \quad \text{pour tout } r < \rho_{M_0}$$

alors f est harmonique.

Car pour tout disque $\overline{D}_{M_0}^r \subset \Omega$, $f - I_f$ considéré à l'intérieur s'annule à la frontière, et, possédant la même propriété locale que f, ne peut admettre de maximum ou de minimum sans constance au voisinage. Donc $f = I_f$ en vertu du principe du maximum.

2. Exemples de prolongement harmonique

a. Si au voisinage de M_0 exclu, u est harmonique avec l'allure

$$\lim_{M \to M_0,\ M \neq M_0} \frac{u(M)}{\log M_0 M} = 0$$

alors u se prolonge en M_0 de façon à être harmonique au voisinage (le prolongement est évidemment unique, puisque continu).

Car en introduisant l'intégrale de Poisson de u réelle dans $D_{M_0}^R$,

$$u - I_u - \varepsilon \log \frac{R}{M_0 M}$$

est dans le disque pointé (disque moins le centre) harmonique et de lim sup $\leqslant 0$ à la frontière pour tout $\varepsilon > 0$. Donc l'expression est $\leqslant 0$, d'où $u \leqslant I_u$ et de même $-u \leqslant I_{-u}$; nous en concluons que u coïncide avec I_u.

b. Soit u définie dans un voisinage ouvert, d'un point M_0 d'une droite D, d'un seul côté de D. On suppose que u est harmonique et s'annule sur D (c'est-à-dire tend vers 0 quand M tend vers tout point de D). Alors u se prolonge harmoniquement au travers de D par valeurs opposées en deux points symétriques et valeur 0 sur D. Un tel prolongement est en effet continu et satisfait au critère précédent d'harmonicité. On peut aussi établir le résultat en utilisant une intégrale de Poisson pour un cercle centré sur D.

Grâce à une inversion l'extension est immédiate à une fonction définie d'un côté d'un arc de cercle (la symétrie signifiant correspondance par inversion).

3. Les inégalités de Harnack

Lorsque $f \geqslant 0$, l'expression (App. 12) donne en majorant et minorant MP par $R + OP$ et $R - OP$

$$\frac{R - OP}{R + OP} I_f(0) \leqslant I_f(P) \leqslant \frac{R + OP}{R - OP} I_f(0).$$

Donc, si une fonction u est harmonique > 0 dans D_0^R,

$$\frac{R' - OP}{R' + OP} \leqslant \frac{u(P)}{u(0)} \leqslant \frac{R' + OP}{R' - OP} \qquad (0 < R' < R)$$

© Spartacus-Idh 2019

puis

$$\frac{R-OP}{R+OP} \leqslant \frac{u(P)}{u(0)} \leqslant \frac{R+OP}{R-OP}. \tag{App. 14}$$

Si A est un point de la circonférence, ces limites sont d'ailleurs atteintes par la fonction $\frac{R^2-OP^2}{AP^2}$.

En particulier, on trouve dans un cercle fixé plus petit, par exemple dans $D_0^{\frac{R}{2}}$

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{u(P)}{u(0)} \leqslant 3. \tag{App. 15}$$

On en déduit aussi les relations

$$-\frac{2OP}{R+OP}u(0) \leqslant u(P)-u(0) \leqslant \frac{2OP}{R+OP}u(0) \tag{App. 16}$$

d'où

$$|\operatorname{grad} u|_0 \leqslant \frac{2}{R}u(0). \tag{App. 17}$$

On en déduirait pour u de signe quelconque, une formule analogue à (App..7_1) avec moins bon coefficient.

Noter aussi que les formules (App. 14) donnent la démonstration originale du théorème de Picard (n° 1) en faisant tendre R vers l'infini.

Remarquer que d'après (App. 14) $\frac{u(P)}{u(0)} \to 1$ ($P \to 0$) uniformément en $u > 0$, ce qui suffit souvent dans les applications.

VII — Familles de fonctions harmoniques. Convergence

§ 19. — Familles bornées localement.

Théorème. *Toute famille de fonctions harmoniques u bornées localement uniformément dans un ouvert Ω possède l'égale continuité en tout point (donc l'égale continuité uniforme sur tout compact $K \subset \Omega$, dite brièvement égale continuité sur K).*

Cela résulte des formules précédentes (App. 16) ou de la limitation des dérivées (n° 7), ou comme il suit, de la définition même de l'harmonicité. Soit

$$D' = (D^r_{M_1} \cup D^r_{M_2}) - (D^r_{M_1} \cap D^r_{M_2})$$

$$\begin{aligned} u(M_2)-u(M_1) &= \frac{1}{\pi r^2}\Big(\iint_{D^r_{M_2}} u\,\mathrm{d}\omega - \iint_{D^r_{M_1}} u\,\mathrm{d}\omega\Big) \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\Big(\iint_{D'\cap D^r_{M_2}} u\,\mathrm{d}\omega - \iint_{D'\cap D^r_{M_1}} u\,\mathrm{d}\omega\Big) \end{aligned}$$

$|u(M_2)-u(M_1)| \leqslant \frac{A}{\pi r^2}$ aire de D', si $M_1M_2 < 2r$, $|u| \leqslant A$, dans $D^{3r}_{M_1}$.

On conclut en remarquant que aire $D' \to 0$ quand $M_2 \to M_1$ (r fixé).

https://spartacus-idh.com

Conséquences.

Considérons une suite u_n de fonctions harmoniques dans Ω, localement bornées uniformément :

1. la convergence simple entraîne la convergence uniforme locale, et la limite est harmonique.

2. De la suite u_n on peut extraire une suite convergeant uniformément localement (vers une fonction harmonique).

Considérons en effet une suite d'ouverts croissants, relativement compacts, de réunion Ω, Ω_1, Ω_2, …, Ω_n,… On peut extraire une suite $u_n^{(1)}$ convergeant uniformément dans $\overline{\Omega}_1$. On en extrait $u_n^{(2)}$ convergeant uniformément dans $\overline{\Omega}_2$, etc … Le procédé diagonal donne la suite $u_n^{(n)}$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω.

Corollaire. *Si Ω est connexe, la convergence (simple) au voisinage d'un point entraîne la convergence partout (u_n loc. bornée).*

Sinon on obtiendrait par extraction deux suites convergeant vers deux fonctions non partout égales mais harmoniques et égales au voisinage d'un point.

Convergence des dérivées. La convergence locale uniforme des u_n entraîne celle des dérivées successives (vers les dérivées de la limite), car dans un disque $D_{M_0}^R$ par exemple $\frac{\partial(u_n-u)}{\partial x}$ est majoré par

$$K \sup_{D_{M_0}^{2R}} |u_n - u| \; ; \qquad \left(D_{M_0}^{2R} \subset \Omega \, ; \, K = \frac{2}{R} \text{ ou même } \frac{4}{\pi R} \right).$$

§ 20. — Famille de fonctions réelles bornées inférieurement (ou de même supérieurement) localement dans un domaine.

Théorème. *Une famille de fonctions harmoniques $u > 0$ dans un domaine Ω admet une enveloppe supérieure partout infinie, ou bien localement bornée et même continue. L'enveloppe inférieure est de même partout nulle ou bien > 0 continue.*

Les points où l'enveloppe supérieure U vaut $+\infty$ et ceux où elle est finie sont ouverts d'après les inégalités de Harnack. Ces inégalités montrent même que si U est finie en un point, elle est bornée au voisinage.

Montrons de plus que U finie est alors continue. Cela résulte aisément de l'égale continuité, ou directement encore des inégalités de Harnack. D'ailleurs la semi-continuité inférieure est vraie de toute enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues.

Raisonnement analogue pour l'enveloppe inférieure.

Remarque. D'après les inégalités de Harnack ou (App. 17), les fonctions $\log u$ sont également continues en tout point. D'après la théorie de l'égale continuité elles sont donc bornées uniformément sur tout compact dès qu'elles le sont en un point ; et dans ce cas les enveloppes sont continues ; nous en déduisons encore le théorème précédent.

© Spartacus-Idh 2019

Corollaire. *Pour toute fonction harmonique $u > 0$ dans un domaine Ω, le rapport des valeurs de u en deux points quelconques M', M'' d'un compact $K \subset \Omega$ est compris entre deux nombres > 0 indépendants de u, M' et M''.*

Il suffit d'avoir de telles limitations pour $u(M)/u(M_0)$, (M_0 fixé) ou encore pour toutes les fonctions harmoniques > 0 égales à 1 en M_0 ; c'est ce que nous donne, pour ces dernières fonctions, le théorème qui précède.

Extension du théorème. Pour une famille de fonctions harmoniques u dans un domaine Ω, bornées inférieurement uniformément au voisinage de tout point, l'enveloppe supérieure est $+\infty$ ou bien est finie continue.

Car dans tout domaine partiel ω relativement compact dans Ω, les u sont plus grands qu'une même constante K, et l'enveloppe supérieure des $u - K$ dans ω est $+\infty$ ou finie continue.

Théorème (Théorèmes de convergence). *Soit u_n une suite de fonctions harmoniques localement bornées inférieurement (uniformément) dans un domaine Ω.*

Si en un point la suite u_n est bornée, elle est localement bornée et les résultats du paragraphe précédent s'appliquent.

Si en un point M_0, $u_n(M_0)$ tend vers $+\infty$, alors u_n tend vers $+\infty$ partout, d'ailleurs uniformément localement.

Car si E est un compact de Ω et ω un domaine partiel $\overline{\omega} \subset \Omega$ contenant $\{M_0\} \cup E$, $u_n > K$ fixe dans ω et $u_n - K > 0$; si $u_n(M_0)$ tend vers $+\infty$, $u_n - K$ tend vers $+\infty$ uniformément sur E d'après le corollaire qui précède.

Corollaire.

1. *Toute suite croissante de fonctions harmoniques dans un domaine tend vers $+\infty$ ou vers une fonction harmonique (uniformément localement).*

2. *Toute famille de fonctions harmoniques localement bornées inférieurement dans un domaine possède la propriété suivante : de toute suite de ces fonctions on peut extraire une suite convergeant vers $+\infty$ ou vers une fonction harmonique (uniformément localement). On exprime cela en disant que la famille est normale (Montel).*

VIII — Étude des fonctions harmoniques au voisinage d'un point singulier

§ 21. — Théorème.

Une fonction harmonique u dans le disque D_0^R est développable de façon unique au voisinage de 0 sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta)\rho^n \qquad \textit{en coordonnées polaires.} \tag{App. 18}$$

Ce développement est valable dans le disque ; si $A_n = \sup_\theta |a_n(\theta)|$, la série admet un rayon de convergence $\geqslant R$.

Enfin $a_n(\theta)\rho^n$ vaut, en coordonnées x, y un polynôme harmonique homogène de degré n, c'est-à-dire que $a_n(\theta)$ est de la forme $\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$.

https://spartacus-idh.com

On obtient l'unicité d'un développement possible au voisinage de 0 en fixant θ, en considérant la série entière en ρ, et l'interprétation de $a_n(\theta).n!$ comme étant la dérivée $n^{\text{ème}}$ en ρ à l'origine dans la direction θ. L'existence au voisinage de 0 vient de l'analyticité de u, lorsqu'on groupe les termes de la série double, en polynômes homogènes de degrés croissants ; ces polynômes sont harmoniques puisque la série de leurs Δ est de somme nulle, ce qui entraîne d'après l'unicité d'un développement en série de Taylor, la nullité de ces Δ.

Il reste donc à prouver l'existence d'un développement dans D_0^R, avec la propriété annoncée de A_n. Partons de l'intégrale de Poisson dans $D_0^{R'}$ ($R' < R$) de frontière $\Gamma_{R'}$

$$u(P) = \frac{1}{2\pi R'} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{R'^2 - OP^2}{MP^2} u(M)\, \mathrm{d}s(M).$$

Introduisons l'angle $\gamma = (\vec{OP}, \vec{OM})$ et remarquons que

$$\begin{aligned} MP^2 &= OP^2 + R'^2 - 2R'OP\cos\gamma = \rho^2 + R'^2 - R'\rho(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) \\ &= (R' - \rho e^{i\gamma})(R' - \rho e^{-i\gamma}). \end{aligned}$$

Alors

$$u(P) = \frac{R'^2 - \rho^2}{2\pi R'} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{u(M)\, \mathrm{d}s(M)}{(R' - \rho e^{i\gamma})(R' - \rho e^{-i\gamma})}.$$

Or

$$\frac{1}{(R' - \rho e^{i\gamma})(R' - \rho e^{-i\gamma})} = \frac{1}{R'^2}\Big(1 - \frac{\rho}{R'} e^{i\gamma}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{\rho}{R'} e^{-i\gamma}\Big)^{-1}$$

se développe en série entière de ρ : on développe chaque facteur, et on fait le produit des séries. On a aussitôt une série majorante en supprimant les coefficients $e^{i\gamma}$, $e^{-i\gamma}$, ce qui donne une série entière à coefficients numériques λ_n, de rayon R', d'où $\lambda_n R_0^n$ borné indépendamment de n pour tout choix de R_0 ($0 < R_0 < R'$). On peut donc intégrer terme à terme le développement pour $\rho < R'$ et il vient pour l'intégrale un développement $\sum \psi_n(\theta)\rho^n$ avec $|\psi_n(\theta)| < K/R_0^n$ où R_0 est choisi quelconque $< R'$, puis K constante convenable.

On en déduit le même résultat pour u ; on a donc un développement valable pour $\rho < R$ avec A_n majoré par une expression du type K/R_0^n, où $R_0 < R$ a pu être pris arbitrairement voisin de R. Cela équivaut à la propriété que la série $A_n\rho^n$ ait un rayon $\geqslant R$.

Corollaire. *Soit u harmonique à l'extérieur d'un disque D_0^R, bornée au voisinage de l'infini. Elle admet pour ρ assez grand un développement unique*

$$\sum_0^\infty a_n(\theta)\rho^{-n} \tag{App. 19}$$

Ce développement est valable pour $\rho > R$; et pour ρ quelconque $> R' > R$ la série des modules est majorée par une série numérique convergente. Enfin $a_n(\theta)$ est de la forme $\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$.

© Spartacus-Idh 2019

Il suffit de faire l'inversion de pôle 0 ; on obtient une fonction harmonique bornée au voisinage de l'origine et qui se prolonge donc harmoniquement en 0. On obtient une fonction harmonique dans un disque ; il suffit d'y appliquer le théorème précédent, puis de revenir par inversion à la fonction initiale.

Remarque. Des séries du type (App. 18) et (App. 19) avec convergence uniforme locale dans ω ouvert et des a_n de la forme considérée, ont des sommes harmoniques.

§ 22. — Développement dans une couronne.

Soit u harmonique dans la couronne C_1C_2 ($R_1 < \rho = OM < R_2$).

Introduisons une couronne concentrique $C_1'C_2'$ ($R_1 < R_1' < \rho < R_2' < R_2$). Dans cette seconde couronne on a (avec les dérivées normales vers l'intérieur de la couronne)

$$u(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_{C_1'}\Big(u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\log\frac{1}{PM} - \log\frac{1}{PM}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\Big)\,\mathrm{d}s(M) + \frac{1}{2\pi}\iint_{C_2'}\Big(u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\log\frac{1}{PM} - \log\frac{1}{PM}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\Big)\,\mathrm{d}s(M).$$

La seconde intégrale représente une fonction harmonique de P variable dans $D_0^{R_2'}$, fonction qui admet un développement du type (App. 18), et ce développement ne change pas quand R_2' croît (le 1er membre et la 1re intégrale restant les mêmes).

La première intégrale représente de même une fonction harmonique hors de $D_0^{R_1'}$, invariante en tout point fixé quand R_1' décroît. Étudions-la de plus près.

$$\int_{C_2'} u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\log\frac{1}{PM}\,\mathrm{d}s(M)$$

harmonique hors de $\overline{D}_0^{R_2'}$ est majorée en module au voisinage de l'infini par

$$\int_{C_1'}|u|\frac{1}{MP}\,\mathrm{d}s(M) < \frac{\text{Cste}}{\rho - R_1'}$$

qui tend vers 0 quand ρ tend vers $+\infty$. La seconde partie

$$-\int_{C_1'}\log\frac{1}{MP}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s(M)$$

vaut

$$-\log\frac{1}{OP}\int_{C_1'}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s(M) + \int_{C_1'}\log\frac{PO}{PM}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s(M).$$

Le premier terme est de la forme $\alpha\log\frac{1}{\rho}$ où la constante α est indépendante de C_1' (c'est le flux entrant dans $D_0^{R_1'}$, soit $\int_{C_1'}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s$).

https://spartacus-idh.com

Le second terme est majoré en module au voisinage de l'infini par

$$\log \frac{\rho}{\rho - R_1'} \int_{C_1'} \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \right| \mathrm{d}s(M)$$

qui tend vers 0 quand ρ tend vers $+\infty$.

La première intégrale est donc la somme **1°**) de $\alpha \log \frac{1}{\rho}$, **2°**) d'une fonction harmonique, indépendante de R_1', et s'annulant à l'infini, donc de la forme (App. 19) $\sum a_n(\theta)\rho^{-n}$ avec $a_0 = 0$. On a ainsi dans la couronne C_1C_2 entière

$$u(P) = K + \alpha \log \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\theta)\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(\theta)\rho^{-n} \qquad \text{(App. 20)}$$

où les a_n et les $a_n^{(1)}$ sont de la forme $\lambda_n \cos n\theta + \mu_n \sin n\theta$.

Pour chacune de ces séries, la série des modules est majorée par une série numérique convergente, si $\rho < R_2'$ fixé $< R_2$ ou respectivement $\rho > R_1'$ fixé $> R_1$. Un développement de ce type est nécessairement unique ; il suffit même de supposer que pour tout ρ ($R_1 < \rho < R_2$) il y ait convergence uniforme en 0. En effet d'abord la moyenne en θ donne $K + \alpha \log \frac{1}{\rho}$, on retrouve l'expression de la moyenne et cela détermine K et α. Puis, quant aux $\sum$, on va voir qu'ils sont déterminés, en se ramenant par différence au cas $u = 0$. En multipliant par a_n et intégrant, on obtient

$$\rho^n \int a_n^2 \,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\rho^n} \int a_n a_n^{(1)} \,\mathrm{d}\theta = 0 \qquad (R_1 < \rho < R_2)$$

grâce à l'orthogonalité de deux a_n d'indices différents. Cela exige

$$\int a_n^2 \,\mathrm{d}\theta = 0, \quad a_n = 0 \,; \quad \text{de même } a_n^{(1)} = 0.$$

La théorie des séries trigonométriques permettrait de voir l'unicité sans autre hypothèse sur les $\sum$ que la convergence.

§ 23. — Étude au voisinage d'un point singulier 0.

Soit u harmonique au voisinage de 0, ce point exclu. On partira du développement précédent qui s'écrit

$$u(P) = \text{ fonction harmonique } v \text{ au voisinage de } 0 + \alpha \log \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(\theta)\rho^{-n}$$

(0 inclus) où maintenant la série $\sup_\theta |a_n^{(1)}|\rho^{-n}$ converge quel que soit $\rho > 0$.

Théorème. *Si $u(M)OM^s$ tend vers 0 quand M tend vers 0 ($s > 0$ fixé), ou même seulement si $\rho^s \mathcal{M}^\rho_{u^+}$ tend vers 0 ($\mathcal{M}^\rho$ désignant maintenant la moyenne sur la circonférence de centre 0 et de rayon ρ), alors $a_n^{(1)} = 0$ pour tout $n \geqslant s$. On complète en notant que la condition plus forte*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\mathcal{M}^\rho_{|u|}}{\log \frac{1}{\rho}} = 0$$

entraîne que α est nul, et que u se prolonge harmoniquement en 0.

© Spartacus-Idh 2019

En effet,

$$\mathcal{M}_u^\rho = v(\theta) + \alpha \log \frac{1}{\rho} \quad \text{donc} \quad \rho^s \mathcal{M}_u^\rho \to 0$$
$$|u| = 2u^+ - u \quad \text{donc} \quad \rho^s \mathcal{M}_u^\rho \to 0.$$

Par suite

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^s \mathcal{M}^\rho_{u.a_n^{(1)}} = 0.$$

Or

$$\mathcal{M}^\rho_{u.a_n^{(1)}} = \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[a_n^{(1)}\right]^2 \mathrm{d}\theta.$$

Donc

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{s-n} \int_0^{2\pi} \left[a_n^{(1)}\right]^2 \mathrm{d}\theta = 0.$$

On en conclut que $a_n^{(1)} = 0$ pour $n \geqslant s$.

