

Autour de la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Cours Peccot, Collège de France

Gabriel Dospinescu

© Spartacus-Idh 2019

Spartacus Supérieur
Collection Les cours Peccot
dirigée par Pierre Cartier

Autour de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Cours Peccot, Collège de France

Gabriel Dospinescu

Chargé de recherche au CNRS
Ens Lyon

Mai 2015

© Spartacus-Idh 2019

Spartacus IDH

https://spartacus-idh.com

ISBN : 978-2-36693-040-5
© Spartacus-idh, Paris 2019

Avant-propos

Le matériel présenté ici est une version détaillée de mon cours Peccot, donné en mai 2015 au Collège de France, ainsi que d'un cours donné à l'Université de Fudan en octobre-décembre 2015, à l'invitation de Wang Shanwen. Nous présentons, sans évoquer les points techniques pénibles, les principaux résultats et idées du travail [DLB 17] en collaboration avec Arthur-César Le Bras, autour d'une conjecture faite par Christophe Breuil et Matthias Strauch. Ainsi, le lecteur intéressé par les preuves détaillées des résultats énoncés et partiellement démontrés ici devra aussi consulter [DLB 17]. La conjecture de Breuil et Strauch fournit une réalisation géométrique particulièrement élégante de la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, pour beaucoup de représentations du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, dans la cohomologie cohérente de la tour de Drinfeld.

Le premier chapitre est un survol des résultats principaux, le but étant d'énoncer proprement la conjecture de Breuil et Strauch. En particulier, nous rappelons rapidement la construction de la tour de Drinfeld, la description des formes différentielles sur le demi-plan de Drinfeld (que la conjecture de Breuil et Strauch essaie d'étendre aux revêtements du demi-plan). L'énoncé de la conjecture fait intervenir les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands « classiques » pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, ainsi que celle p–adique. Nous rappelons ces constructions fondamentales, et leur lien avec la théorie de Hodge p–adique.

Le deuxième chapitre a pour but de démontrer une version très faible, mais cruciale de la conjecture. Il utilise pleinement des méthodes globales, essentiellement une combinaison du théorème d'uniformisation p–adique de certaines courbes de Shimura (dû à Cerednik et Drinfeld) et du théorème de compatibilité local-global d'Emerton (vaste généralisation du théorème de compatibilité local-global d'Eichler-Shimura, Igusa, Langlands, Deligne, Carayol et Saito). Nous rappelons tous ces résultats de manière assez détaillée, et les appliquons pour démontrer la version faible de la conjecture.

Le troisième chapitre porte sur les constructions magiques de Colmez, intervenant dans la construction de la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Les résultats sont techniquement très lourds, mais nous avons essayé d'en faire un résumé plutôt accessible (en évitant, bien sûr, d'en discuter les démonstrations…). Nous expliquons comment utiliser les (φ,Γ)–modules pour étudier les

© Spartacus-Idh 2019

représentations de Banach de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, et comment les équations différentielles p–adiques peuvent être utilisées pour munir ces représentations de structures de fibrés $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$–équivariants sur le demi-plan de Drinfeld. Bien que très technique, ce résultat joue un rôle crucial dans la preuve de la conjecture.

Le quatrième chapitre utilise tout ce qui précède pour démontrer la conjecture (en fait, une version plus faible ; la version forte, énoncée sous la forme du théorème 1.35 dans le premier chapitre, s'en déduit, mais pas sans travail pénible supplémentaire, pour lequel on renvoie à [DLB 17]).

Je voudrais remercier avant tout Arthur-César pour une très intense collaboration et des discussions toujours éclairantes. Les discussions avec Christophe Breuil, Pierre Colmez et Laurent Fargues ont été cruciales dans l'aboutissement de ce travail, et je voudrais les remercier de tout coeur. Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans les travaux de Breuil, Colmez et Emerton, et sans les méthodes et suggestions de Colmez. Je remercie le Collège de France pour l'opportunité d'expliquer ce travail, ainsi que Wang Shanwen pour une invitation à l'Université de Fudan. Ces deux cours m'ont grandement aidé à clarifier un certain nombre de points. Je voudrais remercier Benjamin Schraen pour une invitation à l'IHES pendant la durée du cours Peccot, et pour bon nombre de discussions intéressantes pendant ce séjour. Je remercie enfin Konstantin Ardakov, Elmar Grosse-Klönne, Vincent Pilloni, Peter Scholze, Matthias Strauch, et Jared Weinstein pour des discussions concernant ce travail.

https://spartacus-idh.com

Table des matières

Avant-propos *v*

Table des matières *vii*

Préface *1*

1 — Le programme de Langlands *1*
2 — Le programme de Langlands p-adique *3*
3 — La correspondance locale *7*
4 — Bibliographie *10*

15 **Chapitre 1**
La conjecture de Breuil et Strauch

1 — La tour de Drinfeld *15*
2 — Le complexe de de Rham de Ω *18*
3 — Représentations l-adiques et de Weil-Deligne *19*
3.1 — Représentations de Weil-Deligne *20*
3.2 — Correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands *21*
3.3 — La cohomologie l–adique de la tour de Drinfeld *23*
4 — Représentations p–adiques et de Weil-Deligne *24*
5 — La correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *29*
5.1 — Représentations de Banach et localement analytiques de G *29*
5.2 — Le foncteur de Colmez *31*
5.3 — La correspondance p–adique *33*
6 — Les principaux résultats de ce cours *34*

37 **Chapitre 2**
Uniformisation p-adique et compatibilité local-global

1 — Introduction *37*
2 — Uniformisation complexe *38*
3 — Uniformisation p-adique *40*
4 — Préliminaires sur la cohomologie de de Rham de Σ_n *44*

© Spartacus-Idh 2019

5 — Compatibilité local-global-le cas des courbes modulaires *45*
5.1 — La situation « classique » *45*
5.2 — Cohomologie complétée et compatibilité local-global *47*
6 — Analyse spectrale *52*

55 **Chapitre 3**
(φ,Γ)–modules et représentations localement analytiques

1 — Rappels sur les (φ,Γ)–modules *57*
2 — Les constructions magiques de Colmez *59*
3 — L'action infinitésimale de G sur $\Pi(V)$ *65*
4 — Équations différentielles p-adiques *67*
5 — L'opérateur ∂ *68*
6 — La représentation $\Pi[2]$ *70*
7 — La structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module *70*

73 **Chapitre 4**
Fin de la preuve

1 — Fibrés de Drinfeld et de Lubin-Tate *74*
2 — Descente sur l'espace des périodes *76*
3 — Surjectivité de F *77*
4 — Injectivité du morphisme *80*
5 — Le modèle de Kirillov de Colmez *82*

Bibliographie *87*

Index *93*

Index des notations *94*

https://spartacus-idh.com

Préface

Pierre Colmez
CNRS, IMJ-PRG
Université Pierre et Marie Curie

Le cours Peccot de Gabriel Dospinescu est consacré à la preuve d'une conjecture de Breuil et Strauch concernant la correspondance de Langlands locale p–adique. Il constitue une bonne introduction aux techniques utilisées dans cette correspondance et, dans cette préface [1], je vais essayer d'expliquer d'où vient le problème en remontant assez loin dans le temps.

1 Le programme de Langlands

Le programme de Langlands est un programme multi-facettes dont un des buts est de comprendre le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (ou plus généralement le groupe de Galois absolu Gal_K d'un corps de nombres K, *i.e.* d'une extension finie K de $\mathbb{Q}$) à travers ses $\mathbb{C}$–représentations [2], en reliant ces représentations à des objets provenant de l'analyse harmonique sur des groupes arithmétiques (formes modulaires, formes automorphes ou représentations automorphes). Si $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$–représentation de Gal_K, on sait associer à ρ une fonction $s \mapsto L(\rho, s)$, holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, et un des buts du programme de Langlands est de prouver la conjecture d'Artin (1923), selon laquelle $s \mapsto L(\rho, s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier (avec un pôle éventuel en $s = 1$).

Le théorème de Kronecker-Weber. D'après un théorème classique de théorie de Galois, si N est un entier $\geqslant 1$, alors $\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{N}})$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Il s'ensuit que l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{\mathrm{cyl}}$ de $\mathbb{Q}$, obtenue en rajoutant toutes les racines de l'unité, est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois $\varprojlim_N (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = \widehat{\mathbb{Z}}^* = \prod_p \mathbb{Z}_p^*$.

(1) Le lecteur intéressé pourra consulter [20] pour une perspective un peu différente.
(2) Si G est un groupe et L un corps, on utilise la terminologie « L–représentation » pour désigner, suivant les cas, un L-espace vectoriel V muni d'une action L-linéaire (continue si L a une topologie) de G ou bien le morphisme de groupe (continu) $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ qui s'en déduit.

© Spartacus-Idh 2019

D'après le théorème de Kronecker-Weber (1853-1886), toute extension finie de $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois abélien, est contenue dans $\mathbb{Q}^{\mathrm{cyl}}$. On en déduit que le plus grand quotient abélien $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ est $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cyl}}/\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^*$.

Comme $\mathbb{C}^*$ est abélien, il s'ensuit que, si $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ est une $\mathbb{C}$–représentation de dimension 1, il existe un caractère de Dirichlet $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$, tel que ρ soit obtenue en composant les applications naturelles $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^* \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ avec χ. On a alors $L(\rho,s) = L(\chi,s) = \sum_{n\geqslant 1} \chi(n) n^{-s}$, et comme il est très facile de prouver que $s \mapsto L(\chi,s)$ a un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, cela prouve la conjecture d'Artin pour les représentations de dimension 1 de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$.

La théorie du corps de classes. Soit K un corps de nombres. Si

$$\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$

est une représentation de dimension 1, alors ρ se factorise à travers le plus grand quotient abélien $\mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}}$ de Gal_K, et la description de ce groupe est l'objet de la théorie du corps de classes qui a occupé les arithméticiens pendant une trentaine d'années (fin du 19ème-siècle jusqu'aux années 1920). Une formulation compacte a été rendue possible grâce à l'introduction de l'anneau $\mathbb{A}_K$ des adèles [3] de K (Artin-Whaples (1945) ; auparavant Chevalley (1940) avait défini le groupe des idèles qui, a posteriori, n'est autre que le groupe $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_K) = \mathbb{A}_K^*$ des éléments inversibles de $\mathbb{A}_K$). Alors

$$\mathrm{Gal}_K^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{A}_K^*/K^* \cdot (K \otimes \mathbb{R})_+^*,$$

où $(K \otimes \mathbb{R})_+^*$ est la composante connexe de 1 dans $(K \otimes \mathbb{R})^*$. [4]

Il résulte de ce qui précède qu'il y a une bijection naturelle $\rho \longleftrightarrow \pi$ entre les $\mathbb{C}$–représentations de dimension 1 de Gal_K et les $\mathbb{C}$–représentations de dimension 1 de $\mathbb{A}_K^*/K^*$ d'image finie. L'intérêt de cette bijection est qu'elle préserve les fonctions L, et Tate a montré dans sa thèse (1950), sous la direction d'Artin, comment utiliser l'analyse de Fourier sur les groupes $\mathbb{A}_K$ et $\mathbb{A}_K^*$ pour prouver que les $L(\pi,s)$ sont holomorphes [5] sur $\mathbb{C}$ tout entier (à l'exception d'un pôle simple dans certains cas exceptionnels), et donc que les $L(\rho,s)$ le sont.

(3) On peut définir $\mathbb{A}_K$, de manière compacte, comme $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, où $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times (\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$, et $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_N (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est le complété profini de $\mathbb{Z}$ (c'est aussi le produit des $\mathbb{Z}_p$, où p décrit l'ensemble des nombres premiers). De manière peut-être plus parlante, $\mathbb{A}_K$ est le produit (restreint) de tous les complétés possibles de K : par exemple, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \{x = (x_\infty, x_2, x_3, x_5, \dots)\}$, avec $x_\infty \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{Q}_2$, $x_3 \in \mathbb{Q}_3$, etc., et $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour presque tout p premier, (*i.e.* sauf un nombre fini de p). Pour un K général, on note S_K l'ensemble des *places* de K (*i.e.* des classes d'équivalence de normes non triviales $|\ | : K \to \mathbb{R}_+$), et, si $v \in S_K$, K_v le complété de K pour la norme $|\ |_v$ correspondante (cette norme est ultramétrique sauf pour un nombre fini de v, et alors $\mathscr{O}_v = \{x \in K_v,\ |x|_v \leqslant 1\}$ est un sous-anneau – l'anneau des entiers – de K_v) ; alors $\mathbb{A}_K$ est l'ensemble des $(x_v)_{v \in S_K}$ avec $x_v \in K_v$ pour tout v et $x_v \in \mathscr{O}_v$ pour tout v sauf un nombre fini.

(4) Par exemple, si $K = \mathbb{Q}$, alors $K \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$ et donc $(K \otimes \mathbb{R})_+^* = \mathbb{R}_+^*$, et $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des $x = (x_\infty, x_2, x_3, \dots,)\}$, avec $x_\infty \in \{\pm 1\}$, $x_2 \in \mathbb{Q}_2^*$, $x_3 \in \mathbb{Q}_3^*$, etc., et $x_p \in \mathbb{Z}_p^*$ pour presque tout p premier ; comme $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Z}_p^* \times p^{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Q}^* = \{\pm 1\} \times (\oplus_p p^{\mathbb{Z}})$, on retrouve le théorème de Kronecker-Weber sous la forme $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} = \prod_p \mathbb{Z}_p^*$.

(5) Cette holomorphie a été démontrée, sans recours à l'analyse sur les adèles, par Hecke (1920), mais l'introduction des méthodes adéliques simplifie considérablement la preuve.

https://spartacus-idh.com

Représentations automorphes. On veut étendre ce qui se précède à la dimension n, ce qui va demander de remplacer le groupe GL_1 ci-dessus par $G=\mathrm{GL}_n$.

Si Φ est un espace de fonctions sur $G(\mathbb{A}_K)$, on peut faire agir $g\in G(\mathbb{A}_K)$ et $\gamma\in G(K)$ sur X grâce aux formules

$$(g\cdot\phi)(x)=\phi(xg)\quad\text{et}\quad(\gamma\star\phi)(x)=\phi(\gamma^{-1}x).$$

Ces deux actions commutent, ce qui fait que $G(\mathbb{A}_K)$ agit sur l'espace $H^0(G(K),\Phi)$ des fonctions fixes sous l'action $G(K)$ (*i.e.* sur l'espace des fonctions sur $G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K)$) et on peut s'intéresser aux représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}_K)$ apparaissant dans cet espace.

Par exemple, si $G=\mathrm{GL}_1$, et si Φ est l'espace des fonctions continues sur $G(\mathbb{A}_K)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, les représentations qui apparaissent sont exactement les caractères continus $\mathbb{A}_K^*/K^*\to\mathbb{C}^*$ qui se sont manifestés plus haut.

Si $G=\mathrm{GL}_n$, on prend pour Φ un espace bien choisi (proche [6] de L^2 pour pouvoir faire de l'analyse de Fourier), et les représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}_K)$ qui apparaissent dans $H^0(G(K),\Phi)$ sont dites *automorphes*. On sait associer [51, 44] à une représentation automorphe π une fonction $L(\pi,s)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$, et on conjecture que, pour tout $\rho:\mathrm{Gal}_K\to G(\mathbb{C})$, irréductible, il existe $\pi(\rho)$ automorphe telle que $L(\rho,s)=L(\pi(\rho),s)$, ce qui prouverait la conjecture d'Artin sous une forme particulièrement satisfaisante.

Ce qui précède n'est qu'une petite partie [7] de l'édifice dont l'existence est conjecturée par Langlands et dont l'un des principes directeurs est le principe de fonctorialité [58] selon lequel toute opération qui a un sens du coté Galois doit avoir une traduction du côté automorphe.

Un des premiers grands succès du programme de Langlands a été la preuve de la conjecture d'Artin pour des représentations de dimension 2. Si $\rho:\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$–représentation de dimension 2, l'image de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est abélienne, diédrale, ou bien isomorphe à A_4, S_4 ou A_5. La conjecture d'Artin dans les cas abélien et diédral a été prouvée par Artin lui-même, celle dans les cas A_4 et S_4 par Langlands et Tunnell [59, 74]. Le cas de A_5 a résisté, jusqu'ici, aux méthodes classiques. Par contre les méthodes p–adiques, dont il est question ci-dessous, ont permis ([72, 11],...,[62]) de traiter ce cas pour les représentations *impaires* (celles pour lesquelles $\det\rho(c)=-1$, où c est la conjugaison complexe, *i.e.* $\rho(c)$ est une symétrie et pas une homothétie).