Enfin, la dernière hypothèse entraîne la nullité de tous les a_n ; de plus $\alpha = 0$ sinon u serait un infiniment grand équivalent à $\alpha \log \frac{1}{OM}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

§ 24. — Étude à l'infini.

On part du développement à l'extérieur d'un cercle assez grand

$$u(P) = K + \alpha \log \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\theta)\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(\theta)\rho^{-n}$$

où la série $\sup_\theta |a_n(\theta)|\rho^n$ converge quel que soit ρ. Une démonstration tout à fait analogue donne

Théorème. *Si $u(P)/OP^s$ tend vers 0 quand M tend vers le point à l'infini ($s > 0$) ou même seulement si $\rho^{-s}\mathcal{M}^\rho_{u^+}$ tend vers 0 quand ρ tend vers 0, alors $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant s$. On complète en notant que si $\mathcal{M}^\rho_{|u|}/\log(1/\rho)$ tend vers 0 quand $\rho \to \infty$, u se réduit à la constante K et au deuxième $\sum$.*

Ce dernier cas est caractérisé par la propriété que u est bornée au voisinage de l'infini ; il y a alors au point à l'infini une limite et cette limite est égale à la moyenne sur toute circonférence, de centre quelconque telle que l'extérieur du cercle soit comme elle-même dans un domaine infini où u est donnée. Cela se traduit aussi en disant que par inversion (de pôle quelconque) on obtient une fonction qui se prolonge harmoniquement au pôle.

On dit que la fonction donnée, prolongée par continuité à l'infini, est harmonique au voisinage de l'infini, ce point à l'infini inclus.

https://spartacus-idh.com

Fonctions harmoniques dans le plan entier $\mathbb{R}^2$. Le développement se réduit à

$$K + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\theta)\rho^n.$$

Si $u/OP^s \to 0$ ($s > 0$) ou même si $\mathcal{M}^{\rho}_{u^+}/\rho^s \to 0$ ($\rho \to \infty$), $a_n = 0$ pour $n \geqslant s$, et la fonction est un polynôme harmonique de degré $< s$.

En particulier, si $\rho^{-1}\mathcal{M}^{\rho}_{u^+} \to 0$, u est une constante, ce qui améliore le théorème de Picard. Ajoutons qu'une fonction harmonique dans le plan pourvu du point à l'infini est constante.

IX — Extensions aux espaces euclidiens $\mathbb{R}^\tau$ (à $\tau > 2$ dimensions)

§ 25. — Définition.

On sait que dans l'espace à trois dimensions, l'aire d'une surface $z = f(x, y)$ peut se définir par $\iint \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\gamma}$ (γ troisième cosinus directeur de la normale) ; cela suffit pour obtenir une définition indépendante du choix des axes et des formules de Green. L'extension est facile à un nombre quelconque de dimensions.

En particulier cela donne sur la sphère $S(0, R)$ ou brièvement $S_R(OM = R)$ une mesure-aire, qui est invariante par rotation, propriété qui assure d'ailleurs l'unicité à un facteur près. On introduira spécialement sur la sphère unité S_1 le point courant θ et la mesure $\mathrm{d}\theta$. La mesure-aire sur S_R vaut le produit par $R^{\tau-1}$ de la mesure de l'ensemble homothétique sur S_1.

Les formules du changement de variables conduisent, pour l'intégrale de la fonction P dans la boule à $B(0, R)$ à

$$\int_{B(0,R)} f\,\mathrm{d}\omega = \int r^{\tau-1}\Big[\int_{S_1} f_{r,\theta}\,\mathrm{d}\theta\Big]\,\mathrm{d}r \qquad \text{(coordonnées sphériques } r,\ \theta\text{)} \tag{App. 21}$$

Posons $v_\tau(r) =$ volume de $B(0, R)$ et $v = v(1)$; $\alpha_\tau(r) =$ aire de S_r et $\alpha_\tau = \alpha_\tau(1)$ (on signale que v_τ vaut $\frac{\pi^{\tau/2}}{\Gamma(\tau/2+1)}$, c'est-à-dire

$$v_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}, \qquad v_{2p+1} = \frac{2(2\pi)^p}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p+1)}.$$

Alors

$$v_\tau(r) = v_\tau r^\tau, \quad \alpha_\tau(r) = \alpha_\tau r^{\tau-1}, \quad \frac{\mathrm{d}v_\tau(r)}{\mathrm{d}r} = \alpha_\tau(r), \quad \tau v_\tau = \alpha_\tau.$$

Posons

$$\mathcal{M}^r_f(M_0) = \frac{1}{\alpha_\tau}\int_{S_1} f_{r,\theta}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(coordonnées sphériques de centre } M_0\text{)}$$

$$\mathcal{A}^r_f(M_0) = \frac{1}{v_\tau(r)}\int_{B(M_0,r)} f\,\mathrm{d}\omega.$$

© Spartacus-Idh 2019

La formule (App. 21) s'écrit

$$\mathcal{A}_f^R = \frac{\tau}{R^\tau} \int_0^R \mathcal{M}_f^r r^{\tau-1}\, \mathrm{d}r. \qquad \text{(App. 22)}$$

Cela posé, on étend la définition des fonctions harmoniques avec la condition (pour f finie continue dans Ω ouvert de R^τ) que $\mathcal{M}_f^r(M_0)$ ou bien $\mathcal{A}_f^r(M_0)$ vaille $f(M_0)$ ($B(0,r)$ quelconque dans Ω) ces deux conditions étant équivalentes.

§ 26. — Examen des parties de la théorie qui diffèrent du cas plan : polynômes harmoniques, fonction harmonique fondamentale, transformation de Kelvin. Étude au voisinage d'un point singulier ou à l'infini.

Il y a adaptation immédiate de toute la théorie précédente au changement près de certains coefficients (dans le laplacien généralisé, la limitation du gradient) sauf sur les points essentiels suivants.

a. **Polynômes harmoniques** : un polynôme réduit homogène de degré n à τ variables contient un nombre de monômes ou coefficients égal à

$$K_\tau^n = \frac{\tau(\tau+1)\cdots(\tau+n-1)}{n!}$$

(nombre de combinaisons avec répétition de τ variables n à n). Le laplacien a donc K_τ^{n-2} termes et son annulation donne K_τ^{n-2} équations à $K\tau^n$ inconnues.

Comme précédemment, toutes les équations sont « principales » (parce qu'on peut résoudre en prenant des seconds membres quelconques et en choisissant égaux à 0 les coefficients des monômes du polynôme cherché où une variable fixée figure 0 ou 1 fois.)

Il y a donc $K_\tau^n - K_\tau^{n-2}$ coefficients qu'on peut choisir arbitrairement, et le même nombre de polynômes harmoniques homogènes d'ordre n linéairement indépendants. Si $\tau = 3$, ce nombre est $2n+1$.

Si on écrit un tel polynôme $\mathcal{P}_n = \rho^n Y_n(\theta)$ en coordonnées polaires, Y_n est dite fonction de Laplace.

Montrons l'orthogonalité :

$$\int_S Y_p Y_{p'}\, \mathrm{d}\theta = 0 \qquad (p \neq p').$$

D'après la formule de Green (App. 4) appliquée à $B(0,1)$, on a

$$\int_{S_1} \left(\mathcal{P}_p \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{p'}}{\mathrm{d}n} - \mathcal{P}_{p'} \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_p}{\mathrm{d}n} \right) \mathrm{d}\theta = 0.$$

Or de $\mathcal{P}_p = \rho^p Y_p$ résulte $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_p}{\mathrm{d}n} = p\rho^{p-1} Y_p$.
D'où $\int (p-p') Y_p Y_{p'}\, \mathrm{d}\theta = 0$ et la propriété cherchée.

https://spartacus-idh.com

b. **Fonction harmonique fondamentale** : si $u(r)$ est une fonction de r à dérivées secondes continues ($r \neq 0$), $u(OM)$ comme fonction de M admet un laplacien qui vaut

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\tau - 1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

En l'égalant à 0 et intégrant on trouve aussitôt les fonctions harmoniques (de $r = OM$)

$$\frac{A}{r^{\tau-2}} + B.$$

C'est $r^{2-\tau}$ qui remplace $\log \frac{1}{r}$ et sera encore noté $h(r)$.

Il n'y a dans l'extension des § 9 et 10 que des changements de coefficients numériques pour les formules (App. 5) et (App. 6). Ainsi on trouve en général ($\tau \geqslant 2$)

$$u(P) = \frac{1}{\varphi_\tau}\int_{\Omega^*_{\text{ext}}} \left(u\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n}(PM) - h(PM)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}\sigma_M \qquad (5')$$

(σ_M mesure-aire sur Ω^*), le coefficient φ_τ étant le flux de $h(OM)$ entrant dans la boule $B(0,r)$, égal à $-\alpha_\tau h'(1)$. De même pour u réelle bornée dans Ω ($\underline{B} \leqslant u \leqslant \overline{B}$), il vient à la distance δ de la frontière

$$|\operatorname{grad} u| \leqslant \frac{2\lambda}{\delta}\frac{\overline{B} - \underline{B}}{2}$$

où λ, qui valait $\frac{2}{\pi}$ pour $\tau = 2$, vaut en général $\frac{v_{\tau-1}}{v_\tau}$.

c. **Transformation de Kelvin** : une similitude conserve, comme dans le plan, $\Delta u\, \mathrm{d}s^2$, donc l'harmonicité. Mais à part les similitudes il n'y a dans $\mathbb{R}^\tau$, $\tau \geqslant 3$ comme homéomorphies continûment différentiables conformes que les inversions, et l'inversion ne conserve pas l'harmonicité en général.

Étudions sur une fonction $u(M)$ à dérivées secondes continues l'effet d'une inversion de pôle 0, de puissance 1 : $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = 1$ qui donne $v(M') = u(M)$ ($\tau \geqslant 3$). L'intégrale sur une petite sphère $S(M_0, R)$ ou S, $\int_{S_{\text{ext}}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma$ avec des notations évidentes

$$\int_{S'_{\text{ext}}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{\tau-2}\mathrm{d}\sigma, \quad \text{ou} \quad \int_{S'_{\text{ext}}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}\frac{1}{\rho'^{2\tau-4}}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$\frac{1}{\rho'^{2\tau-4}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} = \frac{1}{\rho'^{\tau-2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{v}{\rho'^{\tau-2}}\right) - \frac{v}{\rho'^{\tau-2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\frac{1}{\rho'^{\tau-2}}.$$

À cause de l'harmonicité de $\frac{1}{\rho'^{\tau-2}}$, la formule de Green analogue à (App. 4) donne

$$\int_{S_{\text{ext}}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{B'} \frac{1}{\rho'^{\tau-2}}\Delta\left(\frac{v}{\rho'^{\tau-2}}\right)\mathrm{d}\omega.$$

Divisons par le volume w_B de $B(M_0, r)$; le premier membre tend alors vers $(\Delta u)_{M_0}$ pour $r \to 0$; le second tend vers

$$\lim_{r\to 0}\frac{w_{B'}}{w_B}\left[\frac{1}{OM'^{\tau-2}}\Delta\left(\frac{v(M')}{OM'^{\tau-2}}\right)\right]_{M'_0}.$$

© Spartacus-Idh 2019

Le coefficient, rapport-limite des volumes est la valeur pour M_0, M_0' de $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^\tau$ ou $\rho'^{2\tau}$

$$(\Delta u)_{M_0} = OM_0'^{\tau+2}\left(\Delta \frac{v(M')}{OM'^{\tau-2}}\right)_{M_0'}.$$

La transformation ponctuelle par inversion accompagnée par la transformation sur les fonctions de $u(M)$ en $v(M')/OM'^{\tau-2}$ s'appelle transformation de Kelvin.

On voit qu'elle conserve l'harmonicité.

Aux généralités sur le potentiel logarithmique correspondent des généralités analogues sur le potentiel newtonien $\int \frac{\mathrm{d}\mu(P)}{MP^{\tau-2}}$ harmonique dans tout ouvert ne portant pas de masse $\mathrm{d}\mu$.

Le flux entrant dans un ouvert contenant un compact portant les masses sera $\varphi_\tau \times$masse totale, et le potentiel $V = \int h(MP)\rho(P)\,\mathrm{d}\omega(P)$ dans le cas d'une densité à gradient continu ρ admet un laplacien $\varphi_\tau\rho$ (et cela subsiste avec un laplacien généralisé et ρ seulement finie continue).

On introduit aussi le potentiel de double couche sur une surface

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{MP^{\tau-2}}\right)\mathrm{d}\mu \quad \text{où } \mathrm{d}\mu \text{ ne charge que la surface.}$$

L'analyticité de ces potentiels hors des masses se démontre de manière analogue et entraîne celle de toute fonction harmonique.

L'intégrale de Poisson s'introduit encore en utilisant les potentiels, mais si on veut l'obtenir par inversion, il faut alors se servir de la transformation de Kelvin. On aboutit à

$$I_f(P) = \frac{1}{\alpha_\tau R}\int_{S(0,R)} \frac{R^2 - OP^2}{MP^\tau} f\,\mathrm{d}\sigma(M) = \int_{S(0,R)} R^{\tau-2}\frac{R^2-OP^2}{MP^\tau} f\,\mathrm{d}\Sigma(M)$$

où $\mathrm{d}\Sigma$ est la mesure de total 1 proportionnelle à la mesure-aire de S.

L'étude ultérieure et les applications se développent de façon voisine. Les inégalités de Harnack deviennent

$$R^{\tau-2}\frac{R-OP}{(R+OP)^{\tau-1}} \leqslant \frac{u(P)}{u(0)} \leqslant R^{\tau-2}\frac{R+OP}{(R-OP)^{\tau-1}}$$

et l'inégalité du gradient

$$|\operatorname{grad} u|_0 \leqslant \frac{\tau}{R}u(0).$$

La théorie des familles et de la convergence s'étend, mais non tout à fait l'étude suivante.

***d*. Étude au voisinage d'un point singulier ou à l'infini**.

Étude similaire dans une boule. On passe à l'extérieur d'une boule par une transformation de Kelvin, et on obtient dans une intersphère (R_1, R_2) le développement

$$u(P) = K + \alpha h(P) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\theta)\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{(1)}(\theta)\rho^{2-n-\tau}$$

https://spartacus-idh.com

les séries des modules étant majorées par des séries numériques convergentes pour $\rho < R_2$ et $\rho > R_1$ respectivement.

Il y a unicité avec la seule hypothèse de convergence uniforme en θ pour chaque ρ.

Cela posé, l'étude au voisinage d'un point 0 singulier au voisinage duquel on développe, conduit aux résultats suivants par les mêmes raisonnements :

- si $\rho^s u(P) \to 0$ quand $P \to 0$ ($s > \tau - 2$) ou même seulement si $\rho^s \mathcal{M}^\rho_{u^+} \to 0$ avec ρ, $Y_n^{(1)} = 0$ pour tout n tel que $\tau - 2 + n \geqslant s$;
- si $\mathcal{M}^\rho_{|u|}/h(\rho) \to 0$ avec ρ, u se prolonge harmoniquement en 0.

Ces énoncés, ainsi présentés, contiennent le cas plan $\tau = 2$.

Étude à l'infini. Si pour $s > 0$, $\rho^{-s} u(P)$ tend vers 0 quand ρ tend vers $+\infty$ ou même seulement si $\rho^{-s} \mathcal{M}^\rho_{u^+}$ tend vers 0, alors $Y_n = 0$ pour tout $n \geqslant s > 0$.

Si u est bornée au voisinage de l'infini, son développement pour $\tau \geqslant 3$ se réduit à

$$K + \frac{\alpha}{\rho^{\tau-2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{(1)}}{\rho^{\tau-2+n}}.$$

Il y a une limite K à l'infini, mais la moyenne sur $S(0,\rho)$ est $K + \frac{\alpha}{\rho^{\tau-2}}$, et le flux entrant à travers $S(0,\rho)$ est $\alpha\varphi_\tau$. La valeur de α, donc la condition $\alpha = 0$, sont indépendantes du choix de l'origine d'après l'interprétation par le flux et la formule de Green (entre deux sphères de centres différents).

Les conditions « u borné à l'infini » et $\alpha = 0$ équivalent à dire que le développement est

$$\text{Cste} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{(1)}}{\rho^{\tau-2+n}}$$

et aussi que la fonction a une limite à l'infini, égale à sa moyenne sur toute $S(M_0,\rho)$ de centre M_0 quelconque (l'extérieur de la boule correspondante étant dans la région d'harmonicité). On dit alors que u peut se prolonger harmoniquement au voisinage de l'infini, ce point à l'infini inclus. On arrive ainsi à la notion de fonction harmonique dans un ouvert de l'espace pourvu d'un point à l'infini, et cela se prête à bien des extensions, par exemple au principe du maximum.

Quant aux fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^\tau$ tout entier, elles se développent pour toute origine selon

$$K + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \rho^n$$

et si $\lim_{\rho\to\infty} \frac{\mathcal{M}^\rho_{u^+}}{\rho^s} = 0$, alors $Y_n = 0$ dès que $n \geqslant s$, la fonction se réduisant à un polynôme.

C'est le même résultat que dans le plan, avec la même amélioration du théorème de Picard.

© Spartacus-Idh 2019

Bibliographie de l'appendice

Pour cette introduction comme pour la suite, voir, outre les vieux traités d'analyse, des ouvrages classiques anciens comme la célèbre théorie du potentiel newtonien de Poincaré et

G. C. Evans The logarithmic potential. *Am. math. Soc.*; Colloquium publ., New York, 1927.

O. D. Kellogg Foundations of potential theory. *Grundlehr. der Math. Wiss*, Berlin, Springer, 1929.

N. M. Gunther *La théorie du potentiel. Mon. de théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1934.

P. Humbert Potentiels et prépotentiels, *Cahiers scient.* n° 5, Paris, 1935.

Ch. de La Vallée Poussin *Le potentiel logarithmique*. Louvain, Librairie Univ. et Paris, Gauthier-Villars, 1949.

W. J. Sternberg et T. L. Smith *The theory of potential and spherical harmonics*. The University of Toronto Press. 1946.

E. W. Hobson *The theory of spherical and ellipsoïdal harmonics*. Cambridge Un. Press 1955.

N. Landkoff *Les principes de la théorie contemporaine du potentiel* (en russe), Moscou, 1966, avec importante bibliographie.

E. Martensen *Potentialtheorie*, Teubner, 1968 (en vue des applications techniques).

Signalons aussi un article introductif court de :

Brelot *Annales Univ. de Grenoble*, XXI, 1945.

et sur la question des singularités des fonctions harmoniques, la bibliographie très complète donnée dans :

Brelot Über die Singularitäten… *Berliner Math. Gesellsch.*, XXI, 1932.

https://spartacus-idh.com

Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel (1)

© Spartacus-Idh 2019

❊
❊ ❊

(1) *par* Marcel Brelot.

§ 1.

La théorie du potentiel qui n'était d'abord qu'un chapitre de physique mathématique, a posé depuis cent cinquante ans des problèmes mathématiques difficiles et délicats qui ont attiré les mathématiciens les plus célèbres comme Gauss, Hilbert ou Poincaré. Elle a suscité l'introduction ou les développements de méthodes et d'outils nouveaux de grande portée (méthodes variationnelles de Gauss-Dirichlet-Hilbert, distributions de Schwartz, capacité et théorie des éléments extrémaux de Choquet...). Elle s'est renouvelée par la topologie, approfondie et surtout élargie en axiomatiques diverses dont certaines s'appliquent à de vastes classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre et elle s'est soudée aux probabilités par les processus de Markov ; elle devient aussi en partie un chapitre d'analyse fonctionnelle.

Sa richesse considérable et sa diversité, sa croissance explosive depuis une douzaine d'années, ses applications, son rôle de modèle en Analyse suggèrent de faire un bilan historique que l'on va tenter ici. On le réduira à ses grandes lignes car les publications sont trop nombreuses, il est peu utile de détailler encore la période ancienne et malaisé de le faire brièvement et clairement pour les travaux récents ; cela implique un choix difficile et un peu arbitraire et l'omission d'un grand nombre de publications et d'auteurs, mais on renverra à des bibliographies partielles plus complètes [(2)].

Nous indiquerons quatre périodes avec les idées dominantes.

§ 2. — Période classique ancienne (jusque vers la première guerre mondiale).