2 Le programme de Langlands p-adique

Le programme de Langlands p–adique est aussi un programme multi-facettes dont un des buts est de comprendre les représentations p–adiques de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ (ou, plus généralement, de Gal_K, si K est un corps de nombres), en particulier de prouver

(6) Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ n'est pas de volume fini, et il faut prendre un peu de précautions.
(7) En particulier, on peut prendre pour G n'importe quel groupe algébrique réductif (par exemple un groupe symplectique, unitaire ou orthogonal, ou encore le groupe des unités d'une algèbre de quaternions, etc.), et pas seulement le groupe GL_n.

© Spartacus-Idh 2019

une conjecture de Fontaine et Mazur [43] sur les représentations [8] « géométriques », en termes de formes modulaires (ou automorphes) p–adiques ou de représentations p–adiques de groupes adéliques [9]. Une raison pour l'introduction de ce programme est que les formes ou représentations automorphes, et les représentations complexes de Gal_K sont des objets extrêmement rigides, alors que leurs analogues p–adiques peuvent se déformer continûment (ceci a été utilisé avec profit par Wiles [76] pour démontrer le théorème de Fermat ou, plus exactement, un énoncé d'automorphie (modularité de courbes elliptiques) impliquant le théorème de Fermat grâce aux travaux de Ribet [63] sur la conjecture de Serre rappelée ci-dessous ; ce résultat relevait du programme de Langlands classique, mais résistait aux méthodes classiques ; les travaux de Wiles ont donné un fort coup d'accélérateur au programme de Langlands p–adique). Un des points de départ de ce programme est d'ailleurs les travaux de Serre (dans les années 1970) et Hida (dans les années 1980) sur les familles p–adiques de formes modulaires et les représentations galoisiennes qui leur sont associées [69, 49, 50]. Contrairement au programme de Langlands classique, la forme précise que doit prendre le programme p–adique n'est pas encore parfaitement claire. En particulier, on n'a pas encore d'énoncé correspondant au principe de fonctorialité qui sert de fil conducteur dans le cas classique.

La conjecture de Serre. Un point saillant du monde p–adique est la possibilité de réduire modulo p, et le programme de Langlands p–adique comporte un programme modulo p dont le point de départ est la conjecture de Serre, énoncée (sous une forme embryonnaire) dans une lettre à Tate du 1er mai 1973 [71].

Je vais être prudent, et considérer uniquement des représentations

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q), \qquad q = p^f,$$

non ramifiées en dehors de p et vérifiant la condition suivante :

$$\det\rho : \mathrm{Gal} \to \mathbb{F}_q^* \text{ est égal à } \chi^{k-1} \quad (k \text{ pair}), \qquad (*)$$

où $\chi : \mathrm{Gal} \to \mathbb{F}_q^*$ est le caractère fondamental modulo p (donnant l'action sur μ_p).

(8) Si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, une L–représentation $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(L)$ est *géométrique* si elle est irréductible, sa restriction à $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_\ell}$ est non ramifiée sauf pour un nombre fini de nombres premiers $\ell \neq p$, et sa restriction à $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$ est de de Rham (voir plus loin). La conjecture de Fontaine-Mazur, qui date de 1988, prédit qu'une telle représentation vient de la géométrie ce qui a des tas de conséquences qui semblent absurdes au vu du peu de conditions imposées.

(9) Une forme modulaire classique f est une fonction sur $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ vérifiant une propriété d'invariance sous l'action d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Comme $\mathscr{H} \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, on peut associer à f, de manière naturelle, une fonction ϕ_f sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, invariante par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, et donc une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ en considérant l'espace des translatés de ϕ_f par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ (les actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ sont celles considérées plus haut). Cela fournit un lien assez transparent entre formes modulaires et représentations automorphes. En p–adique, ce lien est moins évident ce qui explique que le point de vue des représentations p–adiques de groupes adéliques n'ait été introduit que relativement récemment.

https://spartacus-idh.com

En fait, cette condition équivaut à :

> L'image par ρ du Frobenius réel a pour valeurs propres $+1$ et -1 (*i.e.* $\det\rho$ est un caractère *impair*). (∗∗)

(Si, au lieu de $\mathbb{F}_q$, on avait $\mathbb{C}$, la condition (∗∗) équivaudrait à dire que la fonction L d'Artin correspondante a pour facteur γ tout juste $\Gamma(s)$ et pas $\Gamma(s/2)^2$ ni $\Gamma((s+1)/2)^2$.)

Si $\ell \neq p$, la trace et le déterminant de $\rho(\mathrm{Frob}_\ell)$ ont un sens évident ; note-les a_ℓ et ℓ^{k-1}, et forme la série de Dirichlet (à coefficients dans $\mathbb{F}_q$) $\prod_{\ell\neq p}\left(1-a_\ell\ell^{-s}+\ell^{k-1-2s}\right)^{-1}$, à la Hecke ; note-la $\sum a_n n^{-s}$, et forme la série formelle

$$f=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n,$$

où cette fois q désigne une indéterminée… mille excuses pour avoir appelé q le nombre d'éléments du corps fini, mais j'ai la flemme de recommencer pour si peu !

Conjecture. — *La série f est une forme modulaire (modulo p) sur* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *de poids congru à k mod $(p-1)$.*

Cette conjecture (prouvée depuis par Khare et Wintenberger [52, 53] avec l'aide de Kisin [55]) n'a été publiée [70] qu'en 1987 (sous une forme renforcée impliquant le théorème de Fermat [(10)]). Notons qu'elle est énoncée dans le langage des formes modulaires, et une question naturelle [70, question 3.4 (2)] est :

> Peut-on formuler ces conjectures dans le cadre d'une théorie des représentations (mod p) des groupes adéliques ? Autrement dit, existe-t-il une « philosophie de Langlands modulo p », comme le demandent Ash et Stevens dans [1] ? Si oui, cela permettrait peut-être :
>
> de donner une définition plus naturelle du poids k attaché à ρ ;
>
> de remplacer GL_2 par GL_N, ou même par un groupe réductif ;
>
> de remplacer $\mathbb{Q}$ par d'autres corps globaux.

Des formes modulo p aux formes p–adiques. Passer du modulo p au p–adique est parfaitement naturel comme le montre cette question de Tate à Serre dans une lettre du 21 juin 1974 [71].

> A question I've been meaning to ask you is this.
>
> Langlands says: complex representation $\longleftrightarrow$ complex modular form
>
> You say: representation modulo ℓ $\longleftrightarrow$ modular form modulo ℓ.
>
> What about: ℓ–adic representation $\longleftrightarrow$ ℓ–adic modular form??

On manquait d'outils pour formuler proprement le problème à l'époque. Cela a changé avec les travaux de Hida, Gouvéa-Mazur, Coleman-Mazur, Coleman, etc. Je

(10) Si $a^p+b^p=c^p$ est un contre-exemple au théorème de Fermat, la $\mathbb{F}_p$–représentation de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$, de dimension 2, fournie par les points de p–torsion de la courbe elliptique introduite par Hellegouarch [47], d'équation $y^2=x(x-a^p)(x+b^p)$, est un contre-exemple à la conjecture de Serre.

© Spartacus-Idh 2019

renvoie à l'exposé Bourbaki d'Emerton [32] pour une introduction lucide à ce cercle d'idées.

Représentations automorphes p–adiques. Soient K un corps de nombres et $G = \mathrm{GL}_n$, avec $n \geqslant 1$. Pour définir la notion de représentation automorphe p–adique, on aurait envie de copier la définition complexe et de considérer les représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}_K)$ apparaissant dans $H^0(G(K), \Phi)$, en prenant pour Φ l'espace $\mathscr{C}(G(\mathbb{A}_K))$ des fonctions continues sur $G(\mathbb{A}_K)$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$ (ou, plus généralement, dans un corps p–adique complet L).

Si $n = 1$, ce qui précède marche très bien : on obtient les caractères continus $\mathbb{A}_K^*/K^* \to L^*$, et la théorie du corps de classes fournit une bijection entre ces caractères et les L–représentations [11] $\rho : \mathrm{Gal}_K \to L^*$ de dimension 1.

Si $n \geqslant 2$, le groupe $H^0(G(K), \Phi)$ ne contient pas assez de représentations de $G(\mathbb{A}_K)$. Le problème est qu'une fonction continue sur $G(\mathbb{A}_K)$ est déjà constante modulo $G(K \otimes \mathbb{R})_+$ car $G(K \otimes \mathbb{R})_+$ est connexe, alors que $\mathbb{Q}_p$ est totalement discontinu. Or on la force à être aussi constante modulo $G(K)$, et $G(K) \cdot G(K \otimes \mathbb{R})_+$ n'est pas loin d'être dense dans $G(\mathbb{A}_K)$, ce qui fait que $H^0(G(K), \Phi)$ est « trop petit ». On est donc amené à considérer les représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}_K)$ apparaissant dans les $H^i(G(K), \Phi)$, pour $i \geqslant 1$. (Des conjectures de Calegari et Emerton [12, 35] suggèrent qu'il y a un unique i, dépendant de G et de K, tel que $H^i(G(K), \Phi)$ soit intéressant ; si $G = \mathrm{GL}_2$ et si $K = \mathbb{Q}$, le seul i intéressant est $i = 1$.)

La version modulo p de ce qui précède consiste à prendre pour Φ l'espace des fonctions continues sur $G(\mathbb{A}_K)$ à valeurs dans $\mathbb{F}_p$ (ou sa clôture algébrique).

L'espace $\Phi = \mathscr{C}(G(\mathbb{A}_K), L)$ contient plusieurs sous-espaces intéressants ; en particulier, l'espace Φ^{alg} des fonctions qui sont « localement constantes hors de p et localement algébriques [12] en p ». Le sous-groupe $H^i(G(K), \Phi^{\mathrm{alg}})$ est constitué de représentations reliées aux représentations automorphes classiques, et permet de faire le pont entre le programme de Langlands p–adique et le programme classique.

Représentations automorphes p–adiques et représentations galoisiennes. On ne sait pas, en général, comment établir un lien entre les représentations automorphes p–adiques telles que définies ci-dessus et les représentations de Gal_K. Il y a quand-même des cas où sait le faire : par exemple, si $n = 2$ et $K = \mathbb{Q}$, le groupe $H^1(G(\mathbb{Q}), \Phi)$ est relié à la cohomologie étale p–adique de la tour des courbes modu-

(11) Notons qu'une telle représentation n'est pas forcément d'image finie contrairement au cas complexe ; cette différence de comportement est due au fait que Gal_K est un groupe profini.

(12) Le groupe $G(\mathbb{A}_K)$ est le produit restreint de $G(\mathbb{R} \otimes K)$ et des $G(\mathbb{Q}_\ell \otimes K)$, pour ℓ premier ; on peut donc écrire $x \in G(\mathbb{A}_K)$ sous la forme $(x_\infty, x_2, x_3, \dots)$, et on considère les ϕ qui sont localement constantes en la variable x_ℓ, si $\ell \neq p$, et localement polynomiales en les coordonnées de x_p et en $(\det x_p)^{-1}$. (Plus précisément, on demande que $g \mapsto g \cdot \phi$ soit constante sur un sous-groupe ouvert de $\prod_{\ell \neq p} G(\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathscr{O}_K)$ et polynomiale sur un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{Z}_p \otimes \mathscr{O}_K)$, où $\mathscr{O}_K$ est l'anneau des entiers de K.) Notons que, comme les topologies de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Q}_\ell$ sont très différentes, si $p \neq \ell$, les fonctions continues de $G(\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathscr{O}_K)$ dans L ne présentent pas beaucoup de subtilité. Par contre les fonctions continues de $G(\mathbb{Z}_p \otimes \mathscr{O}_K)$ dans L ont beaucoup de sous-espaces naturels, comme dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle. Il s'ensuit que les complications posées par les places non archimédiennes dans le cas classique sont transférées aux places p–adiques ; les autres places ne voient pas leur rôle changer beaucoup en passant de la situation classique au p–adique.

https://spartacus-idh.com

laires, et comme cette tour est définie sur $\mathbb{Q}$, ce groupe est muni d'une action de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ commutant à celle de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. On peut alors espérer que :

• Si $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$ est irréductible, impaire, alors la représentation

$$\mathrm{Hom}(\rho, H^1(G(\mathbb{Q}), \Phi)) \text{ de } G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$$

(*i.e.* la multiplicité de ρ dans $H^1(G(\mathbb{Q}), \Phi)$) est non nulle et peut se décrire en termes de la correspondance locale (p–adique).

• Si ρ est de plus « géométrique » (et à poids de Hodge-Tate distincts), alors $\mathrm{Hom}(\rho, H^1(G(\mathbb{Q}), \Phi^{\mathrm{alg}})) \neq 0$.

Le premier point, qui fournit une « description automorphe » des représentations p–adiques impaires de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$, de dimension 2, est une variante d'une conjecture d'Emerton [33, 34], et le second est la combinaison d'un cas particulier de la conjecture de Fontaine-Mazur avec le programme de Langlands classique. Ces deux énoncés sont en grande partie démontrés [54, 56, 34] (un ingrédient important des preuves est la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ que nous rencontrerons un peu plus loin).

3 La correspondance locale

Les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales. On suppose de nouveau que $G = \mathrm{GL}_n$ et que K est un corps de nombres. Le groupe $G(\mathbb{A}_K)$ est le produit restreint [13] des $G(K_v)$, pour $v \in S_K$. Il s'ensuit qu'une représentation automorphe π de $G(\mathbb{A}_K)$ se factorise [14] sous la forme $\pi = \otimes_{v \in S_K} \pi_v$, où π_v est une représentation irréductible de $G(K_v)$.

La factorisation ci-dessus permet de décomposer beaucoup de problèmes « globaux » (*i.e.* concernant $G(\mathbb{A}_K)$) en problèmes « locaux » (concernant $G(K_v)$). Une composante fondamentale du programme de Langlands est sa version « locale » reliant représentations (complexes) de groupes algébriques p–adiques (comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) et représentations de groupes de Galois de corps p–adiques (correspondance de Langlands locale), ainsi que représentations de deux groupes algébriques p–adiques devenant isomorphes sur une clôture algébrique (comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et D^*, où D est l'algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}_p$) (correspondance de Jacquet-Langlands locale).

La correspondance de Langlands locale pour GL_2 a été établie par Jacquet-Langlands [51], Tunnell [73] et Kutzko [57] (voir aussi [10]). Le cas de GL_n a été résolu par Harris et Taylor [46] et par Henniart [48]. De fait, Harris et Taylor font mieux qu'établir la correspondance : ils en donnent une réalisation géométrique, suivant un programme initié par Carayol [15].

(13) I.e. l'ensemble des $(g_v)_{v \in S_K}$, avec $g_v \in G(K_v)$ pour tout v et $v \in G(\mathcal{O}_v)$ sauf pour un nombre fini de v.

(14) Il s'agit d'un produit tensoriel restreint (éventuellement complété suivant la définition que l'on prend de représentation automorphe) : en dehors d'un ensemble fini de v, l'espace des invariants de π_v sous l'action de $G(\mathcal{O}_v)$ est de dimension 1 ; on en choisit une base a_v, et on considère l'espace engendré par les tenseurs de la forme $\otimes_v x_v$, avec $x_v = a_v$ sauf pour un nombre fini de v.

© Spartacus-Idh 2019

Une correspondance locale p–adique ? Une composante locale pour le programme de Langlands p–adique a longtemps relevé du fantasme. Il y avait bien quelques travaux du côté des représentations p–adiques ou modulo p des groupes algébriques p–adiques, mais aucun lien avec les représentations galoisiennes. Parmi ces travaux mentionnons ceux de Barthel et Livné [2, 3] donnant un début de classification des représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$, où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, sur un corps de caractéristique p, et ceux de Schneider et Teitelbaum [65, 66, 67, 68] développant les fondements d'une théorie générale des représentations p–adiques de groupes algébriques p–adiques, avec l'introduction d'un certain nombre de concepts utiles (admissibilité, vecteurs localement analytiques ou localement algébriques, etc.) à laquelle il manquait un « Lemme de Schur » qui a été démontré par la suite [28].

En ce qui concerne les représentations de Gal_F, la situation était bien meilleure car Fontaine avait développé [38, 39, 40, 42], depuis le début des années 1980, un programme visant à classifier et décrire ces représentations en termes plus concrets. Le programme de Fontaine était arrivé à maturité à la fin des années 1990, avec la preuve des principales conjectures de Fontaine (*cf.* [17] pour un panorama des résultats). La stratégie de Fontaine part de l'observation suivante : si on dispose d'un anneau B, muni d'une action de Gal_F et de structures additionnelles stables sous l'action de Gal_F, on peut associer à toute représentation de Gal_F un invariant $D_B(V)=H^0(\mathrm{Gal}_F, B\otimes V)$ qui est un B_F-module, où $B_F=H^0(\mathrm{Gal}_F,B)$, muni des structures additionnelles sur B et qui est souvent plus facile à décrire que la représentation V dont on est parti. Un tel anneau B permet en outre de découper la sous-catégorie des *représentations B–admissibles* (celles pour lesquelles $\dim_{B_F} D_B(V)=\dim_{\mathbb{Q}_p} V$). Tout l'art consiste à ciseler de bons anneaux et Fontaine a été un véritable orfèvre en la matière. Il a, en particulier, construit [39, 41] des anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\subset\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\subset\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ pour comprendre les représentations provenant de la géométrie (et construire le « foncteur mystérieux » dont l'existence avait été pressentie par Grothendieck) ; les *représentations de de Rham* apparaissant dans la conjecture de Fontaine-Mazur (note (8)) sont les représentations B_{dR}–admissibles.