De Gauss à Poincaré. Les grands problèmes. La théorie du potentiel n'était encore vers 1800 que des études sur l'électrostatique et l'attraction newtonienne. Mais on utilisait l'équation de Laplace étendue par Poisson (1813), qui donna par ailleurs vers 1820 sous une forme préliminaire l'intégrale qui porte son nom, pour une boule ; la fonction de Green apparut bientôt (1828), mais c'est seulement en 1840 que Gauss publia un mémoire capital [Gauss 1840], en avance d'un siècle sur les outils nécessaires et qui traitait dans $\mathbb{R}^3$ trois problèmes qui restent fondamentaux :

(2) De tels exposés ont déjà été publiés autrefois dans l'énorme *Encyclopédie allemande* [Meyer *et al.* 1915] et [Lichtenstein 1921], dans l'ouvrage célèbre de Kellogg *Foundations of potential theory* [Kellogg 1929] et comme article historique [Brelot 1952], assez détaillé pour la période de 1920 à 1950 environ, dans les *Annales de l'Institut Fourier* (1952-54).
Voir un exposé global récent mais bref, en anglais, comme introduction à une série de cours à Stresa (1969) dans le cadre du CIME [2], et, pour la partie moderne, des exposés partiels mais plus détaillés de C. Constantinescu, en allemand [Constantinescu 1966] et en anglais [Constantinescu 1969]. On consultera naturellement les volumes des Congrès et Séminaires indiqués au début de la bibliographie, contenant bien des travaux non mentionnés dans le texte, volumes auxquels on renverra souvent directement pour abréger la bibliographie par auteurs. Ainsi [3, t. 6] signifiera séminaire [3] tome 6.
Enfin on trouvera de larges bibliographies, souvent commentées, dans des ouvrages récents comme mes deux cours de Bombay, [Brelot 1960] (2e édition) et [Brelot 1971] en anglais, les ouvrages, surtout de théorie classique, de [Brelot 1964] (en français traduit en russe), [Helms 1969] et [Du Plessis 1970] en anglais, [Landkof 1966] en russe pourvu d'une abondante bibliographie russe.

https://spartacus-idh.com

• **problème de l'équilibre** (appelé souvent plus tard problème de Robin), cherchant sur un « conducteur » Σ, frontière d'un domaine borné, la distribution d'une masse donnée pour que le potentiel soit constant sur Σ ; elle correspond à un minimum de l'énergie ;

• **problème du balayage**, ainsi appelé depuis Poincaré, qui consiste à partir de masses sur ω (resp. $\complement\overline{\omega}$) à en trouver d'autres sur Σ fournissant le même potentiel sur $\complement\overline{\omega}$ (resp. sur ω). C'est la traduction du phénomène d'influence électrostatique, où des masses intérieures à un conducteur relié au sol, font apparaître sur le conducteur des masses dont le potentiel extérieur annule celui des masses intérieures ;

• **problème de Dirichlet**, ainsi appelé plus tard par Riemann, qui consiste à chercher dans ω une fonction harmonique, c'est-à-dire solution de l'équation de Laplace prenant sur la frontière les valeurs d'une fonction réelle finie continue donnée. Rappelons le fait élémentaire que l'unicité d'une solution possible vient de l'impossibilité d'un maximum ou minimum d'une fonction harmonique en un point, sauf constance au voisinage, ce qui entraîne qu'elle majore dans un ouvert borné par exemple le inf. des lim. inf. à la frontière (principe élémentaire du minimum ; de même avec le maximum et cela est fondamental, avec des variantes, en théorie générale du potentiel). Mais l'existence d'une solution est difficile à établir et discuter.

Ces études qui sont liées étroitement étaient basées dans $\mathbb{R}^3$ sur l'intégrale d'énergie $\int U^\mu \,\mathrm{d}\mu$ ou même $\int (U^\mu - 2f)\,\mathrm{d}\mu$ où U^μ désigne le potentiel $\int \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|}$ de la mesure $\mu \geqslant 0$. En fait Gauss ne considérait que les mesures ayant une densité et admettait, ce qui est inexact sans restrictions, que les intégrales atteignaient leur minimum pour un μ dont le total était imposé. Ces questions ont été adaptées plus tard dans le plan en remplaçant le potentiel newtonien précédent par le potentiel (dit logarithmique par Neumann) basé sur le noyau $\log 1/|x-y|$ (déjà introduit en fait par Laplace à propos du potentiel newtonien de cylindres homogènes parallèles).

§ 3.

L'insuffisance de rigueur par manque de notions nécessaires comme la mesure générale et l'intégrale de Radon, ce qui ne permettait pas d'introduire facilement les restrictions et précisions indispensables, fit laisser de côté pendant longtemps les problèmes traités par Gauss sauf celui de Dirichlet, problème aux limites-type, dont on donna d'abord d'autres solutions également non satisfaisantes. Ainsi dans sa célèbre dissertation inaugurale, Riemann [Riemann 1851] reprenant des idées de Gauss-W. Thomson (Lord Kelvin)-Dirichlet considérait *l'intégrale de Dirichlet* $\int \mathrm{grad}^2\, u \,\mathrm{d}x$ (mesure volume ou aire $\mathrm{d}x$) pour les u assez régulières prenant des valeurs données à la frontière ; lorsque le minimum est atteint u est harmonique et vaut la solution cherchée ; mais cela donne lieu aux mêmes objections que plus haut et elles n'ont été surmontées, dans ce cas, avec des restrictions convenables, que par Hilbert vers 1900 [Hilbert 1904], ce qui a inspiré la solution approfondie de Lebesgue [Lebesgue 1907] explicitée dans le plan. *D'autres méthodes rigoureuses, furent données entre-temps*. Citons le procédé alterné de Schwarz ([Schwarz 1890] t. 2 p. 133) permettant de passer de deux domaines se prêtant

© Spartacus-Idh 2019

à une solution (comme des boules) à leur réunion, sous certaines conditions (d'où la résolutivité pour un domaine approchant arbitrairement un domaine donné). Citons surtout la méthode basée sur l'usage des potentiels de double couche (sur la frontière supposée assez régulière), d'abord selon Neumann puis par une méthode de Fredholm [Fredholm 1900] dont est issue sa célèbre théorie (laquelle permet aussi avec une simple couche, de traiter le « problème de Neumann » où la donnée est la dérivée normale). Mentionnons les résultats de Harnack [Harnack 1887] sur les familles de fonctions harmoniques et ses célèbres inégalités ; insistons sur la solution du problème de Dirichlet par la méthode du balayage de Poincaré (1887) (voir son ouvrage [Poincaré 1899]). On se ramène par approximation à une donnée qui se prolonge selon une fonction Φ de type $\mathcal{C}^2$ avec $\Delta\Phi \geqslant 0$ au moins dans un voisinage de $\overline{\omega}$ (c'est-à-dire une fonction dite plus tard sous-harmonique). On imagine la modification d'une fonction dans ω par son remplacement dans une boule $b \subset \overline{b} \subset \omega$ par son intégrale de Poisson. On recouvre ω par une suite de boules b_i et on procède à partir de Φ aux modifications dans b_1, puis b_2, puis b_1, b_2, b_3, etc., des fonctions obtenues successivement. Cela donne à la limite une fonction harmonique qui prendra les valeurs de Φ à la frontière $\partial\omega$ moyennant des restrictions (p. ex. : la condition dite souvent de Poincaré, en fait dégagée par Zaremba, de l'existence pour tout $x \in \partial\omega$ d'un cône de révolution de sommet x et extérieur à ω). Noter que dans un voisinage de $\overline{\omega}$, Φ vaut à une fonction harmonique près un potentiel Φ_0 de masses $\leqslant 0$ (à densité $\Delta\Phi$ à un facteur près d'après la formule de Poisson). L'opération de modification dans b_1, revient à changer les masses correspondant à Φ_0 et situées, dans b_1, en d'autres masses sur ∂b_1, conservant le potentiel sur $\complement b_1$. C'est là un « balayage » déjà mentionné, et les modifications successives correspondent à de tels balayages.

Soulignons que toutes les solutions rigoureuses du problème de Dirichlet comportaient des restrictions sur la frontière ; elles paraissaient dues aux méthodes employées d'où la multiplicité des solutions, mais elles étaient en fait inévitables comme l'ont remarqué Zaremba (1910) avec un point frontière isolé et Lebesgue [Lebesgue 1912] avec un domaine dont le complémentaire présente une pointe convenable (épine de Lebesgue).

L'analyticité des fonctions harmoniques et leurs singularités, les relations de ces fonctions avec les séries trigonométriques, les fonctions de Laplace et Legendre, la correspondance conforme et la transformation de Kelvin sont d'autres questions anciennes que l'on trouve développées dans les vieux traités d'analyse, comme celui de Picard, mais qui ont été approfondies plus tard. De même pour les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique (et même un peu de type parabolique) qui donnent lieu à des problèmes analogues (voir les articles très détaillés de l'*Encyclopédie allemande* [Meyer *et al.* 1915, Lichtenstein 1921, Lichtenstein 1924]).

§ 4. — Deuxième période (à peu près l'entre-deux guerres).

Consolidation de la théorie classique par l'usage de la mesure et de la capacité. Fatou [Fatou 1906] avait illustré déjà en 1906 l'intégrale de Lebesgue pour approfondir dans le disque l'étude à la frontière de l'intégrale de Poisson

https://spartacus-idh.com

(existence de limites angulaires p. p., pour une donnée bornée intégrable de l'arc, ce qui à été beaucoup étendu plus tard).

L'intégrale de Radon (1913) allait être l'instrument-clef de théorie du potentiel, aussitôt utilisé systématiquement d'abord par G. C. Evans [Evans 1920, Evans 1927], F. Riesz, de La Vallée Poussin, pour étudier le potentiel général $\int h(|x-y|)\,\mathrm{d}\mu(y)$ à noyau h logarithmique où newtonien.

La *capacité* inspirée par l'électrostatique, précisée d'abord par Wiener (1924) [Wiener 1924a] allait compléter le rôle de la mesure. On peut dans $\mathbb{R}^3$ définir la capacité d'un compact K selon de La Vallée Poussin [La Vallée Poussin 1932] comme la borne supérieure des masses $\geqslant 0$ qu'on peut distribuer sur K (mesure sur K) de façon que le potentiel soit $\leqslant 1$. La théorie dans $\mathbb{R}^2$ donne lieu à des différences (et à une notion spéciale de capacité logarithmique) à cause de l'allure du noyau logarithmique $\log 1/|x-y|$ non toujours $\geqslant 0$ comme le noyau newtonien $1/|x-y|$ (voir plus tard [Frostman 1935] ou un ouvrage différé de La Vallée Poussin [La Vallée Poussin 1949]). Mais on peut opérer de même manière par exemple avec la fonction de Green (noyau de Green) dans une boule ou disque, ou plus généralement dans un domaine de Green ω, c'est-à-dire où existe une fonction de Green (d'ailleurs symétrique) qui est la fonction minima $G_y(x)$ (ou $G(x,y)$) valant au voisinage de y le noyau $h_y(x) = h(|x-y|)$ à une fonction harmonique près et harmonique > 0 ailleurs. On opère alors avec le « potentiel de Green » $\int G(x,y)\,\mathrm{d}y$ $(\mu \geqslant 0)$; cela est dans ω partout $+\infty$ ou fini sur un ensemble dense et dit alors vrai potentiel de Green. D'autre part est apparue la notion de « diamètre transfini » d'un ensemble fermé (Fekete-Polya-Szegö [Fekete 1923, Pólya *et al.* 1931]) à propos d'équations algébriques et Szegö montra son identité avec la capacité précédente newtonienne ou logarithmique. On a discuté plus tard d'adaptation à $\mathbb{R}^n$ et de généralisations.

Remarquer maintenant qu'on peut définir dans un domaine de Green (p. ex. $\mathbb{R}^3$) la capacité intérieure d'un ensemble quelconque (appelée capacité et seule utilisée pendant longtemps) comme sup. des capacités des compacts contenus, c'est-à-dire en procédant comme pour la mesure. On avait vite remarqué l'importance de la notion de capacité nulle (plus forte que celle de mesure de Lebesgue intérieure 0), soulignée aussi plus tard (1936) par la caractérisation selon G. C. Evans [Evans 1936] (et Selberg indépendamment) d'un compact K de capacité nulle dans $\mathbb{R}^3$ comme lieu des infinis du potentiel d'une mesure $\geqslant 0$ convenable sur K, ce qui à été plus tard étendu aux ensembles G_δ, par Deny et Choquet [Choquet 1957]. Mais l'incommodité de la notion de capacité intérieure conduisit enfin (1940) simultanément Brelot [Brelot 1940], Beurling [Beurling 1940] et Monna à introduire et utiliser la capacité extérieure, analogue à la mesure extérieure.

§ 5.

F. Riesz [Riesz 1926] en approfondissant l'étude des modules des fonctions holomorphes $f(z)$ fut conduit vers 1924 à introduire les *fonctions subharmoniques* (dites maintenant sous-harmoniques, les opposées étant appelées surharmoniques) dans des ouverts de $\mathbb{R}^2$, l'extension étant facile en fait dans

© Spartacus-Idh 2019

$\mathbb{R}^n$; elles étaient d'abord finies continues majorées dans chaque boule par la moyenne périphérique au centre, où de façon équivalente par l'intégrale de Poisson partout (un cas particulier est justement $|f(z)|$ dans $\mathbb{R}^2$) ; puis il remplaça la continuité par la semi-continuité supérieure avec la condition pour la fonction u : $u < +\infty$ et finie p. p. (ce qui équivaut à u finie sur un ensemble dense). Sans cette dernière condition la fonction est dite aujourd'hui hypoharmonique et dans tout domaine partiel peut être $-\infty$. Les opposées, dites surharmoniques, resp. hyperharmoniques, satisfont au principe-frontière du minimum.

Outre l'utilité directe et multiple de cette nouvelle notion, son importance vient de ce qu'une fonction surharmonique est caractérisée localement comme un potentiel de mesure $\geqslant 0$ à noyau $h(|x-y|)$ (newtonien où logarithmique) à une fonction harmonique près. Dans un domaine de Green où u surharmonique admet une minorante harmonique cela vaut un (vrai) potentiel de Green plus la plus grande minorante harmonique (dont la nullité caractérise la propriété que u est un potentiel). Le cas des $\mathcal{C}^2$-fonctions est facile grâce à l'équation de Poisson mais le passage au cas général est délicat, même encore dans le petit livre de T. Radó [Radó 1937] qui rassemble les connaissances d'alors sur les fonctions sous-harmoniques (voir aussi Privaloff [Privaloff 1937]). Les distributions de Schwartz ont permis plus tard d'étendre les démonstrations élémentaires, et le théorème de Choquet sur les éléments extrémaux donne aujourd'hui une démonstration qui s'applique aux axiomatiques locales ; on reviendra sur ces questions.

Cette équivalence locale ou globale m'a incité à ramener des problèmes de potentiel comme le balayage à des problèmes sur les fonctions sous où surharmoniques, que l'on pouvait résoudre par des méthodes de modification, d'extrémisation de ces fonctions : méthodes qui ont donné des résultats nouveaux (p. ex. [Brelot 1938a]) et se sont trouvées naturellement adaptables plus tard à des théories sans noyau. Dans cet ordre d'idées j'ai introduit en 1941 [Brelot 1941], pour remplacer la capacité intérieure nulle, la notion d'ensemble polaire e dans $\mathbb{R}^n$, définie par l'existence d'une fonction surharmonique u dans $\mathbb{R}^n$, valant $+\infty$ au moins sur e (ce qui a le caractère local et équivaut dans un domaine de Green $\omega \supset e$ à la même condition avec $u > 0$). Peu après Cartan [Cartan 1945] montra (ce qui paraît naturel après la caractérisation de Evans des compacts de capacité nulle) qu'il y a identité avec les ensembles de capacité extérieure nulle définie dans ω. Ce type d'ensemble jouera le rôle des ensembles de mesure nulle en théorie de l'intégration. On dit d'ailleurs quasi-partout au lieu de sauf sur un ensemble polaire.

§ 6.

Parallèlement aux travaux de F. Riesz était approfondi *le problème de Dirichlet*. Son impossibilité en général amenait Lebesgue puis Wiener [Wiener 1924a] à décomposer le problème en deux : l'un toujours résoluble pour une donnée-frontière f finie continue (p. ex. un domaine borné $\omega \subset \mathbb{R}^n$) avec une solution dite « généralisée » ; l'autre est l'étude à la frontière de cette solution. Wiener introduisit cette solution de deux manières différentes ; l'une

https://spartacus-idh.com

considère la limite de la solution classique pour un ouvert contenu approchant ω, à la frontière assez régulière et une donnée prolongeant continûment f (idée déjà utilisée par Bouligand pour définir la fonction de Green dans le cas général) ; l'autre manière plus importante [Wiener 1925] est inspirée de la résolution du problème classique donnée par O. Perron [Perron 1923] (et trouvée indépendamment par Remak) qui s'appliquait en fait sous les conditions exactement minima. Voici l'idée, généralisée plus tard à une donnée-frontière f réelle quelconque : on considère l'enveloppe inférieure (inf. en chaque point) de l'ensemble des fonctions hyperharmoniques satisfaisant en tout point frontière X à la condition

$$\liminf u \begin{cases} \geqslant f(X) \\ > -\infty. \end{cases}$$

Cette enveloppe $\overline{H}_f$ est $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique.

On introduit $\underline{H}_f = -\overline{H}_{-f}$; alors $\underline{H}_f \leqslant \overline{H}_f$. S'il y à égalité avec valeur commune finie donc harmonique notée H_f, f est dite résolutive et H_f solution (généralisée). C'est le cas où f est finie continue (résultat difficilement établi par Wiener) ; aujourd'hui cela est facile et l'on voit que $H_f(x)$, fonctionnelle linéaire croissante s'écrit $\int f \, \mathrm{d}\rho_x^\omega$ (avec mesure unitaire $\mathrm{d}\rho_x^\omega$ dite mesure harmonique), représentation qui ne fut établie que plus tard par de La Vallée Poussin [La Vallée Poussin 1932, La Vallée Poussin 1938] à l'aide du balayage de la mesure de Dirac.

Bien des méthodes conduisent à cette solution généralisée H_f (voir [Vasilesco 1937b]) mais il importe surtout d'en étudier l'allure à la frontière, ce qui fit approfondir la notion de point-frontière régulier X (Lebesgue), défini par la condition que $H_f(x) \to f(X)$ lorsque $x \in \omega$, $x \to X$, $\forall f$ finie continue sur $\partial\omega$. Si tous les points-frontière sont réguliers, le problème classique est toujours résoluble et réciproquement. On a donné bien des critères suffisants de régularité, comme la condition déjà signalée de Poincaré-Zaremba. Indiquons deux critères nécessaires et suffisants :

a. L'existence d'une « barrière de Lebesgue », amélioré par Bouligand selon l'existence d'une fonction surharmonique> 0 au voisinage de X sur ω, tendant vers 0 en X (ce critère s'étendra aux axiomatiques futures).

b. Célèbre critère de Wiener [Wiener 1924b] utilisant la capacité, trop euclidien pour de larges extensions ; par exemple dans $\mathbb{R}^3$, si δ_n est l'intersection de $C\omega$ avec le lieu $\{\rho^{n+1} \leqslant |x - X| \leqslant \rho^n\}$ et γ_n sa capacité, alors la série de terme général γ_n/ρ^n diverge où converge selon que X est régulier ou non.

Il était essentiel d'apprécier l'ensemble des points irréguliers. C'était un problème, difficile au début, résolu seulement en 1933 par G. C. Evans [Evans 1933] (après Kellogg dans $\mathbb{R}^2$). L'ensemble en question est de mesure harmonique nulle et même en fait polaire. La démonstration de Evans contenait d'ailleurs en fait le résultat important suivant dégagé à la fois par lui-même et par Vasilesco : la continuité d'un potentiel en un point du support fermé des masses ($\geqslant 0$) sur ce support entraîne la continuité en ce point dans l'espace. Voir un historique sur la régularité en 1938 dans [Vasilesco 1938].

© Spartacus-Idh 2019

§ 7.