La situation a changé au début des années 2000 quand Breuil a compris ce que l'on pouvait attendre d'une correspondance de Langlands locale p–adique dans le cas des représentations de de Rham et fasse des conjectures précises [5, 6, 7, 9] pour les représentations de dimension 2 de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$ (voir aussi [Bre 08] pour des considérations historiques).

La correspondance p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. La preuve [18, 4] des conjectures de Breuil a débouché sur une correspondance pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ avec des propriétés particulièrement satisfaisantes [19, 61, 24]. Si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, cette correspondance associe à toute L–représentation ρ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$ une représentation unitaire $\Pi(\rho)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (*i.e.* un L-espace de Banach, muni d'une action L-linéaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ laissant globalement stable la boule unité). Cette correspondance vérifie des tas de propriétés mirifiques : elle est compatible à la réduction modulo p, à la torsion par un caractère, à la théorie locale du corps de classe ; elle est fonctorielle, ce qui implique qu'elle se comporte bien en famille ; enfin, elle contient et raffine la correspondance classique [19, 27, 21].

Une réalisation géométrique ? La situation pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est donc remarquablement bien comprise. Par contraste, on ne sait pas vraiment à quoi s'attendre pour

https://spartacus-idh.com

$\mathrm{GL}_n(F)$, si $n \geqslant 3$ ou si $[F:\mathbb{Q}_p] \geqslant 2$. Une solution possible à ce problème serait de fabriquer une réalisation « géométrique » de la correspondance pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ avec l'espoir que l'énoncé obtenu se généralise naturellement à $\mathrm{GL}_n(F)$ pour tous n et F. Une telle approche [13], utilisant la cohomologie étale de tours de variétés de Shimura associées à des groupes unitaires, fournit des candidats pour $\Pi(\rho)$, si ρ est une représentation irréductible de dimension n de Gal_F. Le problème de cette approche est qu'elle semble fournir beaucoup trop de $\Pi(\rho)$, chacun dépendant d'une multitude de choix auxiliaires, et qu'on ne sait pas prouver que tous ces choix aboutissent au même $\Pi(\rho)$ (il n'est d'ailleurs pas totalement clair que l'on puisse vraiment espérer que ce soit le cas).

La tour de Drinfeld. Pour éviter ce problème des choix auxiliaires, l'idéal serait de réaliser la correspondance dans la cohomologie d'un objet local. Ce programme a été mené à bien pour la correspondance classique, grâce aux travaux de Drinfeld, Carayol, Harris et Taylor, Faltings, Dat et Fargues [30, 31, 14, 15, 45, 46, 36, 26, 37]. Drinfeld a construit une tour $\mathscr{M}_\infty(F,n)$ d'espaces analytiques munie d'actions de G, $\check{G}$, et W_F, où $G=\mathrm{GL}_n(F)$, $\check{G}$ est le groupe des unités de l'algèbre à divisions d'invariant $\frac{1}{n}$, et $W_F \subset \mathrm{Gal}_F$ est le groupe de Weil de F. La cohomologie de $\mathscr{M}_\infty(F,n)$ est donc munie d'une action du groupe $G\times\check{G}\times W_F$. C'est en particulier le cas de la cohomologie étale ℓ-adique, avec $\ell\neq p$, et on peut se demander quelles représentations de W_F apparaissent dans cette cohomologie étale, et avec quelle multiplicité. Le résultat est particulièrement satisfaisant car les représentations qui apparaissent sont (essentiellement) les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$–représentations absolument irréductibles de dimension n de W_F, et pour une telle représentation M, on a

$$\mathrm{Hom}_{W_F}(M, H^n_{\text{proét}}(\mathscr{M}_\infty(F,n),\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = \mathrm{JL}(M)\otimes \mathrm{LL}(M)^*,$$

où $\mathrm{LL}(M)$ (resp. $\mathrm{JL}(M)$) est la représentation de G associée à M par la correspondance de Langlands (resp. de Jacquet-Langlands) locale classique [15]. Autrement dit, la cohomologie (pro)étale ℓ-adique, $\ell\neq p$, de la tour de Drinfeld encode à la fois les correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands locales classiques ; on peut difficilement rêver d'une réponse plus esthétique.

La conjecture de Breuil-Strauch. En ce qui concerne la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, une conjecture non publiée de Breuil et Strauch, pour laquelle je renvoie au texte de Gabriel Dospinescu, fournit une première approximation de ce que l'on cherche : l'objet qui réalise (une partie de) la correspondance est le complexe de de Rham

$$\mathscr{O}(\mathscr{M}_\infty)\to\Omega^1(\mathscr{M}_\infty)$$

de la tour de Drinfeld $\mathscr{M}_\infty=\mathscr{M}_\infty(\mathbb{Q}_p,2)$. La démonstration de cette conjecture par Dospinescu et Le Bras [29] utilise une palette impressionnante de techniques différentes. Lue Pan [60] a obtenu des résultats « au niveau entier », pour le premier étage de la tour.

(15) À ceci près que la correspondance classique fournit des $\mathbb{C}$–représentations et que les représentations ci-dessus sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$–représentations, mais dans les deux cas la topologie n'a pas d'importance et on peut passer des unes aux autres sans problème.

© Spartacus-Idh 2019

Prolongements. Il est un peu surprenant de voir la correspondance s'incarner dans le complexe de de Rham car celui-ci n'a pas d'action de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$, mais des théorèmes de comparaison [25] entre cohomologies montrent que ce complexe de de Rham est très proche de la cohomologie (pro)étale p–adique qui, elle, est munie de toutes les actions requises.

Le résultat de Dospinescu et Lebras, combiné avec d'autres ingrédients [22], permet de montrer [23] qu'il n'y a essentiellement que des représentations de dimension 2 (de surcroit de de Rham) qui apparaissent dans la cohomologie étale p–adique de $\mathscr{M}_\infty = \mathscr{M}_\infty(\mathbb{Q}_p, 2)$, et que, si ρ apparait, alors elle apparait avec une multiplicité

$$\mathrm{Hom}(\rho, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, \mathbb{Q}_p(1))) \cong \mathrm{JL}(\rho) \otimes \Pi(\rho)^*,$$

où $\mathrm{JL}(\rho)$ est une représentation de $\check{G}$ obtenue en combinant la correspondance de Jacquet-Langlands locale classique et un des foncteurs de Fontaine, et $\Pi(\rho)$ est la représentation de G associée à ρ par la correspondance de Langlands locale p–adique.

Le résultat ci-dessus est assez suggestif pour la forme que pourrait prendre la correspondance de Langlands locale p–adique en général. En ce qui concerne la correspondance de Jacquet-Langlands p–adique, une approche prometteuse a été suggérée par Scholze [75].

4 Bibliographie

[1] **A. Ash et G. Stevens**. Cohomology of arithmetic groups and congruences between systems of Hecke eigenvalues. *J. Reine Angew. Math.*, vol. 365, p. 192–220, 1986.

[2] **L. Barthel et R. Livné**. Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. *Duke Math. J.*, vol. 75, p. 261–292, 1994.

[3] **L. Barthel et R. Livné**. Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case. *J. Number Theory*, vol. 55, p. 1–27, 1995.

[4] **L. Berger et C. Breuil**. Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Astérisque*, vol. 330, p. 155–211, 2010.

[5] **C. Breuil**. Sur quelques représentations modulaires et p–adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ I. *Comp. Math.*, vol. 138, p. 165–188, 2003.

[6] **C. Breuil**. Sur quelques représentations modulaires et p–adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ II. *J. Institut Math. Jussieu*, vol. 2, p. 23–58, 2003.

[7] **C. Breuil**. Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p–adique. *Ann. E.N.S.*, vol. 37, p. 559–610, 2004.

[8] **C. Breuil**. Introduction générale. *Astérisque*, vol. 319, p 1–12, 2008.

[9] **C. Breuil**. Série spéciale p–adique et cohomologie étale complétée. *Astérisque*, vol. 331, p. 65–115, 2010

[10] **C. Bushnell et G. Henniart**. The local Langlands conjecture for GL(2). *Grundlehren der Math. Wiss.*, vol. 335, Springer-Verlag, 2006.

[11] **K. Buzzard et R. Taylor**. Companion forms and weight one forms. *Ann. of Math.*, vol. 149, p. 905–919, 1999.

https://spartacus-idh.com

[12] **F. CALEGARI et M. EMERTON**. Completed cohomology – a survey. *In : Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory*, p. 239–257, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 393, Cambridge Univ. Press, 2012.

[13] **A. CARAIANI, M. EMERTON, T. GEE, D. GERAGHTY, V. PAŠKŪNAS et S. W. SHIN**. Patching and the p–adic local Langlands correspondence, *Cambridge J. Math.*, vol. 4, p. 197–287, 2016.

[14] **H. CARAYOL**. Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. *Ann. ENS*, vol. 19, p. 409–468, 1986.

[15] **H. CARAYOL**. Non-abelian Lubin-Tate theory. *In :* L. Clozel and J.S. Milne, eds, *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, vol. II, p. 15–39. Academic Press, 1990.

[16] **R. COLEMAN et B. MAZUR**. The eigencurve, *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, p. 1–113, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[17] **P. COLMEZ**. Les conjectures de monodromie p–adiques. *Séminaire Bourbaki 2001/02*, exp. 897, *Astérisque*, vol. 290, p. 53-101, 2003.

[18] **P. COLMEZ**. La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Astérisque*, vol. 330, p. 213–262, 2010.

[19] **P. COLMEZ**. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules. *Astérisque*, vol. 330, p. 281–509, 2010.

[20] **P. COLMEZ**. Le programme de Langlands p–adique, *European Congress of Mathematics Krakow 2012. European Math. Soc.*, 259-284, 2013.

[21] **P. COLMEZ**. Correspondance de Langlands locale p–adique et changement de poids. *J. E.M.S.*, à paraître.

[22] **P. COLMEZ et G. DOSPINESCU**. Complétions unitaires de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Algebra and Number Theory*, vol. 8, p. 1447–1519, 2014.

[23] **P. COLMEZ, G. DOSPINESCU et W. NIZIOŁ**. Cohomologie p–adique de la tour de Drinfeld, le cas de la dimension 1. arXiv :1704.08928 [math.NT].

[24] **P. COLMEZ, G. DOSPINESCU et V. PAŠKŪNAS**. The p–adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Cambridge J. Math.*, vol. 2, p. 1–47, 2014.

[25] **P. COLMEZ et W. NIZIOŁ**. Syntomic complexes and p–adic nearby cycles. *Invent. math.*, vol. 208, p. 1–108, 2017.

[26] **J.-F. DAT**. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *Invent. math.*, vol. 169, p. 75–152, 2007

[27] **G. DOSPINESCU**. Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Math. Ann.*, vol. 354, p. 627–657, 2012.

[28] **G. DOSPINESCU et B. SCHRAEN**. Endomorphism algebras of p–adic representations of p–adic Lie groups. *Representation Theory*, vol. 17, p. 237–246, 2013.

[29] **G. DOSPINESCU et A.-C. LE BRAS**. Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands locale p–adique. *Ann. of Math.*, vol. 186, p. 321–411, 2017.

[30] **V. DRINFELD**. Elliptic modules. *Math. Sb.*, vol. 94, p. 594–627, 1974.

[31] **V. DRINFELD**. Coverings of p–adic symmetric regions. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, p. 29–40, 1976 ; *Funct. Anal. Appl.*, p. 107–115, 1976.

© Spartacus-Idh 2019

[32] **M. Emerton**. p–adic families of modular forms [after Hida, Coleman, and Mazur]. *Séminaire Bourbaki 2009-2010*, exp. 1013, *Astérisque*, vol. 339, 2011.

[33] **M. Emerton**. A local-global compatibility conjecture in the p–adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, *Pure Appl. Math. Q.*, vol. 2, p. 279–393, 2006.

[34] **M. Emerton**. Local-global compatibility in the p–adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$, preprint 2008!

[35] **M. Emerton**. Completed cohomology and the p–adic Langlands program. *Proceedings of the 2014 ICM, Séoul*, http://www.icm2014.org/en/vod/proceedings.html.

[36] **G. Faltings**. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld in *Algebraic number theory and algebraic geometry*. *Contemp. Math.*, vol. 300, p. 115-129, 2002.

[37] **L. Fargues**. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques, p. 1–325, *Progr. Math.*, vol. 262, Birkhäuser 2008.

[38] **J-M. Fontaine**. Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, *Journées arithmétiques de Rennes III*. *Astérisque*, vol. 65, p. 3–80, 1979.

[39] **J-M. Fontaine**. Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Ann. Math.*, vol. 115, p. 529–577, 1982.

[40] **J.-M. Fontaine**. Représentations p–adiques des corps locaux, dans « *The Grothendieck Festschrift* », vol. 2, *Prog. in Math.*, vol. 87, p. 249–309, Birkhäuser 1991.

[41] **J-M. Fontaine**. Le corps des périodes p–adiques, *Périodes p–adiques* exp. II. *Astérisque*, vol. 223, p. 59–102, 1994.

[42] **J-M. Fontaine**. Représentations p–adiques semi-stables, *Périodes p–adiques*. *Astérisque*. vol. 223, p. 113–184, 1994.

[43] **J-M. Fontaine et B. Mazur**. Geometric Galois representations, *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, p. 41–78, *Ser. Number Theory, I*, Int. Press, 1995.

[44] **R. Godement et H. Jacquet**. *Zeta functions of simple algebras*. *Lecture Notes in Math*, vol. 260, Springer-Verlag, 1972.

[45] **M. Harris**. Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld's upper half-space ; elaboration of Carayol's program. *Invent. math.*, vol. 129, p. 75–119, 1997.

[46] **M. Harris et R. Taylor**. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, with an appendix by Vladimir G. Berkovich. *Ann. of Math. Studies*, vol. 151, Princeton University Press, 2001.

[47] **Y. Hellegouarch**. Points d'ordre $2p^h$ sur les courbes elliptiques. *Acta Arith.*, vol. 26, p. 253–263, 1974/75.

[48] **G. Henniart**. Une preuve simple des conjectures de Langlands locales pour GL_n sur un corps p–adique. *Invent. Math.*, vol. 139, p. 439-455., 2000.

[49] **H. Hida**. Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, n° 4, vol. 19, p. 231–273, 1986.

[50] **H. Hida**. Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms. *Invent. Math.*, vol. 85, p. 545–613, 1986.

https://spartacus-idh.com

[51] **H. JACQUET et R. LANGLANDS**. Automorphic forms on GL(2). *Lect. Notes in Math.*, vol. 114, Springer 1970.

[52] **C. KHARE et J.-P. WINTENBERGER**. Serre's modularity conjecture (I). *Invent. Math.*, vol. 178, p. 485–504, 2009.

[53] **C. KHARE et J.-P. WINTENBERGER**. Serre's modularity conjecture (II). *Invent. Math.*, vol. 178, p. 505–586, 2009.

[54] **M. KISIN**. Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture. *Invent. Math.*, vol. 153, p. 373–454, 2003.

[55] **M. KISIN**. Modularity of 2–adic Barsotti-Tate representations. *Invent. Math.*, vol. 178, p. 587–634, 2009.

[56] **M. KISIN**. The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 22, p. 641–690, 2009.

[57] **P. KUTZKO**. The Langlands conjecture for GL_2 of a local field. *Ann. of Math.*, vol. 112, p. 381–412, 1980.

[58] **R. LANGLANDS**. Lettre à André Weil, 1967.

[59] **R. LANGLANDS**. Base change for GL(2). *Ann. of Math. Studies*, vol. 96, Princeton University Press, 1980.

[60] **L. PAN**. First covering of the Drinfel'd upper half-plane and Banach representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Algebra and Number Theory*, vol. 11, p. 405–503, 2017.

[61] **V. PAŠKŪNAS**. The image of Colmez's Montreal functor. *Publ. IHES*, vol. 118, p. 1–191, 2013.

[62] **V. PILLONI et B. STROH**. Surconvergence, ramification et modularité. *Astérisque*, vol. 382, p. 195–266, 2016.