Trois autres importantes questions furent encore traitées en 1935-1940 :

α. D'abord Frostman [Frostman 1935], inspiré souvent par M. Riesz et de De La Vallée Poussin, *rendit précis et rigoureux le fameux travail de Gauss* en affaiblissant les résultats par l'introduction d'ensembles exceptionnels de capacité (intérieure) nulle, en fait polaires. L'existence des solutions est établie grâce à la convergence faible des mesures (dite maintenant, d'après Cartan, convergence vague). L'unicité s'appuie sur deux résultats importants dans $\mathbb{R}^3$:

a. L'énergie d'une mesure $\mu = \mu_1 - \mu_2$ à support compact, qui s'écrit $\int U^\mu \, \mathrm{d}\mu$ peut se définir en remplaçant le noyau par $\inf(1/|x-y|, N)$ et faisant tendre N vers $+\infty$ ou à partir d'un développement formel comme $\int U^{\mu_1} \, \mathrm{d}\mu_1 + \int U^{\mu_2} \, \mathrm{d}\mu_2 - 2 \int U^{\mu_1} \, \mathrm{d}\mu_2$ (en notant que $\int U^{\mu_1} \, \mathrm{d}\mu_2 = \int U^{\mu_2} \, \mathrm{d}\mu_1$ si les énergies de μ_1, μ_2 sont finies). Le *principe d'énergie* dit que l'énergie est $\geqslant 0$ et nulle seulement si $\mu \equiv 0$.

b. Le second résultat appelé *principe du maximum* dit que U^μ pour $\mu \geqslant 0$ à support compact est majoré par le sup. de U^μ sur le support (ce qui dans le cas de U^μ continu équivaut au principe élémentaire du maximum des fonctions harmoniques).

Noter que Frostman traite d'abord le cas d'une frontière assez régulière. L'adaptation à $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) et à des noyaux $\varphi(r)$ généraux est facile mais avec quelque changement. La capacité est approfondie, à nouveau comparée au diamètre transfini d'ailleurs généralisé, comparée aussi à la mesure de Hausdorff et utilisée en théorie des fonctions (à ce stade de la capacité, voir un historique [Vasilesco 1937a]). Enfin Frostman [Frostman 1935] considère aussi les noyaux $r^{-\alpha}$ déjà approfondis par M. Riesz dans une étude importante en soi et pour l'avenir des théories globales du potentiel (voir la publication, différée, dans [Riesz 1939]).

β. La deuxième question concerne *la convergence des fonctions surharmoniques.* On a d'abord montré (Szpilrajn-Radó [Radó 1937]) qu'une suite décroissante bornée inférieurement converge vers une fonction qui vaut une fonction surharmonique sauf sur un ensemble e de mesure de Lebesgue nulle. Ensuite j'ai établi [Brelot 1938b] que cet ensemble e est même (localement) de capacité intérieure nulle. Peu après en 1942, Cartan montrait en utilisant l'énergie (voir les détails dans [Cartan 1945]) que la capacité même extérieure est nulle (c'est-à-dire que e est polaire) et étendait le théorème aux ordonnés filtrants décroissants. Cela devenait un théorème-clef de la théorie fine du potentiel, dont on a donné depuis des variantes plus où moins fortes et des démonstrations variées sous des hypothèses axiomatiques plus ou moins faibles (voir des cours récents comme [Brelot 1960, Brelot 1964]).

γ. La troisième question concerne le problème de Dirichlet pour une donnée quelconque f sur la frontière $\partial\omega$ d'un domaine par exemple borné. J'ai montré [Brelot 1939] que la *résolutivité équivaut à la sommabilité de* f par rapport à la mesure harmonique $\mathrm{d}\rho_x^\omega$, ce qui est indépendant de $x \in \omega$. Cela se conservera dans les axiomatiques ultérieures.

En théorie des fonctions la mesure harmonique et le problème de Dirichlet étaient utilisés depuis longtemps dans des cas plus ou moins étendus (voir

https://spartacus-idh.com

par ex. Beurling [Beurling 1933], Nevanlinna, Privaloff…). Ils allaient devenir, ainsi que toute la théorie du potentiel, un instrument général. Voir des articles de Brelot (*Soc. Royale des sciences de Liège* 1939), de Monna, Bolder, etc., vers 1940 à l'*Académie des Sciences d'Amsterdam*, et aussi Beurling [Beurling 1940], plus tard Dufresnoy (*Bull. Sc. Math.* 1945)…

§ 8.

Bien d'autres questions restent à mentionner dans cette période : singularités des fonctions harmoniques (historique dans [Brelot 1932]) et des fonctions sous-harmoniques [Brelot 1934], recherches de Bouligand [Bouligand 1926, Bouligand 1925], précurseur sur bien des points ; approfondissement des fonctions polyharmoniques ([Nicolesco 1936]) ; perfectionnement du problème de Neumann ; étude d'un problème de Dirichlet pour compact K (Keldych-Lavrentieff [Keldysh 1938, Keldych *et al.* 1937] et Brelot (mémoires repris plus tard dans [Brelot 1945b])) introduisant les points stables analogues aux points réguliers et liée à l'approximation sur K d'une fonction finie continue par une fonction harmonique sur un voisinage de K ; rôle des points irréguliers dans la résolubilité (Keldych [Keldysh 1938], Landkoff) ; extension de questions comme le problème de Dirichlet généralisé à des équations du second ordre de type elliptique ; et des questions qui se rattachent déjà à l'esprit de la période suivante : introduction d'espaces de Hilbert par O. Nikodym [Nikodym 1933] au sujet du principe de Dirichlet, approfondi par Zaremba [Zaremba 1927] ; introduction de frontières plus raffinées que la frontière euclidienne pour le problème de Dirichlet (frontière « ramifiée » [Brelot 1946b] initiée par Perkins [Perkins 1935] et de La Vallée Poussin [La Vallée Poussin 1937]).

© Spartacus-Idh 2019

§ 9. — Troisième période (prémoderne : environ 1940-1955). *Renouvellement par la topologie.*

Sans énumérer les multiples perfectionnements ou applications de la théorie antérieure (nombreux articles depuis trente ans de M. Arsove (dont un ouvrage de théorie classique est à l'impression), de Beckenbach, Dinghas, Hayman, Weinstein, Huber, Reade, Hardy-Rogosinki, Landkoff… Voir par exemple [Arsove 1953, Weinstein 1953, Huber 1955, Landkof 1949] et en France des articles également disparates de Deny [Deny 1949], Choquet-Deny [Choquet *et al.* 1944], Deny-Lelong [Deny *et al.* 1947], Brelot-Choquet [Brelot *et al.* 1954] etc.) signalons des inégalités et estimations numériques ingénieuses sur la capacité et l'intégrale de Dirichlet dans un ouvrage de Polya-Szegö [Pólya *et al.* 1931], mais détaillons surtout des idées nouvelles et importantes :

a. *L'énergie*, déjà fort utilisée, fut rénovée par H. Cartan [Cartan 1941, Cartan 1945, Cartan 1946] (qui s'en servit d'ailleurs pour obtenir la forme définitive du théorème de convergence des fonctions surharmoniques). Explicitant le cas de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) ou d'un disque dans $\mathbb{R}^2$, il introduit la norme-énergie, un produit scalaire de deux mesures $\int U^\mu \, d\nu$ convenablement précisé et montre

que dans *l'espace préhilbertien* correspondant $\mathcal{E}$ des mesures dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\mathcal{E}^+$ des mesures $\geqslant 0$ est complet. D'où les notions de convergence forte ou faible. Le balayage classique pour un compact est interprété comme une projection dans l'espace préhilbertien. Mais $\mathcal{E}$ n'est pas complet. Il le devient dans la théorie de Deny dans $\mathbb{R}^n$ [Deny 1950], théorie de l'énergie où le noyau est une distribution de Schwartz N, la mesure remplacée par une distribution variable T, le potentiel remplacé par la convolution. L'énergie est $\int \mathcal{N}|\mathcal{T}|^2 \, \mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}x$ mesure de Lebesgue, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{T}$ fonctions transformées de Fourier de N et T sous des conditions convenables). Cela interprète et généralise les potentiels de double couche du magnétisme et est lié à l'étude des fonction BL et BLD (Beppo-Levi-Deny) qui prolongent les $\mathcal{C}^1$-fonctions d'intégrale de Dirichlet finie.

b. Bien des raisonnements de Frostman pouvaient visiblement s'étendre à des espaces topologiques et des noyaux-fonctions plus généraux. D'où des développements de ce type en France, tentatives non publiées puis travaux importants de H. Cartan [Cartan 1941] déjà en 1941, sur un groupe topologique avec composition de mesures, énergie, principe du maximum, et plus tard dans [Cartan *et al.* 1950], enfin une étude sans énergie ([Deny 1952]), et d'autre part au Japon par extensions successives du cas euclidien (Kametani, Kunugui ([Kunugui 1950] avec bibliographie) Ninomya…). À des hypothèses très larges on peut ajouter comme axiomes, la validité de principes plus ou moins forts inspirés de la théorie classique de façon à en imiter les démonstrations. La multiplicité des principes et leur comparaison, la dissymétrie des noyaux possibles conduisirent à beaucoup de développements qui se poursuivent encore aujourd'hui.

c. L'introduction en théorie classique dans $\mathbb{R}^n$ des *ensembles effilés e* en un point x (voir [Brelot 1940]) définis par l'existence d'une fonction surharmonique u au voisinage de x, telle que $\liminf_{y \in e \setminus x} u(y) > u(x)$ (condition vérifiée plus ou moins conventionnellement si $x \notin \bar{e}$) fut inspirée par des critères d'irrégularité et d'instabilité et permet d'améliorer des propriétés topologiques de Bouligand sur les points-frontière irréguliers ; cela conduisit aussitôt H. Cartan à introduire la *topologie fine* qui est la moins fine dans $\mathbb{R}^n$ rendant continues les fonctions surharmoniques locales (car les voisinages fins de x sont les complémentaires des ensembles e effilés en $x \notin e$. Alors les points d'un ensemble où il est effilé (points finement isolés) forment un ensemble polaire (résultat-clef, [Brelot 1944b, Brelot 1945a]) ; en particulier les ensembles effilés en tout point (ou en chacun de leurs points) sont les ensembles polaires ; les points irréguliers ou instables (pour ω ouvert ou K compact) sont caractérisés par l'effilement de $C\omega$ ou CK (d'où la polarité retrouvée de l'ensemble des points-frontière irréguliers) et le critère d'irrégularité de Wiener s'étend selon un critère d'effilement [Brelot 1940, Brelot 1944b]. Les nouvelles notions fournissent ou précisent des résultats sur l'allure des fonctions surharmoniques, harmoniques ou méromorphes d'autant mieux que la limite fine en un point x_0 d'une fonction équivaut à la limite euclidienne hors d'un ensemble effilé (convenable) en x_0 (Cartan), ce qui conduit à mieux étudier topologiquement l'effilement. Ainsi, δ étant un voisinage ouvert d'un point-frontière irrégulier x_0 d'un ouvert ω, une fonction surharmonique sur $\omega \cap \delta$, bornée inférieurement admet une limite fine en x_0 ; de même pour

https://spartacus-idh.com

$v/h(|x - x_0|)$ où h est le noyau newtonien ou logarithmique.

Ces notions sont précieuses aussi pour traiter mieux ou autrement, avec la topologie fine, de vieilles questions comme le principe de minimum et le problème de Dirichlet, ou surtout la *théorie du balayage* dont voici une forme définitive dans un domaine de Green ω de $\mathbb{R}^n$ [Brelot 1945a] ; dans ce mémoire on reprend et on utilise systématiquement (grâce au théorème-clef de convergence (voir plus haut § 7, **β**.) la notion d'extrémisation et d'extrémale d'une fonction surharmonique $u \geqslant 0$ dans ω, relative maintenant à un ensemble *quelconque* ; c'est la plus petite fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorant u quasi-partout sur son complémentaire e ; on dit maintenant balayée relative à e. Elle vaut la régularisée par semi-continuité inférieure notée $\hat{R}_u^e$ de la fonction dite maintenant *réduite* R_u^e, inf. des v surharmoniques $\geqslant 0$ majorant u sur e (cette propriété de la balayée est devenue la définition dans les axiomatiques actuelles).

Partons du potentiel u de $\mu \geqslant 0$, à noyau de Green dans ω. $\hat{R}_u^e$ est alors un potentiel caractérisé par sa valeur égale à u quasi-partout sur e et la condition que la mesure associée soit portée par la *base* de e, lieu des points où e est non effilé (adhérence fine à un ensemble polaire près).

Sans utiliser le théorème de convergence, Cartan retrouva autrement ce résultat [Cartan 1946] en traitant d'abord les potentiels d'énergie finie.

d. Une définition de *l'harmonicité et surharmonicité au voisinage du point à l'infini* $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ permet l'adaptation systématique de la théorie classique à des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}^n$ (compactifié d'Alexandroff) [Brelot 1944a] [(3)]) et à des *espaces-*$\mathcal{E}$ [Brelot *et al.* 1951] séparés, localement homéomorphes à un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}^n$ avec changement de carte isométrique, ou aussi pour $n = 2$, conforme. Cela contient les surfaces de Riemann classiques ; s'il y a une fonction de Green, c'est un *espace de Green* qui se traite en gros comme $\mathbb{R}^3$ (y compris pour le balayage). Mais noter que le point à l'infini de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) n'est pas polaire, donc aussi les points d'un espace-$\mathcal{E}$ dits à l'infini parce que leur image locale est en $\mathcal{A}$. Alors un ensemble e est dit effilé en $x_0 \in e$, si $e \setminus \{x_0\}$ est effilé (même définition) et $\{x_0\}$ polaire.

§ 10.

e. La recherche d'une *représentation intégrale* des fonctions harmoniques > 0 comme celle de Poisson-Stieltjes $\int R^{n-2} \frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^n} \, d\mu(x)$ ($\mu \geqslant 0$ sur la frontière) dans la boule de $\mathbb{R}^n$, conduisit *R. S. Martin* [Martin 1941] en 1941, après quelques tentatives en topologie euclidienne, à introduire *d'importantes notions topologiques nouvelles.*

Considérons un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ pourvu d'une fonction de Green G (ou même un espace de Green) et normalisons selon $K(x, y) = \frac{G(x,y)}{G(x,y_0)}$ (y_0 fixé $\in \Omega$). Alors il existe un espace compact $\widehat{\Omega}$ (unique à un homéomorphisme près) où Ω est dense, tel que les fonctions $x \to K(x, y)$ soient prolongeables continûment dans $\widehat{\Omega}$ et séparent la frontière $\widehat{\Omega} - \Omega = \Delta$ (*espace et frontière de*

(3) Ce qui, en particulier, contient les problèmes de Dirichlet dits « intérieur » et « extérieur ».

© Spartacus-Idh 2019

Martin). C'est une généralisation naturelle de la frontière des bouts premiers de Carathéodory pour les domaines plans applicables conformément sur un disque (un essai de généralisation géométrique dans $\mathbb{R}^3$ n'avait rien donné d'utile). $\widehat{\Omega}$ n'est pas en général comparable à l'adhérence euclidienne mais lui est identique dans les cas simples, comme la boule ou le demi-espace.

On désigne par Δ_1, la partie de Δ, ensemble des points X tels que la fonction correspondante $K(X, y)$ soit minimale c'est-à-dire telle que toute fonction harmonique $\geqslant 0$ minorante lui soit proportionnelle. Alors toute fonction harmonique $\geqslant 0$ admet une représentation unique $u(y) = \int K(x, y)\, \mathrm{d}\mu_u(x)$ où μ_u est une mesure $\geqslant 0$ sur Δ, portée par Δ_1.

Si l'on considère dans l'espace des fonctions finies continues sur Ω ou seulement des différences de fonctions harmoniques $\geqslant 0$, pourvu de la topologie de la convergence uniforme locale, le cône H^+ des fonctions harmoniques $\geqslant 0$, la condition $u(y_0) = 1$ (y_0 fixe) détermine une base compacte métrisable dont les éléments extrémaux sont les fonctions minimales égales à 1 en y_0. Cela conduisit plus tard Choquet en 1956 à sa fameuse théorie des éléments extrémaux avec représentation barycentrique [Choquet 1956, Choquet 1962] et [3, t. 5] dont une illustration brillante est justement la représentation de Martin, de technique originale difficile.

f. *Cette frontière $\mathcal{A}$ permet un problème de Dirichlet* analogue à celui de la frontière euclidienne [Brelot 1956]. Mais on peut traiter aussi ce problème avec d'autres compactifications [Brelot 1956] et le comparer avec le précédent ([Naïm 1957]) qui apparaît comme privilégié et auquel on peut se ramener. On peut d'ailleurs au lieu des fonctions harmoniques et surharmoniques considérer et traiter de même leurs quotients par une fonction harmonique positive fixe (*relativisation* du problème [Brelot 1956] qu'on retrouvera en axiomatique ultérieure). Mais l'allure à la frontière demande des notions nouvelles introduites plus tard et sur lesquelles on reviendra. Δ a d'autres avantages, comme de déterminer à un facteur près les fonctions harmoniques > 0 associées à 0 au voisinage de tout $Y \in \Delta$ (c'est-à-dire s'y annulant au sens d'un problème de Dirichlet) sauf pour $X \in \Delta$; c'est alors K_X [Brelot 1947]. C'est le *principe des « singularités positives »* que Bouligand avait beaucoup étudié en frontière euclidienne sans pouvoir trouver un énoncé général (voir [Denny 1947]).

g. On a aussi considéré des *frontières non nécessairement compactes*, obtenues par complétion d'une métrique compatible avec la topologie, et même des conditions-frontière définies par un *système de filtres* [Brelot 1946b, Brelot *et al.* 1951] ; un exemple est donné par des familles de lignes comme les lignes de Green [Brelot *et al.* 1951] (tangentes au gradient de $G_{y_0}(x)$) et les limites selon ces lignes (voir des extensions par Ohtsuka dans son ouvrage ultérieur [Ohtsuka 1963]). Il s'y rattache une étude du principe de Dirichlet, autrement que selon Nikodym ou Deny [Brelot 1953].

h. Les applications à la *théorie des fonctions*, aux *surfaces de Riemann et à leur classification* commencent à devenir systématiques. Voir [Parreau 1951], avec une importante bibliographie. Les fonctions plurisousharmoniques de P. Lelong [Lelong 1945] sont devenues un instrument très important dans le domaine des fonctions de plusieurs variables complexes.

https://spartacus-idh.com

i. Enfin signalons vers 1953 un effort axiomatique de Choquet [Choquet 1954] pour approfondir et généraliser la notion de *capacité* devenant ainsi un outil fondamental en Analyse, précédant la mesure. On en a même séparé une notion plus large qu'on peut, sans chercher le maximum de généralité et dans un cadre encore un peu topologique, présenter comme une fonction réelle d'ensemble $C(e)$ dans un espace séparé, croissante et admettant le passage à la limite pour des suites croissantes et aussi pour des *suites décroissantes de compacts*. Pour cette « capacité généralisée », un ensemble est dit C-capacitable si $C(e) = \sup C(K)$ pour les compacts K contenus dans e. La théorie donne des conditions de capacitabilité ; ainsi, dans le cas classique rappelé plus haut où la capacité extérieure est une capacité généralisée précédente, il y a identité des capacités extérieure et intérieure pour les ensembles boréliens et même analytiques, précieuse propriété.

§ 11. — Quatrième période (période moderne : environ 1955-1970) *Topologies et axiomatiques privilégiées. Aspects probabilistes.*

La complexité du sujet va nous obliger à une plus grande brièveté, à des aperçus encore plus sommaires et plus incomplets. Mentionnons évidemment les nombreux travaux et ouvrages sur les équations aux dérivées partielles (voir p. ex. [Miranda 1955]) et les résolutions *numériques* modernes pour ces équations. En fait elles s'inspirent de vieux travaux sur l'équation de Laplace et le problème de Dirichlet, utilisant une approximation par des fonctions définies sur des réseaux (Le Roux (1914), Philipps et Wiener [Phillips *et al.* 1923], Bouligand, M^me^ Lelong [Lelong-Ferrand 1955]). Cela fournit des théorèmes d'existence et conduit à des calculs approchés. Voir l'ouvrage moderne de Temam [Temam 1970].