[63] **K. RIBET**. On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms. *Invent. Math.*, vol. 100, p. 431–476, 1990.

[64] **T. SAITO**. Hilbert modular forms and p–adic Hodge theory. *Compositio Math.*, vol. 145, p. 1081–1113, 2009.

[65] **P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM**. Locally analytic distributions and p–adic representation theory, with applications to GL_2. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 15, p. 443–468, 2002.

[66] **P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM** (with an appendix by **D. PRASAD**). $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations. *Representation Theory*, vol. 5, p. 111–128, 2001.

[67] **P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM**. Banach space representations and Iwasawa theory. *Israel J. Math.*, vol. 127, p. 359–380, 2002.

[68] **P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM**. Algebras of p–adic distributions and admissible representations. *Invent. Math.*, vol. 153, p. 145–196, 2003.

[69] **J-P. SERRE**. Formes modulaires et fonctions zêta p–adiques, Modular functions of one variable, III, pp. 191–268. *Lecture Notes in Math.*, vol. 350, Springer, 1973.

[70] **J-P. SERRE**. Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Duke Math. J.*, vol. 54, p. 179–230, 1987.

[71] *Correspondance Serre-Tate* (P. Colmez et J-P. Serre éds), *Documents Mathématiques*, vol. 13 et 14, 2015.

© Spartacus-Idh 2019

[72] **R. Taylor**. Icosahedral Galois representations. *Pacific J. of Math., Olga Taussky-Todd memorial issue*, p. 337–347, 1997.

[73] **J. Tunnell**. On the local Langlands conjecture for GL(2). *Invent. Math.*, vol. 46, p. 179–200, 1978.

[74] **J. Tunnell**. Artin's conjecture for representations of octahedral type. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 5, p. 173–175, 1981.

[75] **P. Scholze**. On the p–adic cohomology of the Lubin-Tate tower. *Ann. ENS*, à paraître.

[76] **A. Wiles**. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math.*, vol. 141, p. 443–551, 1995.

https://spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2019

Chapitre 1

La conjecture de Breuil et Strauch

Le but de ce premier chapitre est d'énoncer les principaux résultats, obtenus [DLB 17] en collaboration avec Arthur-César Le Bras, concernant une **conjecture de Breuil et Strauch** [BS 04]. Cette conjecture décrit le complexe de de Rham de certains espaces analytiques construits par **Drinfeld** [Dri 76], et fournit en même temps une réalisation géométrique particulièrement élégante de la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, pour certaines représentations de de Rham du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$.

Fixons dans toute la suite de ce cours un nombre premier p, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et notons $\mathbb{C}_p = \hat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit enfin $\breve{\mathbb{Q}}_p = \widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \subset \mathbb{C}_p$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et soit $\breve{\mathbb{Z}}_p$ son anneau d'entiers.

1 La tour de Drinfeld

Dans l'article monumental [Dri 76], Drinfeld a construit une famille d'espaces analytiques p–adiques au-dessus de $\mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$, qui jouent un rôle fondamental dans le programme de Langlands. Nous allons rappeler ici leur construction (le lecteur est invité à consulter [BC 91] pour les preuves détaillées des résultats ci-dessous).

Soit D une algèbre de quaternions, à division, sur $\mathbb{Q}_p$ (D est unique à isomorphisme près). Soit $\mathcal{O}_D$ son unique ordre maximal et soit $\mathbb{Z}_{p^2}$ l'anneau des entiers de l'extension quadratique non ramifiée $\mathbb{Q}_{p^2}$ de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. Fixons $\varpi_D \in \mathcal{O}_D$ tel que $\mathcal{O}_D = \mathbb{Z}_{p^2}[\varpi_D]$, $\varpi_D^2 = p$ et $\varpi_D x = \sigma(x)\varpi_D$, pour tout $x \in \mathbb{Z}_{p^2}$, où $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p)$ est l'automorphisme de Frobenius.

Définition 1.1.

Soit A une $\check{\mathbb{Z}}_p$–algèbre. Un $\mathscr{O}_D$–**module formel spécial** X sur A est un groupe formel p–divisible X/A de hauteur 4 et de dimension 2, muni d'une action de $\mathscr{O}_D$ telle que $\mathrm{Lie}(X)$ soit un $\mathbb{Z}_{p^2} \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} A$–module localement libre de rang 1 ($\mathbb{Z}_{p^2}$ agissant sur $\mathrm{Lie}(X)$ via $\mathbb{Z}_{p^2} \subset \mathscr{O}_D$).

Le résultat suivant découle de la théorie de Cartier-Dieudonné :

Proposition 1.2.

Il existe un unique $\mathscr{O}_D$–module formel spécial $\overline{X}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, à $\mathscr{O}_D$-isogénie près. Le groupe des quasi-isogénies de $\overline{X}$ est

$$\mathrm{End}^0_{\mathscr{O}_D}(\overline{X})^\times = G \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p).$$

Remarque 1.3. Voici une construction « explicite » de $\overline{X}$: soit $\mathscr{F}/\overline{\mathbb{F}}_p$ l'unique (à isomorphisme près) groupe formel de dimension 1 et hauteur 2, et posons $\overline{X} = \mathscr{F} \times \mathscr{F}$ avec action de $\mathscr{O}_D$ donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_D & \longrightarrow & \mathrm{End}(\overline{X}) = M_2(\mathscr{O}_D) \\ x \in \mathbb{Z}_{p^2} & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma(x) \end{smallmatrix}\right) \\ \varpi_D & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} \varpi_D & 0 \\ 0 & \varpi_D \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

autrement dit tout $x \in \mathscr{O}_D$ agit par $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & \varpi_D x \varpi_D^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. Nous avons utilisé l'identification $\mathrm{End}(\mathscr{F}) \simeq \mathscr{O}_D = \mathbb{Z}_{p^2}[\varpi_D]$.

Considérons le foncteur

$$\mathscr{F}_{\overline{X}} : \mathrm{Nilp}_{\check{\mathbb{Z}}_p} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

des déformations par quasi-isogénies de $\overline{X}$, défini de la manière suivante :

- $\mathrm{Nilp}_{\check{\mathbb{Z}}_p}$ est la catégorie des $\check{\mathbb{Z}}_p$–algèbres dans lesquelles p est nilpotent, Ens la catégorie des ensembles ;
- si R est un objet de $\mathrm{Nilp}_{\check{\mathbb{Z}}_p}$, $\mathscr{F}_{\overline{X}}(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de paires (X, ρ), où X est un $\mathscr{O}_D$–module formel spécial sur R et

$$\rho : \underline{X} \underset{\overline{\mathbb{F}}_p}{\otimes} R/p \longrightarrow X \underset{R}{\otimes} R/p$$

est une quasi-isogénie $\mathscr{O}_D$–équivariante.

On dispose alors du théorème fondamental suivant dû à Drinfeld [Dri 76] (Rapoport et Zink ont largement généralisé ce résultat dans [RZ 96]) :

https://spartacus-idh.com

Théorème 1.4.

Le foncteur $\mathscr{F}_{\overline{X}}$ est (pro)-représentable par un schéma formel p–adique $\widehat{\mathscr{M}}$ sur $\operatorname{Spf}\breve{\mathbb{Z}}_p$.

Soit $\mathscr{M}/\breve{\mathbb{Q}}_p$ l'espace analytique rigide sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$ attaché au schéma formel $\widehat{\mathscr{M}}$. Si $\mathscr{X}$ est un schéma formel, on écrira aussi $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ pour l'espace analytique associé (quand il existe).

Soit $\mathscr{X} \longrightarrow \widehat{\mathscr{M}}$ le $\mathscr{O}_D$–module formel spécial universel, et notons $\mathscr{X}[\varpi_D^n]$ le schéma formel fini et plat sur $\widehat{\mathscr{M}}$ des points de ϖ_D^n-torsion de $\mathscr{X}$. On note, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathscr{M}_n = (\varpi_D^{n-1})^{-1}\Big(\mathscr{X}[\varpi_D]^{\mathrm{an}} \setminus \{e\}\Big)$$

l'espace des points « d'ordre exactement ϖ_D^n » dans $\mathscr{X}[\varpi_D^n]^{\mathrm{an}}$. On note $\mathscr{M}_0 = \mathscr{M}$.