Puis indiquons, sans détails, en partie dans l'esprit topologique, quelques prolongements *importants de certaines idées précédentes* : étude dans les espaces d'abord euclidiens des fonctions multiplement ou pluri-harmoniques ou surharmoniques (Avanissian [Avanissian 1960], Lelong [Lelong 1963], Bremermann, Noverraz, Hervé [Hervé 1971], Cœuré…), limites angulaires des fonctions harmoniques (Calderon [Calderon 1950], Stein et Weiss [Stein *et al.* 1960], Doob, et même, sous restriction, surharmoniques (Arsove-Huber)), raffinements classiques ou abstraits sur la capacité ou l'effilement ou la topologie fine (Choquet [3, surtout t. 3], [Choquet 1957, Choquet 1959], Deny, Sion, Brelot, Getoor, Fuglede [Fuglede 1971, Fuglede 1970], voir [Brelot 1971]) ; théorie semi-classique où les ensembles de mesure de Lebesgue nulle remplacent les polaires (avec ou sans probabilités (voir Kac et Ciesielski [Kac 1970, Ciesielski 1965])) ; *examen général d'ensembles exceptionnels* (Carleson [Carleson 1967], Doob [Doob 1966]) ; relations avec l'analyse harmonique, la théorie ergodique et même la théorie des jeux [1] ; l'étude des potentiels besséliens [Aronszajn *et al.* 1961, 1]… *Détaillons plutôt*.

a. L'étude axiomatique en *espace topologique des noyaux-fonctions et noyaux-mesures* a été continuée par Choquet et Deny [3, t. 1] et divers Japonais (Ninomya [3, t. 3], [Ninomiya 1957], Ohtsuka, Kishi [Kishi 1963] et [3, t. 11] avec bibliographie). Mentionnons l'étude des modèles finis [Choquet *et al.* 1956],

© Spartacus-Idh 2019

les relations entre les principes augmentés de variantes (aperçu général [Ohtsuka 1961]), la recherche de noyaux y satisfaisant, les aspects linéaires de la théorie du potentiel (Choquet et Deny, *C.R.Ac.Sc.* 1956). Soulignons en espace localement compact l'étude détaillée des noyaux-fonctions symétriques par Fuglede [Fuglede 1960] ; Durier [Durier 1969] après son exposé [3, t. 9] des travaux de Kishi sur les noyaux dissymétriques, qui n'utilisent pas de méthodes variationnelles mais un théorème de point fixe, les améliore et montre des relations avec d'autres théories comme celle des espaces de Dirichlet dont on parlera plus loin.

Dans tout cela les *potentiels continus* jouent souvent un rôle privilégié : ils servent de base dans les recherches et exposés de G. Anger [Anger 1966] et ses élèves, qui transposent aussi des méthodes de la théorie du potentiel aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

b. La recherche et étude des *frontières* se sont prolongées et systématisées (voir l'ouvrage de Constantinescu-Cornea [Constantinescu *et al.* 1963a]). Citons la frontière de Kuramochi où convergent « presque toutes » les lignes de Green, commode pour l'étude des fonctions BLD (voir de nombreux articles au Japon de l'Académie de Tokyo, de l'*Osaka Math. Journal*, etc., et le fasc. 58 des *Lecture Notes* consacré à ce sujet) et aussi la frontière générale de Choquet ainsi appelée par Bishop-de Leuw (voir Bauer [Bauer 1961]) qui raffine celle de Šilov, généralise l'étude des éléments extrémaux et a beaucoup de relations et d'applications (voir p. ex. [Brelot 1971, Effros *et al.* 1970]).

§ 12.

Mais la nouveauté topologique qui paraît la plus importante par ses applications et qui pourrait faire disparaître l'emploi de la topologie Martin qu'elle raffine, est d'abord pour les espaces de Green, un prolongement de *la topologie fine antérieure*.

L'*effilement* (dit maintenant *minimal*) de $e \subset \Omega$ en $X \in \Delta$, d'abord considéré en fait dans le demi-espace en 1949 par Ahlfors-Heins [Ahlfors *et al.* 1949] et par M^me^ Lelong [Lelong-Ferrand 1949] est défini en général par la condition $R^e_{K_X} \neq K_X$ c'est-à-dire qu'il existe une fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorant K_X sur e mais non partout, ou qu'il existe un potentiel de Green majorant K_X sur e, ce qui équivaut à la définition originale et notion-clef de L. Naïm [Naïm 1957].

Δ_1 peut être introduite, sans parler de Δ, comme ensemble des fonctions minimales égales à 1 en y_0. On montre qu'il existe sur $\Omega \cup \Delta_1$, une topologie unique induisant la topologie fine sur Ω et donnant comme intersections avec Ω des voisinages de tout $X \in \Delta_1$, les complémentaires des effilés en X. On l'appelle *topologie fine minimale*. Elle est (sur $\Omega \cup \Delta_1$) plus fine (et plus utile) que la topologie Martin. Voir une présentation abstraite générale dans [Gowrisankaran 1963, Brelot 1971]. Dans le cas classique précédent, on peut considérer sur Δ_1 des points irréguliers pour le problème de Dirichlet-Martin, puis « finement irréguliers » en un sens plus faible évident, ce qui permet de voir que leur ensemble est de mesure harmonique nulle. Et cela s'étend aux notions obtenues par relativisation avec une fonction harmonique $h > 0$ [Naïm 1957].

https://spartacus-idh.com

D'autre part v/G_{y_0}, v/K_X ont en tout $X \in \Delta$ (v surharmonique > 0) une limite fine [Naïm 1957]. Et même v/h admet une limite fine finie $d\mu_h$ p.p. (*résultat fondamental* de Doob [Doob 1959]) cela s'étend aux fonctions BLD pour $h = 1$ et s'adapte pour tout h. Pour une fonction harmonique > 0 (mais non surharmonique quelconque) dans un demi-espace ou une boule Ω (dont $\widehat{\Omega}$ est identifiable à l'adhérence euclidienne) la limite fine entraîne la limite dite non tangentielle ou angulaire [Brelot *et al.* 1963], ce qui implique les résultats classiques du type Fatou. Tout ceci conduit à *comparer les deux types d'effilement* [Brelot 1965a, Brelot 1971, 1], aussi pour les extensions ultérieures.

II y a naturellement des *applications à la théorie des fonctions*, comme un perfectionnement du théorème de Plessner et la correspondance de deux surfaces de Riemann (voir des développements de Doob [Doob 1961, Doob 1965] et Constantinescu-Cornea (voir surtout leur important livre [Constantinescu 1969])) qui complètent le gros ouvrage de Tsuji [Tsuji 1959] sur les applications plus anciennes de la théorie du potentiel aux fonctions méromorphes. Pour les détails et applications de la topologie fine, d'ailleurs aussi dans la théorie ultérieure, voir [Brelot 1965b, Brelot 1966b, Brelot 1971].

© Spartacus-Idh 2019

§ 13.

Arrivons *à ce qui caractérise le plus fortement l'époque moderne*. Ce sont des axiomatisations nouvelles poussées et parallèles de divers aspects locaux et globaux du potentiel (harmonicité, énergie), la théorie des noyaux-mesures de G. Hunt qui contient en fait les parties les plus intéressantes des axiomatiques précédentes, les interprétations probabilistes grâce aux processus de Markov, ce qui conduit même à une théorie probabiliste indépendante du potentiel, enfin une discussion approfondie des relations possibles, des analogies, des structures et principes communs à ces théories d'où le problème inverse de bâtir une théorie d'allure potentielle à partir de cônes de fonctions de type très général.

§ 14.

Après des tentatives de Tautz [Tautz 1949, Tautz 1952] et Kamke, Doob qui avait déjà, après quelques précurseurs (P. Lévy, Kakutani…) introduit les connexions avec les probabilités, en comparant dans $\mathbb{R}^2$ les fonctions sousharmoniques et les semi-martingales (dites maintenant sous-martingales) [Doob 1954], y revient dans des conditions différentes et générales dans un mémoire très important [Doob 1955] suivi de [Doob 1954-55] et où il pose au début *les bases d'une axiomatique* des fonctions harmoniques, en transposant et généralisant l'idée que, dans le mouvement brownien, la probabilité du mouvement à chaque instant est la même dans toutes les directions.

En modifiant le langage et les axiomes de base en vue d'une adaptation systématique de la théorie classique, j'ai été amené en 1957-58 à la théorie suivante [Brelot 1958, Brelot 1960] : dans un espace connexe, localement

connexe, localement compact, non compact Ω, on donne sur chaque ouvert un espace vectoriel de fonctions réelles finies continues dites harmoniques satisfaisant aux axiomes suivants (de caractère local) :

1. (Axiome de *faisceau*) ; elles définissent un faisceau, c'est-à-dire que toute fonction harmonique dans un ouvert ω est harmonique dans tout ouvert partiel et toute fonction localement harmonique dans ω est harmonique dans ω.

2. (Axiome de résolubilité locale du problème de Dirichlet). On appelle régulier tout ouvert relativement compact ω pour lequel toute fonction finie continue réelle f sur $\partial\omega$ se prolonge continûment dans ω de façon unique selon une fonction harmonique, $\geqslant 0$ si $f \geqslant 0$. Ce prolongement $H_f(x)$ est de la forme $\int f(y)\, \mathrm{d}\rho_x^\omega$ ($\mathrm{d}\rho_x^\omega$ sur $\partial\omega$, dite mesure harmonique).

L'axiome **2** exprime l'existence d'une *base d'ouverts réguliers* (ou de façon équivalente, de domaines réguliers).

3. (Axiome de *convergence*.) Toute suite croissante u_n de fonctions harmoniques dans un domaine a une limite $+\infty$ ou harmonique (énoncé équivalent avec un ordonné filtrant croissant d'après Constantinescu Cornea). Cela entraîne **a**) une fonction harmonique $u \geqslant 0$ dans un domaine ω est partout 0 ou partout > 0. (On le voit en considérant la suite $n.u$). **b**) Les fonctions harmoniques > 0 dans ω, égales à 1 en $y_0 \in \omega$ sont également continues en tout point (résultat difficile de Mokobodzki (voir [Brelot 1966a]) mais avec l'hypothèse d'une base dénombrable, hypothèse supprimée plus tard par P. Loeb-B. Walsh [Loeb *et al.* 1965]). Noter que **a**)+**b**) équivaut à l'axiome **3** (vu son importance on l'avait introduit comme axiome **3'** impliquant **3**).

Principe du minimum. Si dans un ouvert ω existe une fonction harmonique $h > \varepsilon > 0$, alors pour toute fonction harmonique u sur ω, la condition $\liminf u > 0$ à la frontière implique $u \geqslant 0$. Lorsque les constantes sont harmoniques, on a donc pour toute fonction harmonique u,

$$\inf_{\omega} u = \inf_{\partial\omega} \Big(\liminf_{\text{à la frontière}} u \Big)$$

(forme banale du principe). Noter que les quotients par une fonction finie continue $h > 0$ fixe, définissent un autre faisceau satisfaisant aux axiomes (faisceau des fonctions h-harmoniques). Si h est harmonique, les constantes sont h-harmoniques.

Les fonctions hyperharmoniques u dans ω ouvert se définissent comme *s.c.i.* $> -\infty$ majorant sur tout ω' régulier ($\overline{\omega}' \subset \omega$) $\int u\, \mathrm{d}\rho_x^\omega$; elles satisfont au principe de minimum comme les harmoniques ; dans un domaine u vaut $-\infty$ ou est finie sur un ensemble dense (et alors dite surharmonique). Lorsque u surharmonique admet des minorantes harmoniques qui sont toutes $\leqslant 0$, u est dit un *potentiel* (qui est le potentiel de Green d'une mesure $\geqslant 0$ dans un domaine classique de Green). Un outil commode est la notion de fonction à peu près hyperharmonique, déduite de la précédente en remplaçant s.c.i. et $> -\infty$ « localement bornée inférieurement » et l'intégrale par une intégrale $\overline{\int}$. Cela remplace dans le cas classique une vieille notion de fonction presque sousharmonique. Un ensemble e dans ω ouvert y est dit maintenant polaire s'il existe u surharmonique > 0 valant $+\infty$ au moins sur e. Si un ensemble

https://spartacus-idh.com

e_0 est localement polaire dans ω, il est polaire dans ω s'il existe un potentiel > 0 dans ω ; sinon, mais s'il y a dans ω une fonction harmonique > 0, il existe une fonction surharmonique dans ω valant $+\infty$ sur e_0 (Anandam [Anandam 1972]), ce qui dans la définition originale du cas classique était encore désigné par « polaire » ; le terme « localement polaire » correspondant à la notion la plus utile évite tout désaccord.

Noter que Doob supposait la métrisabilité de Ω, les constantes harmoniques et un axiome de convergence plus faible (limite harmonique si elle est finie sur un ensemble dense) complété par une condition permettant d'obtenir une forme de principe élémentaire de minimum indispensable. Pour des suites x_n, où x_{n+1} est choisi sur la frontière d'un domaine régulier $\omega_n \ni x_n$ avec une probabilité égale à la mesure harmonique dans ω_n, il y a un « processus de Markov » (extension du mouvement brownien) dont $\{x_n\}$ est trajectoire, et la « probabilité de transition » celle qui précède. Alors, sous certaines conditions générales, toute fonction surharmonique > 0 a une limite sur « presque toutes » les trajectoires. C'était le but essentiel de Doob dont la théorie par ailleurs est peu poussée et se développe moins bien que dans celle qui a suivi en théorie pure du potentiel et que j'esquisse maintenant.

L'existence dans Ω d'un potentiel > 0 (qui a lieu dès qu'existent deux fonctions harmoniques > 0 non proportionnelles) et souvent d'une base dénombrable permettent l'extension d'une grande partie de la théorie classique :

- Propriétés de treillis (qui ne demandent pas de dénombrabilité) selon l'ordre spécifique défini par $u \prec v$ signifiant $v = u + f$ et f surharmonique $\geqslant 0$.
- Problème de Dirichlet avec théorème de résolubilité.
- Topologie de l'espace des différences de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ permettant une base compacte métrisable du cône S^+ des fonctions $\geqslant 0$ (ce qui est difficile sans axiome supplémentaire et alors dû a M^me^ Hervé [Hervé 1962]), d'où par la théorie des éléments extrémaux, une *représentation intégrale* qui dans le cas classique donne celle de Riesz-Martin.
- Grâce à l'hypothèse de *proportionnalité P* des potentiels de support ponctuel $\{x\}$ (c'est-à-dire harmoniques hors $\{x\}$), définition d'un espace et d'une frontière de Martin avec problème de Dirichlet correspondant et forme étendue de la représentation de Martin-Riesz.
- Introduction de la topologie fine et du balayage avec des développements ultérieurs utilisant ou non les axiomes supplémentaires qui suivent (M^me^ Hervé [Hervé 1962] (balayage), Brelot [Brelot 1967] (capacité des ensembles décroissants), Constantinescu-Cornea [Constantinescu 1967, Constantinescu 1969, Constantinescu *et al.* 1963a, Constantinescu *et al.* 1963b], Fuglede [Fuglede 1971, Fuglede 1970] et Berg (usage et propriétés importantes de la topologie fine).
- Un axiome nouveau D de « *domination* » (impliquant le principe du maximum du type Frostman) entraîne l'extension du grand théorème de convergence des fonctions surharmoniques (et lui est même équivalent avec P), ce qui permet l'extension de la partie la plus fine du potentiel classique. Tout cela s'applique dans $\mathbb{R}^n$ aux équations linéaires

© Spartacus-Idh 2019

aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique à coefficients lipschitziens (voir Mme Hervé [Hervé 1962] et l'ouvrage [Boboc *et al.* 1968]) puis même en un certain sens au cas des coefficients discontinus [Hervé 1964, Hervé *et al.* 1969] dont la théorie directe est difficile comme on le voit dans Stampacchia [Stampacchia 1966].

- Les équations adjointes se trouvent axiomatisées dans la théorie du *faisceau adjoint* de Mme Hervé (avec P et un axiome supplémentaire, mais sans D).

Bien d'autres compléments furent donnés. Outre tous ceux déjà cités de Mme Hervé et autres, citons : Boboc-Constantinescu-Cornea (nombreux perfectionnements) [Boboc *et al.* 1965, Constantinescu *et al.* 1965, ...], Lobe [Loeb 1966], Loeb-B.Walsh (classification de faisceaux, frontières compactes diverses), K. Gowrisankaran (extension du théorème de Doob sur la limite fine minimale [Gowrisankaran 1963, Gowrisankaran 1966], le problème de Dirichlet et les pôles des fonctions minimales pour une frontière compacte [3, t. 11], les fonctions multiplement surharmoniques) ; Constantinescu-Cornea [Constantinescu *et al.* 1965] et D. Sibony [Sibony 1968a] (correspondance de deux espaces « harmoniques » c'est-à-dire pourvus d'axiomatiques), Mokobodzki [1], [3, t. 11] (topologie sur S^+ et points de proportionnalité), La Pradelle [La Pradelle 1967] (quasi-analyticité), J. Taylor [Taylor 1970] (correspondance des faisceaux et de la frontière de Martin), E. Smyrnelis (allure au voisinage d'un point-frontière irrégulier), Lumer-Naïm [Lumer-Naïm 1967] (espaces $\mathcal{H}^p$ de fonctions harmoniques et extension des fonctions fortement sousharmoniques de Garding-Hörmander), notion de flux (Nakai, voir [Rodin *et al.* 1968]), Anandam [Anandam 1972] (espaces harmoniques sans potentiel positif) etc. Soulignons le rôle de la nucléarité (Loeb-B.Walsh [Lichtenstein 1921], Hinrichsen [Hinrichsen 1967]), de la cohomologie, dualité, flux, perturbation de structures, même dans des axiomatiques plus faibles (B. Walsh [Walsh 1969, Walsh 1970]).

Voir un aperçu général de cette axiomatique avec beaucoup de compléments dans [Brelot 1966a] pourvu de bibliographie.

§ 15.

Mais la théorie ne s'applique pas, contrairement à celle de Doob, à l'équation de la chaleur. *Alors H. Bauer* [Bauer 1962, Bauer 1963, Bauer 1965] *élargit la théorie précédente* pour traiter en même temps une large classe d'équations paraboliques. Pour définir un « espace harmonique » (espace topologique pourvu d'un faisceau) il remplace essentiellement l'axiome **3** par *l'axiome de convergence K_D plus faible de Doob* (ou même un autre, K_1, encore plus faible où les fonctions sont uniformément majorées) et par un axiome de séparation qui assure un principe de minimum. Avec une base dénombrable et l'existence pour chaque x d'un potentiel > 0 en x (les fonctions hyperharmoniques et les potentiels se définissent comme plus haut), ce qui donne un espace « fortement harmonique », il peut alors étendre en gros toute la partie de la théorie précédente indépendante de P et D (D n'est d'ailleurs pas vérifié pour l'équation de la chaleur), en laissant à Mokobodzki l'adaptation de la représentation intégrale (moins facile et moins utile puisqu'il n'y

https://spartacus-idh.com

a pas nécessairement de base de S^+) et sans s'occuper de théorie adjointe. Une comparaison approfondie avec l'axiomatique précédente est faite dans [3, t. 6, n° 1b], [Brelot 1966a, Bauer 1966] et surtout [3, t. 11 n° 6]. Les élèves de Bauer complétèrent et élargirent diversement sa théorie et ses applications (Hansen (noyaux harmoniques), Sieveking (recherche de représentation intégrale « concrète »), Bliedtner (groupes harmoniques), Köhn (donnée-frontière sur une partie fermée de la frontière pour les domaines de base) (voir *Lecture Notes* 69), Guber (Congrès de Loutraki, *Lecture Notes* 31 ; recherche d'équations paraboliques entrant dans le cadre de Bauer), K. Jansen (thèse Erlangen 1969 étendant la théorie des $\mathcal{H}^p$-fonctions de Lumer-Naïm)). Voir aussi les nombreux articles de Boboc, Constantinescu-Cornea et l'ouvrage à l'impression de Constantinescu-Cornea [Constantinescu *et al.* 1972] complétant les axiomatiques précédentes ou développant une axiomatique plus faible.

Il est avantageux de suivre la théorie de Bauer sous sa forme d'allure définitive [Bauer 1966] en la complétant, lorsque c'est nécessaire, par des restrictions qui l'identifient à la théorie précédente et permettent un développement plus poussé.

Les questions de topologies et frontières étendues et étudiées dans ces axiomatiques ont été systématiquement examinées et approfondies de *façon abstraite préliminaire* dans un ouvrage global, qui par souci de brièveté, illustre et détaille les applications surtout dans le cas classique ([Brelot 1971]).

§ 16.

La question se posait de chercher les ou des faisceaux satisfaisant aux axiomes. C'est ce qu'a entrepris Bony dans $\mathbb{R}^n$ [Bony 1969b, Bony 1969a]. Considérons dans $\mathbb{R}^n$ l'axiomatique détaillée plus haut, affaiblie par suppression de l'axiome **3** (mais faisant par commodité les constantes harmoniques). Il existe un opérateur elliptique L (à forme quadratique positive et coefficients non tous nuls à la fois) tel que, pour toute u harmonique de type $\mathcal{C}^2$ dans un ouvert, $Lu = 0$; L est même unique à un facteur près et ses coefficients sont réguliers dans un sous ouvert dense. S'il y a (au sens d'une certaine approximation) suffisamment de fonctions harmoniques de type $\mathcal{C}^2$, il y a dans un ouvert dense convenable, équivalence pour les $\mathcal{C}^2$-fonctions, des conditions d'harmonicité et de surharmonicité avec les conditions $Lu = 0$, $Lu \leqslant 0$ pour l'opérateur associé. Indiquons encore entre autres que les axiomes de convergence (axiome **3**, forme de Doob K_D ou même forme faible K_1) peuvent être caractérisés par le type de L et que le cas des faisceaux invariants par translation peut être complètement élucidé.

§ 17.

Parallèlement aux axiomatiques locales précédentes, les travaux sur l'énergie de Cartan-Deny ont conduit Beurling et Deny a dégager de la théorie des fonctions à intégrale de Dirichlet finie, des propriétés servant d'axiomes pour construire une *axiomatique globale de l'énergie sous le nom de théorie des espaces de Dirichlet*, d'abord dans le cas élémentaire d'un espace à un nombre fini de

© Spartacus-Idh 2019

points, puis sous son aspect général [Beurling *et al.* 1959, Deny 1969]. L'idée nouvelle a été la remarque de Beurling qu'une transformation T du plan complexe qui est une contraction conservant l'origine donne par composition avec une fonction u une fonction Tu d'intégrale de Dirichlet minorée par celle de u.

Appelons d'abord avec Deny, espace de Dirichlet fonctionnel H, de base une mesure $\xi > 0$ dans un espace localement compact dénombrable à l'infini, un espace vectoriel complexe de fonctions sommables-ξ localement, muni d'une norme le rendant complet, et tel que intégrale-dξ, sur tout compact tende vers 0 avec la norme (propriété de continuité).

Tel est dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, pourvu de la mesure de Lebesgue, l'espace obtenu par complétion à partir des fonctions de type $\mathcal{C}^2$ ou même $\mathcal{C}^1$, à intégrale de Dirichlet finie, avec le produit scalaire

$$(u, v) = \int (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)\, \mathrm{d}x$$

et la norme-énergie $\sqrt{\int |\operatorname{grad} u|^2\, \mathrm{d}x}$. Dans ce cas particulier, on remarque, grâce à la formule élémentaire de Green, que si v est le potentiel de Green de la mesure de densité $\rho = -\Delta v$ supposée à support compact (u, v) vaut $\int u\overline{\rho}\, \mathrm{d}x$ à un facteur près. Dans le cas général on appellera potentiel engendré par une fonction f bornée à support compact, le point P_f de l'espace hilbertien H défini par la condition $(u, P_f) = \int u\overline{f}\, \mathrm{d}\xi$, $\forall u \in H$. *Un potentiel pur* est défini comme élément adhérent à l'ensemble des potentiels précédents engendrés par les $f \geqslant 0$.

Un espace de Dirichlet, qui contient et généralise le cas particulier cité à base intégrale de Dirichlet est un espace de Hilbert fonctionnel pour lequel toute contraction T (dite normale) indiquée plus haut minore la norme. Le développement de la théorie est fécond surtout pour les espaces dits réguliers où les fonctions de H situées dans l'espace $\mathcal{C}_k$ des fonctions finies continues à support compact sont denses dans H et même dans $\mathcal{C}_k$. Critères divers, capacité, théorèmes d'équilibre et de balayage analogues aux théories précédentes et bien d'autres notions se rattachant à d'autres domaines en font une théorie très riche. Soulignons seulement que pour un H à potentiels purs réels, H est un espace de Dirichlet si et seulement si est vérifié le principe important suivant dit « principe complet du maximum » approfondi dans Deny [1] : l'inégalité $P_f \leqslant P_g + 1$ $(f, g \in \mathcal{C}_k)$ doit être vraie p.p.-dξ, dans Ω si elle l'est de même sur $\{x \mid f > 0\}$. On peut d'ailleurs développer la théorie abstraite sans mettre à la base une mesure ξ (Thomas [3, t. 9]). Enfin a côté du cas d'invariance par translation, signalons l'étude analogue par Berg [3, t. 13] sur la sphère avec invariance par rotation.

§ 18.

Arrivons à la *théorie globale des noyaux* de G. Hunt (1957-58) [Hunt 1957] qui domine la théorie moderne du potentiel en ce sens qu'elle contient au fond les axiomatiques précédentes au moins dans les cas les plus intéressants,

https://spartacus-idh.com

les relient aux processus de Markov et inspire les recherches récentes. Vu la quantité et la complexité des travaux sur le sujet nous nous contenterons d'une introduction et de quelques résultats essentiels en renvoyant à un aperçu de Deny [3, t. 5] et aux ouvrages détaillés de P. A. Meyer [Meyer 1966] et Blumenthal-Getoor [Blumenthal *et al.* 1968] plus complets et plus faciles que les travaux originaux de Hunt.

Soit un espace localement compact E à base dénombrable ; on considère un noyau-mesure $\mu_x \geqslant 0$ dépendant de $x \in E$ qu'on écrit aussi $V(x,e)$ (e ensemble borélien), fonction borélienne de x pour e relativement compact. Alors *à une fonction* f borélienne $\geqslant 0$ correspond la fonction potentiel de f, qu'on peut écrire $Vf(x) = \int f \,\mathrm{d}\mu_x$ ou $\int f(y)V(x,\mathrm{d}y)$ (d'ailleurs la donnée $f \to Vf$ équivaut à celle des μ_x).

À une mesure $\theta \geqslant 0$ correspond la mesure, dite potentiel de θ :

$$\theta V(e) = \int V(x,e)\,\mathrm{d}\theta(x).$$

Le noyau identité $V(x,e)$ vaut 0 ou 1 selon que $x \notin e$ ou $x \in e$, et conserve $f(x)$ et $\theta(e)$. Extension facile pour des signes quelconques.

Comme exemple élémentaire, prenons dans $\mathbb{R}^3$ le noyau $\int_e \frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}y$ (mesure de Lebesgue $\mathrm{d}y$). On voit que Vf est le potentiel newtonien de la mesure de densité f, et θV est la mesure de densité égale au potentiel newtonien de θ. On notera $V.W$ le noyau produit $\int V(x,\mathrm{d}y)W(y,e)$; $V_t (t \geqslant 0)$ est un semi-groupe si $V_{t+s} = V_t V_s$. On note $\mathcal{C}_k$, $\mathcal{C}_0$ les ensembles de fonctions finies continues à support compact ou tendant vers 0 à l'infini. On dit que V satisfait au principe complet du maximum si quelles que soient $f, g \geqslant 0$ de $\mathcal{C}_k$ et $a > 0$, l'inégalité $Vf \leqslant Vg + a$ là où $f > 0$ entraîne l'inégalité partout.

Théorème de Hunt : Si V donne de $\mathcal{C}_k$ une image dense dans $\mathcal{C}_0$ et satisfait au principe complet du maximum, il existe un semi-groupe unique $P_t (t > 0)$ tel que $Vf = \int_0^\infty P_t f \,\mathrm{d}t$ $(f > 0)$ où P_t (dit fellérien) applique $\mathcal{C}_k$ dans $\mathcal{C}_0$, vaut pour P_0 le noyau unité et satisfait à $f = \lim_{t\to 0} P_t f$ uniformément pour $f \in \mathcal{C}_0$ et à $P_t 1 \leqslant 1$.

La démonstration utilise une famille de noyaux dits « résolvante » et un célèbre théorème de Hille-Yosida. Des variantes améliorées ont été données plus tard (Ray, Lion [Lion 1966], Hirsch [Hirsch 1972], Berg, etc.). Relativement à $\{P_t\}$, f borélienne $\geqslant 0$ est dite « excessive » si $P_t f \leqslant f$ et $P_t f \to f (t \to 0)$, et invariante en cas d'égalité ; une définition correspondante de potentiel est évidente, conservant la décomposition de Riesz mais il y a bien d'autres notions de potentiel dans ces questions.

§ 19.

Les relations avec les axiomatiques précédentes sont faciles à exprimer. Avec la première axiomatique locale (base dénombrable, axiomes **1** , **2** , **3**, existence d'un potentiel > 0 et constantes harmoniques), P. A. Meyer [Meyer 1963] a montré, en utilisant un noyau de M^me^ Hervé, qu'on peut le choisir de façon à

© Spartacus-Idh 2019

ce qu'il satisfasse aux conditions de Hunt et les fonctions excessives du semi-groupe correspondant sont alors exactement les fonctions hyperharmoniques $\geqslant 0$ de l'axiomatique.

Dans la théorie de Bauer pour un espace fortement harmonique et les constantes surharmoniques, ce qui est plus général, on arrive à la même identité (voir [Bauer 1969]) à l'aide d'une variante élargie (Hansen) du théorème de Hunt [Hansen 1967]. Toute axiomatique analogue et plus faible ultérieure pose le même problème d'interprétation.

Enfin si l'on examine les espaces de Dirichlet réels, on voit que le noyau qui fournit la définition du potentiel, lorsqu'il s'annule à l'infini, est un noyau de Hunt et qu'alors les potentiels sont des fonctions excessives. C'est ce qui arrive dans le cas de l'espace de Dirichlet classique, dans un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire sans points-frontière irréguliers). Voir aussi J. Elliott [3, t. 6].

§ 20. — *Aspects probabilistes.*

On savait depuis longtemps, au moins dans $\mathbb{R}^2$, vingt ans avant l'ouvrage de P. Lévy [Lévy 1948], que, pour le mouvement brownien, la probabilité que la trajectoire issue d'un point x_0 rencontre la frontière d'un domaine $\omega \ni x_0$ pour la première fois sur une partie $e \subset \partial\omega$ (p. ex. borélienne) est la mesure harmonique de e relative à x_0 ; P. Lévy avait même interprété aussi le potentiel capacitaire, Kakutani savait caractériser les ensembles polaires comme ceux que les trajectoires précédentes ne rencontrent presque sûrement pas et Doob interpréta l'effilement. Étudiant la notion de quasi- ou semi-martingale, appelée maintenant sousmartingale, en analogie frappante avec les fonctions sousharmoniques, Doob montre même [Doob 1954] que si u est sousharmonique de croissance pas trop rapide à l'infini et $X(t)$ une trajectoire brownienne dans $\mathbb{R}^n$, $u(X(t))$ définit une sousmartingale.

Nous allons préciser des notions plus générales dans le cadre des processus de Markov , qui serviront à interpréter la théorie des noyaux de Hunt. On considère un espace abstrait Ω_0 pourvu d'une tribu d'ensembles $\mathcal{A}$ et d'une probabilité-mesure P (mesure sur $\mathcal{A}$ de total 1), et une application de Ω_0 dans un espace E (dit espace des états) pourvu d'une tribu $\mathcal{B}$, par une fonction $X(x)$, $\mathcal{A}$-mesurable (c'est-à-dire que si $e \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(e) \in \mathcal{A}$) dite *variable aléatoire*. Si X est réelle finie ou non (c'est-à-dire $E = \mathbb{R}^1$ augmenté de $\pm\infty$ et $\mathcal{B}$ tribu borélienne), on introduit $\mathcal{E}(X) = \int X \, \mathrm{d}P$, dite espérance mathématique ; l'espérance conditionnelle relative à une sous-tribu $\mathcal{A}'$ est toute fonction $\mathcal{A}'$-mesurable $y(x)$ telle que $\int_\alpha y \, \mathrm{d}P = \int_\alpha X \, \mathrm{d}P$, $\forall a \in \mathcal{A}'$. y est unique, en ce sens que si y_1, y_2 répondent à la question, $y_1 = y_2$ presque partout. On note $y = \mathcal{E}(X|\mathcal{A}')$. Quand X est l'indicateur d'un ensemble α_0, y est dite probabilité conditionnelle $P(\alpha_0|\mathcal{A}')$ (fonction de x).

Une famille $\{X_t\}$ (t réel dit temps) définit un processus stochastique dont $X_t(x)$ décrit la « trajectoire » de x dans E. Un cas très particulier est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Un cas plus général est le « processus de Markov » de type suivant : X_t, $(t \geqslant 0)$, probabilité-mesure P^y sur $\mathcal{A}$ dépendant d'un point $y \in E$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

a. $P^y(\{X_0 = y\}) = 1$, $P^y(\alpha)$ est $\mathcal{B}$-mesurable ;

https://spartacus-idh.com

b. Si $\mathcal{A}_s$ est la sous-tribu engendrée par les ensembles $X_r^{-1}(e)$ $(r \leqslant s ; e \in \mathcal{B})$ on impose : $P^y(\{X_t \in \beta\} \mid \mathcal{A}_s) = P^{X_s(x)}(\{X_t \in \beta\})$, $\forall \beta \in \mathcal{B}$, $\forall s, t ; s \leqslant t$, P^y-presque partout dans Ω_0. Ceci signifie grossièrement que la trajectoire issue de y ne dépend pas, après l'époque s, des positions antérieures.

Alors, moyennant une légère adaptation, *tout semi-groupe P_t de la théorie de Hunt s'interprète, au moyen d'un processus de Markov du précédent, selon* $P_t(y, e) = P^y(\{X_t \in e\})$.

Quant aux martingales, considérons un processus X_t « adapté » à la famille croissante $\mathcal{T}_t$ de sous-tribus de $\mathcal{T}$, tribu sur Ω_0, c'est-à-dire tel que X_t soit $\mathcal{T}_t$-mesurable $(\forall t > 0)$. C'est une martingale (resp. sur ou sousmartingale) si $X_t(x)$ est P-intégrable $\forall t$ et si $\forall s, t ; s \leqslant t ; \mathcal{E}(X_t \mid \mathcal{T}_s) = X_s$ (resp. $\leqslant$ ou $\geqslant$). Voir tous les traités modernes de probabilités, et une étude directe avec applications dans Hunt [Hunt 1966].

Ces notions et bien d'autres comme les temps d'arrêt, temps d'entrée, diverses réduites ou balayages ont beaucoup de relations et propriétés, permettent d'interpréter les notions essentielles de théorie classique ou axiomatique du potentiel et donnent lieu à des études approfondies de cas particuliers (comme le mouvement brownien dont les trajectoires sont continues). Pour tous ces travaux considérables, qui comportent même une théorie du potentiel probabiliste et indépendante, voir, outre les traités de Meyer [Meyer 1966, Meyer 1967], Blumenthal-Getoor [Blumenthal *et al.* 1968] et Dynkin [Dynkin 1965], une quantité d'articles comme ceux des auteurs précédents ou de G. Hunt, K. Ito, S. Watanabe, Kunita-Watanabe, Bony, Courrège, Priouret, Kemeny, Snell, J.B. Walsh, Kac suivi de Strook, Sieveking, Cairoli, Port-Stone, J. Taylor, etc. (voir [3, t. 8 et t. 14], [Kac 1970, Stroock 1967, 5]...).

© Spartacus-Idh 2019

§ 21. — *Nouvelles discussions et extensions ; problèmes inverses.*

Le succès des axiomatiques précédentes tient à des propriétés de base que l'on a progressivement dégagées pour en discuter le rôle puis s'en servir pour élargir les théories. Les relations avec la synthèse de Hunt ont enrichi ce genre de travaux (Boboc, Constantinescu, Cornea (réf. dans [Constantinescu 1969], comme [Boboc *et al.* 1967]), Hansen [Hansen 1967], Bliedtner [6],...). Cela devait s'accentuer, comme on va le voir, dans des recherches parallèles ou ultérieures à un niveau abstrait encore plus élevé, surtout sur les liaisons ou analogies entre les axiomatiques et la théorie du type Hunt et toutes les notions associées comme le balayage, les réduites, les résolvantes, etc.

Ainsi Mokobodzki et D. Sibony ont approfondi le rôle du principe du minimum. En partant sur un espace localement compact d'un cône de fonctions s.c.i. qui y satisfont, ils bâtissent une théorie locale du type Brelot-Bauer, grâce à quelques autres propriétés, de façon à ce que les fonctions surharmoniques bornées correspondantes soient les fonctions du cône, mais il leur faut prendre un cône *maximal* dans la famille des cônes de type ordonné par inclusion [Mokobodzki *et al.* 1967].

Ils ont aussi remarqué le rôle des espaces et cônes adaptés, introduits par Choquet [4, t. 1] : c'est, sur un espace localement compact, un espace

vectoriel réel V de fonctions finies continues v engendré par les fonctions $v \geqslant 0$, contenant pour tout x une v non nulle en x, enfin possédant la propriété de domination suivante : pour tout $v \geqslant 0$, il existe une $w \in V^+$ qui la domine à l'infini, c'est-à-dire telle que $w/v \to +\infty$ selon le filtre des complémentaires des compacts (w/v étant pris $+\infty$ quand indéterminé). Un cône convexe C est adapté si $C - C$ est un espace adapté. L'intérêt est qu'alors une forme linéaire sur V, positive sur V^+, se représente par $\int v \, \mathrm{d}\mu$, à l'aide d'une mesure μ, souvent unique dans les applications. Cela permet d'étendre la théorie globale de Hunt en remplaçant l'espace des fonctions continues s'annulant à l'infini par un espace adapté.

Ils ont pu ainsi, encore plus nettement, traiter des *problèmes plutôt inverses* des théories initiales : à partir d'un cône convexe de fonctions par exemple continues, chercher des conditions générales à peu près nécessaires et suffisantes pour bâtir une axiomatique (qui conserve les caractéristiques intéressantes des précédentes) ou un semi-groupe de type Hunt, dont les fonctions continues respectivement surharmoniques ou excessives soient à peu près les précédentes. Voir d'abord [3, t. 11], puis des variantes, et des constructions plus ou moins générales ou abstraites avec des notions nouvelles sur la dualité de deux cônes, la dérivation des potentiels et le balayage, dans bien des articles récents ou en cours, surtout de Mokobodzki (voir [Mokobodzki 1969c, Mokobodzki 1969b, Mokobodzki 1969a, Mokobodzki 1970b, Mokobodzki 1970a, Mokobodzki *et al.* 1967] et [3, 4]).

D'autre part, sans probabilités et dans un cadre local, une nouvelle généralisation des axiomatiques est entreprise, à base du principe du minimum et de maximalité, qui englobe aussi la théorie des fonctions plurisousharmoniques [Feyel *et al.* 1971]. On a examiné aussi une axiomatique où les fonctions harmoniques prennent leurs valeurs dans un espace topologique ordonné général (Monna) et on a élargi les axiomatiques en remplaçant la topologie par une semi-topologie, ce dont on se sert pour les approximations d'espaces harmoniques ([Bertin 1969]). Enfin signalons que l'on s'occupe de plus en plus de problèmes non linéaires.

Quelques années apporteront sans doute, comme Mokobodzki s'y emploie, des exposés synthétiques caractérisant un nouveau stade cohérent de la théorie du potentiel et qui sera plus facile à analyser.

https://spartacus-idh.com

Bibliographie

[1] *Colloque sur la théorie du potentiel,* 1964. Paris-Orsay. (Publié par le C.N.R.S. n° 146 et les *Annales de l'Institut Fourier* t. 15/1, 1965).

[2] *Colloque du CIME, Potentiel theory,* Cours d'été, Stresa, 1969.

[3] *Séminaire de théorie du potentiel (Paris),* t. 1 (1957) à t. 13 (1969-70). (Secrétariat mathématique de l'Institut H. Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie- Curie, Paris 5e).

[4] *Séminaire d'initiation à l'Analyse (Choquet),* t. 1 (1962) à t. 9 (1969-70). Institut H. Poincaré, Paris.

[5] *Séminaire de probabilités (Strasbourg),* t. 1 (1966-67) à t. 5 (1969-70). *Lecture Notes* 39, 51, 88, 124, 191.

[6] *Seminar über Potentialtheorie (Erlangen),* depuis 1968, *Lecture Notes* 69.

⋆⋆

Indiquons que beaucoup d'articles sur le potentiel et questions connexes se trouvent dans les Annales de l'Institut Fourier (abrégé Annales I.F.).

⋆⋆

[Ahlfors *et al.* 1949] **L. Ahlfors et M. Heins**. Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelof principle. *Annals of Mathematics*, vol. 50, n° 2, p. 341–346, 1949.

[Anandam 1972] **V. Anandam**. Espaces harmoniques sans potentiel positif. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 22, n° 4, p. 97–160, 1972.

[Anger 1966] **G. Anger**. *Funktionalanalytische Betrachtungen bei Differentialgleichungen unter Verwendung von Methoden der Potentialtheorie I.* Institut für Mathematik der deutschen Akad. der Wiss., Berlin, 1966.

[Aronszajn *et al.* 1961] **N. Aronszajn *et al***. Theory of Bessel potentials. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 11, 1961. Vol. 17, n° 2, 1961. vol. 19, n° 2, 1970.

[Arsove 1953] **M. G. Arsove**. Functions representable as differences of subharmonic functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 75, n° 2, p. 327–365, 1953.

[Avanissian 1960] **V. Avanissian**. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques. *Annales scientifiques*

© Spartacus-Idh 2019

de l'École Normale Supérieure 3e série, vol. 78, nº 2, p. 101–161, 1960.

[Bauer 1961] **H. Bauer**. Silovscher Rand und Dirichletsches Problem. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 11, p. 89–136, 1961. (Avec importante bibliographie).

[Bauer 1962] **H. Bauer**. Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, vol. 146, nº 1, p. 1–59, 1962.

[Bauer 1963] **H. Bauer**. Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (Existenz von Potentialen). *Probability Theory and Related Fields*, vol. 1, nº 3, p. 197–229, 1963.

[Bauer 1965] **H. Bauer**. Propriétés fines des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 15, nº 1, p. 137–154, 1965.

[Bauer 1966] **H. Bauer**. Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. *Lecture notes*, vol. 22, 1966.

[Bauer 1969] **H. Bauer**. Harmonic spaces and associated Markov processes. In : *Potential Theory*, p. 23–67, colloque [2], 1969.

[Bertin 1969] **E. M. J. Bertin**. *L'approximation des espaces harmoniques*. Thèse Utrecht, 1969.

[Beurling 1933] **A. Beurling**. *Études sur un problème de majoration*. Thèse Upsala, Almquist et Wiksell, 1933.

[Beurling 1940] **A. Beurling**. Ensembles exceptionnels. *Acta Mathematica*, vol. 72, nº 1, p. 1–13, 1940.

[Beurling *et al.* 1959] **A. Beurling et J. Deny**. Dirichlet spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 45, nº 2, p. 208–215, 1959.

[Blumenthal *et al.* 1968] **R. M. Blumenthal et R. K. Getoor**. *Markov processes and potential theory*. Ac. press. New-York London, 1968.

[Boboc *et al.* 1967] **N. Boboc, C. Constantinescu et A. Cornea**. Semigroups of transitions on harmonic spaces. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl*, vol. 12, p. 763–805, 1967.

[Boboc *et al.* 1965] **N. Boboc, C. Constantinescu et A. Cornea**. Axiomatic theory of harmonic functions. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 15, nº 1, p. 283–312, 1965. et nº 2, p. 37.

[Boboc *et al.* 1968] **N. Boboc et P. Mustata**. Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du second ordre de type elliptique. *Lecture Notes 68*, 1968.

[Bony 1969a] **J.-M. Bony**. Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel. 1969. (Voir [2]).

https://spartacus-idh.com

[Bony 1969b] **J.-M. Bony**. Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du probleme de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 19, n° 1, p. 277–304, 1969.

[Bouligand 1925] **G. Bouligand**. Sur le probleme de Dirichlet. *Annales de la Soc. pol. de math.*, 1925.

[Bouligand 1926] **G. Bouligand**. Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet. *Mém. des Sc. Math. XI*, 1926.

[Brelot 1932] **M. Brelot**. Über die Singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. *Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. 31*, p. 46–54, 1932.

[Brelot 1934] **M. Brelot**. Étude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier. *Act. sc. et ind. 139*, 1934.

[Brelot 1938a] **M. Brelot**. Fonctions sous-harmoniques et balayage. *Bull. Ac. royale de Belgique*, vol. 24, p. 421–436, 1938.

[Brelot 1938b] **M. Brelot**. Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques. *CR Acad. Sci., Paris*, vol. 207, p. 836, 1938.

[Brelot 1939] **M. Brelot**. Familles de Perron et problème de Dirichlet. *Acta Litt. Sci. Szeged*, vol. 9, n° 2, 1939.

[Brelot 1940] **M. Brelot**. Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel. *J. de Math*, vol. 19, p. 319–337, 1940.

[Brelot 1941] **M. Brelot**. Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques. *Bull. Sci. Math*, vol. 65, n° 2, p. 72–98, 1941.

[Brelot 1944a] **M. Brelot**. Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. *Annales ENS*, vol. 61, p. 301–332, 1944.

[Brelot 1944b] **M. Brelot**. Sur les ensembles effilés. *Bull. Sci. Math*, vol. 68, n° 2, p. 12–36, 1944.

[Brelot 1945a] **M. Brelot**. Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités. *J. Math. Pures Appl.(9)*, vol. 24, p. 1–32, 1945.

[Brelot 1945b] **M. Brelot**. Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes. *Bull. Soc. Math. France*, vol. 73, p. 55–70, 1945.

[Brelot 1946a] **M. Brelot**. Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives. *Ann. Univ. Grenoble*, vol. 22, p. 205–219, 1946.

[Brelot 1946b] **M. Brelot**. Le problème de Dirichlet ramifié. *Ann. Univ. Grenoble*, vol. 22, p. 167–200, 1946.

[Brelot 1947] **M. Brelot**. Sur le principe des singularités positives et la topologie de RS Martin. *Ann. Univ. Grenoble*, vol. 23, p. 113–138, 1947.

© Spartacus-Idh 2019

[Brelot 1952] **M. Brelot**. La théorie moderne du potentiel. In : *Ann. Inst. Fourier*, p. 131–295, 1952.

[Brelot 1953] **M. Brelot**. Étude et extensions du principe de Dirichlet. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 5, p. 371–419, 1953.

[Brelot 1956] **M. Brelot**. Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin. *J. Math. Pures Appl*, vol. 35, p. 297–335, 1956.

[Brelot 1958] **M. Brelot**. Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact. *Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, vol. 2, p. 1–40, 1958. (Suivi d'autres articles t. 6).

[Brelot 1960] **M. Brelot**. Lectures on potential theory. *Tata Institute of Fundamental Research*, vol. 19, 1960. 2e édition en 1967, avec large bibliographie.

[Brelot 1964] **M. Brelot**. *Éléments de la théorie classique du potentiel*. 1964. (Centre de Documentation Univ. ; 1re édit. 1959, 4e édit. 1969 avec large bibliographie, Paris ; 2e édit. traduite en russe), Ed. Mir, (Moscou 1964).

[Brelot 1965a] **M. Brelot**. Aspect statistique et comparé des deux types d'effilement. *Anaïs da Academia Brasileira de Ciencias*, vol. 37, p. 1–15, 1965.

[Brelot 1965b] **M. Brelot**. Théorie du potentiel et fonctions analytiques. *Colloque sur les fonctions analytiques, Erevan*, 1965.

[Brelot 1966a] **M. Brelot**. *Axiomatique des fonctions harmoniques*. vol. 14, Presses de l'Université de Montréal, 1966.

[Brelot 1966b] **M. Brelot**. La topologie fine en théorie du potentiel. *Symposium on Probability Methods in Analysis, Loutraki*, 1966. (*Lecture Notes 31*, 1961).

[Brelot 1967] **M. Brelot**. Capacity and balayage for decreasing sets. In : *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2 : Contributions to Probability Theory, Part 1*, The Regents of the University of California, 1967.

[Brelot 1971] **M. Brelot**. On topologies and boundaries in potential theory. *Lecture Notes 175*, 1971.

[Brelot *et al.* 1951] **M. Brelot et G. Choquet**. Espaces et lignes de Green. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 3, p. 199–263, 1951.

[Brelot *et al.* 1954] **M. Brelot et G. Choquet**. Polynômes harmoniques et polyharmoniques. In : *Second colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles*, p. 45–66, 1954.

[Brelot *et al.* 1963] **M. Brelot et J. L. Doob**. Limites angulaires et limites fines. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 13, no fasc. 2, p. 395–415, 1963.

https://spartacus-idh.com

[Calderon 1950] **A. Calderon**. On the behaviour of harmonic functions near the boundary. *Trans. Amer. Math. Soc*, vol. 68, p. 47–54, 1950.

[Carleson 1967] **L. Carleson**. *Selected problems on exceptional sets*. vol. 13, van Nostrand, 1967.

[Cartan 1941] **H. Cartan**. Sur les fondements de la théorie du potentiel. *Bull. Soc. Math. France*, vol. 69, p. 71–96, 1941.

[Cartan 1945] **H. Cartan**. Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels. *Bull. Soc. Math. France*, vol. 73, n° 74, p. 106, 1945.

[Cartan 1946] **H. Cartan**. Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. *Ann. Univ. Grenoble*, vol. 22, n° 3, p. 1, 1946.

[Cartan *et al.* 1950] **H. Cartan et J. Deny**. Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique. *Acta Sci. Math. Szeged*, vol. 12, n° Leopoldo Fejér et Frederico Riesz LXX annos natis dedicatus, Pars A, p. 81–100, 1950.

[Choquet 1954] **G. Choquet**. Theory of capacities. In : *Ann. Inst. Fourier*, p. 131–295, 1954. Ainsi que de nombreux articles dans [3] [4].

[Choquet 1956] **G. Choquet**. Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes. *Séminaire Bourbaki*, vol. 4, p. 33–47, 1956.

[Choquet 1957] **G. Choquet**. Potentiels sur un ensemble de capacite nulle, suites de potentiels. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences*, vol. 244, n° 13, p. 1707–1710, 1957.

[Choquet 1959] **G. Choquet**. Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 9, p. 91–101, 1959.

[Choquet 1962] **G. Choquet**. Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse. *Proc. Intern. Congr. Mathematicians, Stockholm*, p. 317–330, 1962.

[Choquet 1965] **G. Choquet**. Démonstration non probabiliste d'un théorème de Getoor. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 15, n° 2, p. 409–414, 1965.

[Choquet *et al.* 1944] **G. Choquet et J. Deny**. Sur quelques propriétés de moyenne caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 72, p. 118–140, 1944.

[Choquet *et al.* 1956] **G. Choquet et J. Deny**. Modèles finis en théorie du potentiel. *Journal d'Analyse Mathématique*, vol. 5, n° 1, p. 77–135, 1956.

[Ciesielski 1965] **Z. Ciesielski**. Brownian Motion Capacitory Potentials And Semi-Classical Sets I, II, III. *Bulletin de l'académie*

© Spartacus-Idh 2019

polonaise des sciences, vol. 12, n° 5, 1964, vol. 13, n° 2 et 3, 1965.

[Constantinescu 1966] **C. Constantinescu**. Die heutige Lage der Theorie der harmonischen Räume. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, n° 9, 1966.

[Constantinescu 1967] **C. Constantinescu**. Some properties of the balayage of measures on a harmonic space. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 17, n° 1, p. 273–293, 1967.

[Constantinescu 1969] **C. Constantinescu**. Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with the Markov processes. In : *Elliptische Differentiaígleichungen (Symposium), Akademie-Verlag, Berlin*, 1969.

[Constantinescu *et al.* 1963a] **C. Constantinescu et A. Cornea**. *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*. Springer-Verlag, 1963.

[Constantinescu *et al.* 1963b] **C. Constantinescu et A. Cornea**. On the axiomatic of harmonic functions I & II. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 13, n° 2, p. 373–388, 1963.

[Constantinescu *et al.* 1965] **C. Constantinescu et A. Cornea**. Compactifications of harmonic spaces. *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 25, p. 1–57, 1965.

[Constantinescu *et al.* 1972] **C. Constantinescu et A. Cornea**. Potential theory on harmonic spaces. 1972.

[Courant 1950] **R. Courant**. Dirichlet's principle. *Conformal Mapping, and Minimal Surfaces, Interscience, New York*, 1950. Importante bibliographie.

[Courant *et al.* 1931-37] **R. Courant et D. Hilbert**. *Methoden der mathematischen Physik*. Berlin, 1931-37.

[Denny 1947] **J. Denny**. Le principe des singularités positives de G. Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine. *Revue scientifique 85e année, fasc. 14*, 1947. Nombreux articles dans [3].

[Deny 1949] **J. Deny**. Systèmes totaux de fonctions harmoniques. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 1, p. 103–113, 1949.

[Deny 1950] **J. Deny**. Les potentiels d'énergie finie. *Acta Mathematica*, vol. 82, n° 1, p. 107–183, 1950.

[Deny 1951] **J. Deny**. Familles fondamentales. Noyaux associés. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 3, p. 73–101, 1951.

[Deny 1952] **J. Deny**. Le balayage. *Sémin. Math. de Lund, tome jubilaire de M. Riesz*, p. 47, 1952.

[Deny 1969] **J. Deny**. Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel. In : *Potential Theory* [2], p. 121–201, 1969.

[Deny *et al.* 1947] **J. Deny et P. Lelong**. Étude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 75, p. 89–112, 1947.

https://spartacus-idh.com

[Deny *et al.* 1953] **J. Deny et J.-L. Lions**. Les espaces du type de Beppo Levi. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 5, p. 305–370, 1953.

[Dirichlet 1876] **Dirichlet**. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. 1876.

[Doob 1954] **J. L. Doob**. Semimartingales and subharmonic functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 77, n° 1, p. 86–121, 1954.

[Doob 1954-55] **J. L. Doob**. Probability methods applied to the first boundary value problem. In : *Proc. Berkeley Symp. 3rd Math. Stat. Pr*, p. 49–80, 1954-55.

[Doob 1955] **J. L. Doob**. A probability approach to the heat equation. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 80, n° 1, p. 216–280, 1955.

[Doob 1957] **J. L. Doob**. Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bull. Soc. Math. France*, vol. 85, n° 4, p. 431–458, 1957.

[Doob 1958] **J. L. Doob**. Probability theory and the first boundary value problem. *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 2, n° 1, p. 19–36, 1958.

[Doob 1959] **J. L. Doob**. A non-probabilistic proof of the relative Fatou theorem. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 9, p. 293–300, 1959.

[Doob 1961] **J. L. Doob**. Conformally invariant cluster value theory. *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 5, n° 4, p. 521–549, 1961.

[Doob 1962] **J. L. Doob**. Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 12, n° 1062, p. 573–621, 1962.

[Doob 1965] **J. L. Doob**. Some classical function theory theorems and their modern versions. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 15, n° 1, p. 113–136, 1965.

[Doob 1966] **J. L. Doob**. Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 72, n° 4, p. 579–600, 1966.

[Du Plessis 1970] **N. Du Plessis**. *An introduction to potential theory*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1970.

[Durier 1969] **R. Durier**. Sur les noyaux-fonctions en théorie du potentiel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 18, n° 2, p. 113–189, 1969.

[Dynkin 1965] **E. B. Dynkin**. Markov processes. In : *Markov Processes*, p. 77–104, Springer, 1965.

[Effros *et al.* 1970] **E. G. Effros et J. L. Kazdan**. Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems. *Journal of Differential Equations*, vol. 8, n° 1, p. 95–134, 1970.

© Spartacus-Idh 2019

[Effros *et al.* 1971] **E. G. Effros, J. L. Kazdan et D. Gilbarg**. On the Dirichlet problem for the heat equation. *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 20, nº 8, p. 683–693, 1971.

[Evans 1920] **G. C. Evans**. Fundamental points of potential theory. *Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies*, vol. 7, nº 4, 1920.

[Evans 1927] **G. C. Evans**. The logarithmic potential : Discontinuous Dirichlet and Neumann problems. *American Mathematical Soc.*, vol. 6, 1927.

[Evans 1933] **G. C. Evans**. Application of Poincaré's sweeping-out process. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 19, nº 4, p. 457–461, 1933.

[Evans 1936] **G. C. Evans**. Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions. *Monatshefte für Mathematik*, vol. 43, nº 1, p. 419–424, 1936.

[Fatou 1906] **P. Fatou**. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta mathematica*, vol. 30, nº 1, p. 335–400, 1906.

[Fekete 1923] **M. Fekete**. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 17, nº 1, p. 228–249, 1923.

[Feyel *et al.* 1971] **D. Feyel et A. de La Pradelle**. Principes du minimum et maximalité dans les préfaisceaux. Esquisse d'une théorie locale. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, vol. 272, p. 19–22, 1971.

[Fredholm 1900] **E. Fredholm**. Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. *Ofversigt of Kongl. Vetens Kaps-Akademiens Förhandlingar Stokholm*, nº 1, 1900.

[Frostman 1935] **O. Frostman**. *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*. PhD thesis, Gleerup, 1935.

[Fuglede 1960] **B. Fuglede**. On the theory of potentials in locally compact spaces. *Acta mathematica*, vol. 103, nº 3, p. 139–215, 1960.

[Fuglede 1965] **B. Fuglede**. Le théoreme du minimax et la théorie fine du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 15, nº 1, p. 65–87, 1965.

[Fuglede 1970] **B. Fuglede**. Fine connectivity and finely harmonic functions. *CR Congr. Internat. Math., Nice*, 1970.

[Fuglede 1971] **B. Fuglede**. The quasi-topology associated with a countably subadditive set function. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 21, nº 1, p. 123–169, 1971.

[Gauss 1840] **C. F. Gauss**. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs-und Abstossungs-Kräfte. In : *Gauss Werke Bd 5*, p. 195–242, 1840.

https://spartacus-idh.com

[Gowrisankaran 1963] **K. Gowrisankaran**. Extreme harmonic functions and boundary value problems I. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 13, n° 2, p. 307–356, 1963. II, *Math. Zeits.* 94, p. 256, 1966.

[Gowrisankaran 1966] **K. Gowrisankaran**. Fatou-Naim-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 16, n° 2, p. 455–467, 1966.

[Hansen 1967] **W. Hansen**. Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen. *Inventiones mathematicae*, n° 3, p. 179–214, 1967. Suivi de n° 5, p. 335, 1968. Souligons en outre un mémoire important de [6] *Lecture Notes* 69, sur les noyaux harmoniques.

[Hansen 1971] **W. Hansen**. Fegen und Dünnheit mit Anwendungen auf die Laplace-und Wärmeleitungsgleichung. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 21, p. 79–121, 1971.

[Harnack 1887] **A. Harnack**. *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene*. VG Teubner, 1887.

[Helms 1969] **L. L. Helms**. Introduction to potential theory. *Wiley Inters. pure and applied mathematics*, n° 22, 1969.

[Hervé 1971] **M. Hervé**. Analytic and Plurisubharmonic Functions. *Lecture Notes*, vol. 198, 1971.

[Hervé 1962] **R.-M. Hervé**. Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 12, n° 415–571, 1962.

[Hervé 1964] **R.-M. Hervé**. Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0$. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 14, n° 2, p. 493–507, 1964.

[Hervé *et al.* 1969] **R.-M. Hervé et M. Hervé**. Les fonctions surharmoniques associéesa un opérateur elliptique du second ordrea coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 19, n° 1, p. 305–359, 1969.

[Hilbert 1904] **D. Hilbert**. Über das Dirichletsche Prinzip. *Mathematische Annalen*, vol. 59, n° 1, p. 161–186, 1904.

[Hinrichsen 1967] **D. Hinrichsen**. Randintegrale und nukleare Funktionenräume. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 17, p. 225–271, 1967.

[Hirsch 1972] **F. Hirsch**. Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 22, n° 1, p. 89–210, 1972.

[Huber 1955] **A. Huber**. Some results on generalized axially symmetric potentials. In : *Proceedings of the Conference on Differential Equations, University of Maryland*, 1955.

[Hunt 1957] **G. A. Hunt**. Markov processes and potentials I, II, III. *Illinois J. Math.*, vol. 1, p. 66 et 316–369, 1957. Vol. 2, p.151, 1958.

© Spartacus-Idh 2019

[Hunt 1965] **G. A. Hunt**. La théorie du potentiel et les processus récurrents. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 15, nº 1, p. 3–12, 1965.

[Hunt 1966] **G. A. Hunt**. *Martingales et processus de Markov*. Dunod, 1966.

[Kac 1970] **M. Kac**. *Aspects probabilistes de la théorie du potentiel*. vol. 32, Presses de l'Université de Montréal, 1970.

[Kakutani 1944] **S. Kakutani**. Two-dimensional Brownian Motion and Harmonic Functions. *Proceedings of the Imperial Academy*, vol. 20, nº 10, p. 706–714, 1944. Vol. 21, p. 227, 1945.

[Keldych *et al.* 1937] **M. Keldych et M. Lavrentieff**. Sur la stabilité des solutions du problème de Dirichlet. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, vol. 1, nº 4, p. 551–595, 1937. Résumé en français dans une Note des C. R. Ac. Sci. de Paris « Sur le problème de Dirichlet », juin 1937.

[Keldysh 1938] **M. Keldysh**. Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet. *CR Acad. Sci. URSS*, vol. 18, 1938. Un résumé en français est contenu dans une Note de même titre aux Doklady 18, nº 6, 1938.

[Kellogg 1929] **O. D. Kellogg**. Foundations of potential theory. *Grundlehren der Math. Wiss.*, vol. 31, 1929.

[Kemeny *et al.* 1961] **J. G. Kemeny et J. L. Snell**. Potentials for denumerable Markov chains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 3, nº 2, p. 196–260, 1961.

[Kishi 1963] **M. Kishi**. Maximum principles in the potential theory. *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 23, p. 165–187, 1963.

[Kunugui 1950] **K. Kunugui**. Étude sur la théorie du potentiel généralisé. *Osaka Math. J.*, vol. 2, 1950. Avec bibliographie japonaise.

[La Pradelle 1967] **A. de La Pradelle**. Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 17, nº 1, p. 183, 1967. Complété dans Ann. I.F., vol. 19, nº 1, p. 275.

[La Vallée Poussin 1932] **C. de La Vallée Poussin**. Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet. *Annales de l'institut Henri Poincaré*, vol. 2, nº 3, p. 169–232, 1932.

[La Vallée Poussin 1937] **C. de La Vallée Poussin**. *Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet*. vol. 2, Hermann & cie, 1937.

[La Vallée Poussin 1938] **C. de La Vallée Poussin**. Potentiel et probléme généralisé de Dirichlet. *The Mathematical Gazette*, p. 17–36, 1938.

[La Vallée Poussin 1949] **C. de La Vallée Poussin**. *Le potentiel logarithmique*. Librairie univ. Louvain et Gauthiers- Villars, 1949.

https://spartacus-idh.com

[Landkof 1949] **N. Landkof**. Approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques. *Mat. Svornik*, vol. 25, p. 95–106, 1949.

[Landkof 1966] **N. Landkof**. *Les principes de la théorie moderne du potentiel* (en russe). Moscou, 1966. Avec grande bibliographie.

[Lebesgue 1907] **H. Lebesgue**. Sur le problème de Dirichlet. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, vol. 24, n° 1, p. 371–402, 1907.

[Lebesgue 1912] **H. Lebesgue**. Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet. *Soc. math. de France, Compte Rendus*, 1912.

[Lelong 1945] **P. Lelong**. Les fonctions plurisousharmoniques. *Ann. Sci. École Norm. Sup*, vol. 62, p. 301–338, 1945.

[Lelong 1963] **P. Lelong**. Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. *Cours d'été du* CIME, 1963.

[Lelong-Ferrand 1949] **J. Lelong-Ferrand**. Étude au voisinage de la frontière des fonctions subharmoniques positives dans un demi-espace. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, vol. 66, p. 125–159, 1949.

[Lelong-Ferrand 1955] **J. Lelong-Ferrand**. *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée*. Gauthier-Villars, 1955.

[Lévy 1948] **P. Lévy**. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. vol. 2, Gauthier-Villars, 1948. 2e édition 1965.

[Lichtenstein 1921] **L. Lichtenstein**. Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. In : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, p. 177–377, 1921.

[Lichtenstein 1924] **L. Lichtenstein**. *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*. BG Teubner, 1924.

[Lion 1966] **G. Lion**. Familles d'opérateurs et frontière en théorie du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 16, n° 2, p. 389–453, 1966.

[Loeb 1966] **P. A. Loeb**. An Axiomatic Treatment of Pairs of Elliptic Differential Equations. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 16, n° 2, p. 167–208, 1966.

[Loeb *et al.* 1965] **P. A. Loeb et B. Walsh**. The equivalence of Harnack's principle and Harnack's inequality in the axiomatic system of Brelot. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 15, n° 2, p. 597–600, 1965.

[Loeb *et al.* 1966] **P. A. Loeb et B. Walsh**. Nuclearity in axiomatic potential theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 72, n° 4, p. 685–689, 1966.

[Lumer-Naïm 1967] **L. Lumer-Naïm**. $\mathcal{H}^p$-spaces of harmonic functions. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 17, n° 2, p. 425, 1967.

© Spartacus-Idh 2019

[Martin 1941] **R. S. Martin**. Minimal positive harmonic functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 49, n° 1, p. 137–172, 1941.

[Meyer *et al.* 1915] **H. B.-W. Meyer et H. Burkhardt**. Potential theorie. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II A 7b, Leipzig*, 1915.

[Meyer 1963] **P.-A. Meyer**. Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 13, n° 2, p. 357–372, 1963. Voir également diverses conférences dans [3] [5].

[Meyer 1966] **P. A. Meyer**. *Probabilités et potentiel*. Hermann, 1966.

[Meyer 1967] **P.-A. Meyer**. Processus de Markov. *Lecture Notes*, vol. 26, 1967. Vol. 77, 1968.

[Miranda 1955] **C. Miranda**. Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. *Ergeb, Heft.*, vol. 2, 1955. 2e édition en anglais, 1969.

[Mokobodzki 1969a] **G. Mokobodzki**. Cônes de potentiels et noyaux subordonnés. In : *Potential theory* [2], 1969.

[Mokobodzki 1969b] **G. Mokobodzki**. Éléments extrémaux pour le balayage. *Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel)* [3], vol. 13, 1969.

[Mokobodzki 1969c] **G. Mokobodzki**. Ultrafiltres rapides sur $\mathbb{N}$. Construction d'une densité relative de deux potentiels comparables. *Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel)* [3], vol. 12, 1969. Voir aussi divers articles dans [1, 2, 3, 4, 5].

[Mokobodzki 1970a] **G. Mokobodzki**. Dualité formelle et représentation intégrale des fonctions excessives. In : *Actes, Congrès de Nice*, 1970.

[Mokobodzki 1970b] **G. Mokobodzki**. Structure des cônes de potentiels. *Séminaire Bourbaki vol. 1969/70 Exposés*, 1970.

[Mokobodzki *et al.* 1967] **G. Mokobodzki et D. Sibony**. Principe du minimum et maximalité en théorie du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 17, n° 1, p. 401–441, 1967. Également des articles importants dans [3, surout t. 11] et [4, surtout t. 6/1].

[Naïm 1957] **L. Naïm**. Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 7, 1957.

[Nicolesco 1936] **M. Nicolesco**. *Les fonctions polyharmoniques*. Hermann Paris, 1936.

[Nikodym 1933] **O. M. Nikodym**. Sur un théorème de MS Zaremba concernant les fonctions harmoniques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 12, p. 95–108, 1933.

[Ninomiya 1957] **N. Ninomiya**. Étude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique. *Journal of the Institute of*

https://spartacus-idh.com

Polytechnics, Osaka City University. Series A : Mathematics, vol. 8, n° 2, p. 147–179, 1957.

[Ohtsuka 1961] **M. Ohtsuka**. On Potentials in Locally Compact Spaces. *Journal of Science of the Hiroshima University, Series AI (Mathematics)*, vol. 25, n° 2, p. 135–352, 1961.

[Ohtsuka 1963] **M. Ohtsuka**. *Dirichlet problem, extremal length, and prime ends*. Washington Univ., 1963.

[Parreau 1951] **M. Parreau**. *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analitiques et la classification des surfaces de Rieman*. vol. 3, 1951. Bibliographie importante.

[Perkins 1935] **F. W. Perkins**. The Dirichlet Problem for Domains with Multiple Boundary Points. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 38, n° 1, p. 106–144, 1935.

[Perron 1923] **O. Perron**. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 18, n° 1, p. 42–54, 1923.

[Phillips *et al.* 1923] **H. B. Phillips et N. Wiener**. Nets and the Dirichlet problem. *Studies in Applied Mathematics*, vol. 2, n° 1-4, p. 105–124, 1923.

[Poincaré 1899] **H. Poincaré**. *Théorie du potentiel Newtonien*. G. Carre et C. Naud, 1899.

[Pólya *et al.* 1931] **G. Pólya et G. Szegő**. Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 165, p. 4–49, 1931.

[Pólya *et al.* 1951] **G. Pólya et G. Szegő**. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton University Press, 1951.

[Privaloff 1937] **I. Privaloff**. *Les fonctions sousharmoniques* (en Russe). Moscou, 1937.

[Radó 1937] **T. Radó**. *Subharmonic functions*. vol. 1, Springer-Verlag, 1937.

[Riemann 1851] **B. Riemann**. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse*. PhD thesis, Inaugural Dissertation Göttingen, 1851.

[Riesz 1926] **F. Riesz**. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. *Acta Mathematica*, vol. 48, n° 3, p. 329–343, 1926.

[Riesz 1939] **M. Riesz**. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes. *Bulletin de la SMF*, vol. 67, p. 153–170, 1939.

[Rodin *et al.* 1968] **B. Rodin et L. Sario**. *Principal functions*. Van Nostrand, 1968. Avec appendice de Nakai ; bibliographie importante.

[Schwartz 1966] **L. Schwartz**. *Théorie des distributions*. Hermann, 1966.

© Spartacus-Idh 2019

[Schwarz 1890] **H. A. Schwarz**. *Gesammelte mathematische abhandlungen*. American Mathematical Soc., 1890.

[Sibony 1968a] **D. Sibony**. Allure à la frontière minimale d'une classe de transformations. Théorème de Doob généralisé. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 18, n° 2, p. 91–120, 1968.

[Sibony 1968b] **D. Sibony**. Théorème de limites fines et problème de Dirichlet. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 18, n° 2, p. 121–134, 1968.

[Stampacchia 1966] **G. Stampacchia**. *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Presses de l'Université de Montréal, 1966.

[Stein *et al.* 1960] **E. M. Stein et G. Weiss**. On the theory of harmonic functions of several variables I. *Acta Mathematica*, vol. 103, p. 25–62, 1960. II, vol. 106, p. 137, 1961.

[Stroock 1967] **D. W. Stroock**. Kac Approach to Potential Theory I. *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 16, p. 829, 1967. & II, *Comm. on pure and applied Math.*, vol. 20, 1967.

[Tautz 1949] **G. Tautz**. Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe. *Mathematische Nachrichten*, vol. 2, n° 5, p. 279–303, 1949.

[Tautz 1952] **G. Tautz**. Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen I & II. *Archiv der Mathematik*, vol. 3, n° 3, p. 232–238, 1952. Compléments p. 361.

[Taylor 1970] **J. C. Taylor**. The Martin boundaries of equivalent sheaves. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 20, p. 433–456, 1970.

[Temam 1970] **R. Temam**. *Analyse numérique*. PUF, 1970.

[Tsuji 1959] **M. Tsuji**. *Potential theory in modern function theory*. Maruzen, 1959.

[Vasilesco 1937a] **F. Vasilesco**. *La notion de capacité*. Hermann, 1937.

[Vasilesco 1937b] **F. Vasilesco**. *Le problème généralisé de Dirichlet*. Mémoires de l'Ac. Royale de Belgique, 1937.

[Vasilesco 1938] **F. Vasilesco**. *La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet*. Hermann, 1938.

[Walsh 1969] **B. Walsh**. Flux in axiomatic potential theory, I Cohomology. *Inventiones mathematicae*, vol. 8, n° 3, p. 175–221, 1969. II Duality. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 19, n° 2, p. 371–417, 1969.

[Walsh 1970] **B. Walsh**. Perturbation of harmonic structures and an index-zero theorem. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 20, n° 1, p. 317–359, 1970.

[Weinstein 1953] **A. Weinstein**. Generalized axially symmetric potential theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 59, n° 1, p. 20–38, 1953.

[Wiener 1924a] **N. Wiener**. Certain notions in potential theory. *Studies in Applied Mathematics*, vol. 3, n° 1, p. 24–51, 1924.

https://spartacus-idh.com

[Wiener 1924b] **N. Wiener**. The Dirichlet problem. *Studies in Applied Mathematics*, vol. 3, n° 3, p. 127–146, 1924.

[Wiener 1925] **N. Wiener**. Note on a paper of O. Perron. *Studies in Applied Mathematics*, vol. 4, n° 1-4, p. 21–32, 1925.

[Zaremba 1927] **S. Zaremba**. Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particulier, le problème de Dirichlet et celui de Neumann. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, vol. 6, p. 127–164, 1927.

© Spartacus-Idh 2019

Table des matières

Préface . . . . . **v**
Avant-propos . . . . . **vii**

Première partie
Vie et œuvre de Marcel Brelot (1903-1987)

Conférence de Gustave Choquet **2**

Deuxième partie
Éléments de la théorie classique du potentiel

Introduction **27**
I Compléments sur les fonctions harmoniques réelles **29**
1. Un principe de minimum (ou maximum) 29
2. Lemme de topologie (Choquet) 29
3. Lemme classique de Dini-Cartan 31
4. Rappel de propriétés de convergence et de compacité pour les fonctions harmoniques 32
5. Norme de Dirichlet et théorème de complétion 32
6. L'équation $\Delta T = 0$ au sens des distributions 34
7. Résolution du problème de Dirichlet dans une couronne . . . 34
8. Continuité du gradient d'une fonction harmonique à la frontière 36
II Fonctions surharmoniques et presque surharmoniques. **39**
1. Fonctions surharmoniques (au sens large) (F. Riesz) 39
2. Paramètres de Blaschke-Privaloff 40
3. Fonctions Surharmoniques 41
4. Exemples de fonctions surharmoniques et sousharmoniques 42
5. Propriétés locales 42
6. Approximation des fonctions surharmoniques 44
7. Théorème de convexité de Riesz 45
8. Minorantes harmoniques 46
9. Fonctions presque surharmoniques (Szpilrajn) 47
10. Réduite et balayée 49
III Introduction des ensembles polaires **51**
1. Définitions — Critères 51
2. Propriétés 52

© Spartacus-Idh 2019

IV Potentiels Classiques **55**
1. Définition 55
2. Utilisation des distributions 56
3. Fonction de Green dans une boule et potentiel de Green . . . 57
4. Loi de réciprocité 59
5. Continuité d'un potentiel sur le support des masses 60
6. Transformation de l'espace 61

V Capacités Classiques et Générales **63**
1. Potentiel capacitaire et capacité d'un compact 63
2. Propriétés de la capacité et du potentiel capacitaire 64
3. Capacité des ensembles quelconques 65
4. Définition d'une capacité générale 67
5. Différences successives 68
6. Capacité intérieure d'un ensemble 70
7. Capacité extérieure 71
8. Capacitabilité 72

VI Potentiels généraux et théorème de convergence. Application au balayage **75**
1. Généralités 75
2. Noyaux semi-continus et réguliers 77
3. Théorème de convergence 78
4. Application au cas classique 80
5. Applications classiques du théorème de convergence. Compléments sur le balayage 81

VII Ensembles effilés **83**
1. Définition 83
2. Propriétés 83
3. Critère général d'effilement 84
4. Théorème fondamental sur l'ensemble des points d'effilement d'un ensemble 85
5. Cas des ensembles fermés 86
6. Topologie fine 88

VIII Problèmes de Dirichlet dans $\mathbb{R}^n$ **91**
1. Définition de la fonction $\overline{H}_f$ 91
2. Propriétés 92
3. Cas de la donnée-frontière finie continue 94
4. Théorème fondamental de résolutivité 96
5. Ensembles négligeables sur la frontière 96
6. Allure de la solution à la frontière 97
7. Allure de H_f en un point-frontière irrégulier x_0 (f résolutive) 99

IX Fonction de Green **103**
1. Définition 103
2. Prolongement de la fonction de Green 105
3. Application. Caractérisation des points irréguliers 105
4. Mesure harmonique et balayage 106
5. Représentation globale de F. Riesz dans un ouvert borné quelconque 107

https://spartacus-idh.com

6. Meilleure et plus grande minorante harmonique 108
7. Balayage dans un ouvert borné quelconque avec le noyau de Green 110

X Norme et Principe de Dirichlet 113
1. Forme Préliminaire 113
2. Principe classique de Dirichlet 113
3. Fonctions B.L.D. 115

XI Notions sur l'énergie 119
1. Préliminaires 119
2. Énergie mutuelle de deux mesures 120
3. Énergie des mesures de signe quelconque 122
4. Principe de domination ou principe du maximum de Cartan 122
5. Théorème fondamental (Cartan) 123
6. Projection dans $\mathcal{E}$ 125
7. Balayage relatif à un compact 126
8. Distribution capacitaire et énergie 127
9. Énergie et intégrale de Dirichlet 128
10. Extension à un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ 129

XII Éléments extrémaux et frontière de Martin 133
1. Introduction 133
2. Centre de gravité ou barycentre 133
3. Points extrémaux et représentation barycentrique 134
4. Méthode Générale d'introduction de frontières compactes . . 135
5. La frontière de Martin 135
6. Les fonctions harmonique minimales 137
7. Représentation intégrale canonique 137
8. Indications sur le rôle de la frontière de Martin et l'effilement à la frontière 138
9. Autres rôle des éléments extrémaux — Indications 139

Appendice 147
I Premières propriétés fondamentales 147
1. Définition 147
2. Premières propriétés 148
3. Le principe du maximum 148
4. Dérivation des fonctions harmoniques 150
5. Rappel des formules de Green 150
6. Caractère local de l'harmonicité, critère du laplacien 151
II Usage du laplacien ordinaire 151
7. Polynômes harmoniques 151
8. Le laplacien en coordonnées polaires. Fonction harmonique fondamentale 152
9. Applications des formules de Green 153
10. Dérivées des fonctions harmoniques — Majoration 154
III Transformation conforme 154
11. Critère 154
12. Transformation du Δ 156
IV Notions sur le potentiel logarithmique 157
13. Définition — Cas particuliers 157

© Spartacus-Idh 2019

14. Potentiel de double couche 158
V Analycité des fonctions harmoniques 159
15. Démonstration et conséquences 159
VI L'intégrale de Poisson 160
16. Introduction de l'expression de l'intégrale 160
17. Étude à l'intérieure et à la frontière 161
18. Applications 163
VII Familles de fonctions harmoniques. Convergence 164
19. Familles bornées localement 164
20. Famille de fonctions réelles bornées inférieurement (ou de même supérieurement) localement dans un domaine . . 165
VIII Étude des fonctions harmoniques au voisinage d'un point singulier 166
21. Théorème 166
22. Développement dans une couronne 168
23. Étude au voisinage d'un point singulier 0 169
24. Étude à l'infini 170
IX Extensions aux espaces euclidiens $\mathbb{R}^\tau$ (à $\tau > 2$ dimensions) 171
25. Définition 171
26. Examen des parties de la théorie qui diffèrent du cas plan : polynômes harmoniques, fonction harmonique fondamentale, transformation de Kelvin. Étude au voisinage d'un point singulier ou à l'infini 172

Troisième partie

Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel

§ Période classique ancienne – jusque vers la première guerre mondiale 178
§ Deuxième période – à peu près l'entre-deux guerres 180
§ Troisième période – prémoderne : environ 1940-1955 185
§ Quatrième période – période moderne : environ 1955-1970 . . 189
§ *Aspects probabilistes* 198
§ *Nouvelles discussions et extensions ; problèmes inverses* 199

Bibliographie **201**
Table des matières **217**
Index **221**

https://spartacus-idh.com

Index

B

Balayage 49, 81
Blaschke-Privaloff, paramètres — 40
BLD, fonctions — 115

C

Capacité
  classique 63
  de Choquet 67
  extérieure 65
  généralisée 72
  intérieure 65, 70
Conforme, transformation — ... 154
Convexité, théorème de Riesz 45

D

Dirichlet
  norme 32
  principe 113
  problème 91, 149
Distribution
  capacitaire 40
  d'équilibre 110
Domination, principe de — 109, 111, 122

E

Effilé, ensemble — 83
Énergie 119
Équilibre (principe distribution) 110
Extrémaux, éléments — 133

F

Fine
  limite — 89, 138
  topologie — 88, 138
Fondamentale, fonction harmonique — 152, 172

G

Green
  fonction de — 103
  formules de — 150

H

Harmonique, fonction — 147
Harnack, inégalités de — 163

K

K-analytique, ensemble — 72
Kelvin, transformation de — ... 172

L

Laplacien 151
Limite fine 89, 138

M

Martin, frontière de — 133
Maximum
  principe 29, 148
  principe de Cartan 122
  Principe de Maria-Frostman 109
Meilleure minorante harmonique 108
Mesure harmonique 95
Minimale, fonction — 137

N

Noyau 75
  régulier 77

P

Plurisousharmoniques 50
Poisson, intégrale de — 161

© Spartacus-Idh 2019

Polaire, ensemble — 51
Potentiel
capacitaire 64
classique 55
de double couche 158
général 75
logarithmique 86, 129, 157
newtonien 86, 129, 174, 176
Presque surharmonique, fonction 47
Pseudo-limite 89

R

Régularisée
inférieure 29
surharmonique 47
Régulier, point frontière et ouvert 97
Résolutivité 93

S

S_B-fonction 48
Sousharmonique, fonction . . . 39, 42
Surharmonique, fonction 39, 41
Surmédiane, fonction 48

W

Wiener, théorème de résolutivité . 94

https://spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2019

https://spartacus-idh.com

N° d'édition : mrm2-p-8
Dépôt Légal : décembre 2017
Achevé d'imprimer : décembre 2017

Imprimé en France par

AQUIPRINT

33520 Bruges
www.impression-edition-gironde.com