Alors $\mathscr{M}_n \longrightarrow \mathscr{M}$ est un revêtement fini étale de groupe de Galois

$$\mathrm{Gal}(\mathscr{M}_n/\mathscr{M}) \simeq \mathscr{O}_D^*/1+\varpi_D^n\mathscr{O}_D.$$

On obtient ainsi la **tour de Drinfeld** $(\mathscr{M}_n)_{n\geqslant 0}$, qui est munie d'un certain nombre de structures supplémentaires :

a. des morphismes de transition $\mathscr{M}_{n+1} \longrightarrow \mathscr{M}_n$, pour tout n, qui sont finis étales et qui commutent aux structures supplémentaires ci-dessous.

b. d'une action de $G = \mathrm{End}^0_{\mathscr{O}_D}(\overline{X})^\times$ sur chaque $\mathscr{M}_n$ (en agissant sur la quasi-isogénie ρ dans la définition du foncteur $\mathscr{F}_{\overline{X}}$);

c. d'une action de D^* sur chaque $\mathscr{M}_n$, telle que la restriction à $\mathscr{O}_D^*$ soit triviale sur $1+\varpi_D^n\mathscr{O}_D$ et que l'action induite de $\mathscr{O}_D^*/1+\varpi_D^n\mathscr{O}_D$ sur $\mathscr{M}_n$ soit celle induite par $\mathscr{O}_D^*/1+\varpi_D^n\mathscr{O}_D \simeq \mathrm{Gal}(\mathscr{M}_n/\mathscr{M})$;

d. d'une donnée de descente « à la Weil » sur chaque $\mathscr{M}_n$ compatible avec la variation de n et les actions de G et de D^*, actions qui commutent entre-elles. On fera attention que la donnée de descente n'est pas effective sur $\mathscr{M}_n$, mais elle l'est sur le quotient $p^{\mathbb{Z}}\backslash\mathscr{M}_n$ de $\mathscr{M}_n$ par $p^{\mathbb{Z}} \subset Z(G)$. Cela nous fournit des modèles rationnels (*i.e.* sur $\mathbb{Q}_p$), notés Σ_n, des $\breve{\mathbb{Q}}_p$–espaces $p^{\mathbb{Z}}\backslash\mathscr{M}_n$. Ces modèles Σ_n sont aussi munis d'actions de G et D^*, et s'insèrent dans une tour d'espaces analytiques.

e. Et enfin d'un **morphisme des périodes**

$$\mathscr{M} \to \breve{\Omega} := \Omega \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} \breve{\mathbb{Q}}_p$$

où $\Omega = \mathbb{P}^1\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ est le **demi-plan de Drinfeld**, muni de l'action naturelle de $G \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (via $g.x = \frac{ax+b}{cx+d}$, si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ et $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) = \Omega(\mathbb{C}_p)$).

Rappelons la définition du morphisme des périodes au niveau des $\mathbb{C}_p$–points. Soit $(X,\rho) \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_p) = \widehat{\mathscr{M}}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) = \varprojlim \widehat{\mathscr{M}}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}/p^n)$. Si E est l'extension vectorielle universelle de X et D le module de Dieudonné covariant de $\overline{X}$, la quasi-isogénie ρ

© Spartacus-Idh 2019

induit une identification

$$D \underset{\check{\mathbb{Q}}_p}{\otimes} \mathbb{C}_p \simeq \mathrm{Lie}\, E\left[\frac{1}{p}\right].$$

On a une action de $\mathscr{O}_D$ sur $\mathrm{Lie}\, E\left[\frac{1}{p}\right]$, donc une action de $\mathbb{Z}_{p^2}$. Si M est un module avec une action de $\mathbb{Z}_{p^2}$, notons M_0 le sous-module des points fixes sous l'action de $\mathbb{Z}_{p^2}$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{X^D} \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E \longrightarrow \mathrm{Lie}\, X \longrightarrow 0$$

(X^D étant le dual de Cartier de X) fournit une droite $\omega_{X^D}\left[\frac{1}{p}\right]_0$ dans le plan

$$\mathrm{Lie}\, E\left[\frac{1}{p}\right]_0 \simeq (D \underset{\check{\mathbb{Q}}_p}{\otimes} \mathbb{C}_p)_0.$$

On obtient ainsi un point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, qui est en fait dans $\check{\Omega}(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, et cela définit le morphisme voulu. Le théorème fondamental suivant est dû à Drinfeld (le lecteur trouvera dans [BC 91] les détails de la preuve) :

Théorème 1.5.

Le morphisme des périodes induit un isomorphisme G–équivariant (G agissant sur $\mathbb{Z}$ par $-v_p \circ \det$)

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \check{\Omega} \times \mathbb{Z},$$

qui descend en un isomorphisme

$$\Sigma_0 \xrightarrow{\sim} \Omega \sqcup \Omega$$

Notons que tout $g \in G$ tel que $v_p(\det g)$ soit pair agit sur chaque composante de $\Omega \sqcup \Omega$ comme on le pense, mais si $v_p(\det g)$ est impair, il échange les deux composantes.

2 Le complexe de de Rham de Ω

Le demi-plan de Drinfeld Ω est un **espace de Stein**, *i.e.* il admet un recouvrement croissant $(U_n)_{n\geqslant 1}$ par des affinoïdes U_n tels que U_n soit dans l'intérieur de U_{n+1} pour tout n. Grâce au théorème d'annulation de Kiehl, les faisceaux cohérents sur Ω n'ont pas de cohomologie en degré strictement positif. On obtient ainsi une suite exacte de G–modules de Fréchet

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(\Omega)/\mathbb{Q}_p \longrightarrow \Omega^1(\Omega) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(\Omega) \longrightarrow 0,$$

où $\mathscr{O}(\Omega)$ (resp. $\Omega^1(\Omega)$) est l'espace des fonctions (resp. différentielles) holomorphes sur Ω.

Soit

$$\mathrm{St}^{\mathrm{an}} = \mathrm{LA}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), \mathbb{Q}_p)/\mathrm{cst}$$

https://spartacus-idh.com

la **représentation de Steinberg** localement analytique de G, quotient de l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$, par les fonctions constantes. En remplaçant « fonctions localement analytiques » par « fonctions localement constantes », on obtient la représentation de Steinberg lisse St.

Le dual topologique $(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*$ s'identifie à l'espace des distributions sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ de masse totale 0, avec l'action de G définie par :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \phi(x)(g.\mu)(x) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)\mu(x)$$

si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p),\mathbb{Q}_p)$, $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ et si μ est une distribution de masse 0 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$.

Le théorème classique suivant dû à **Morita** [Mor 81] décrit $\Omega^1(\Omega)$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(\Omega)$ en tant que G–modules :

Théorème 1.6.

L'application

$$\mu \mapsto \omega_\mu = \Big(\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \frac{1}{z-x}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}z$$

induit un isomorphisme de G–modules topologiques

$$(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^* \xrightarrow{\sim} \Omega^1(\Omega) \quad \text{et} \quad (\mathrm{St})^* \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(\Omega).$$

Notre but sera de décrire $\Omega^1(\Sigma_n)$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)$ en tant que G–modules. Cela demandera un certain nombre de préliminaires, car les G–modules en question sont nettement plus délicats à construire. En effet, leur construction est basée sur la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, qui utilise de manière cruciale la théorie de Hodge p–adique et la théorie des (φ,Γ)–modules. Nous allons commencer par des rappels sur les représentations galoisiennes et leurs liens avec les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

3 Représentations l-adiques et de Weil-Deligne

La cohomologie étale l–adique (l étant un nombre premier différent de p) des espaces de la tour de Drinfeld fournit naturellement des représentations l–adiques continues du groupe de Weil $W_{\mathbb{Q}_p}$ de $\mathbb{Q}_p$. Elles ne sont pas de dimension finie, mais on peut utiliser l'action des groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et D^* pour isoler de telles représentations de dimension finie. Les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales permettent ensuite d'associer à ces représentations des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et D^*, et au final de décrire la cohomologie étale de la tour de Drinfeld en termes de représentations des groupes $W_{\mathbb{Q}_p}$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et D^*. Enoncer proprement ce résultat profond (conséquence des travaux de nombreux mathématiciens) demande quelques de préliminaires.

© Spartacus-Idh 2019

3.1 Représentations de Weil-Deligne

L'étude des représentations l–adiques continues du groupe de Weil $W_{\mathbb{Q}_p}$ est grandement simplifié par le **théorème de monodromie l–adique de Grothendieck**, qui affirme qu'une telle représentation est potentiellement unipotente (*cf.* ci-dessous pour l'énoncé précis). Deligne a reformulé ce résultat, lui permettant ainsi de classifier les représentations continues en termes de représentations de Weil-Deligne. L'avantage de ces dernières est que leur théorie est purement algébrique, *i.e.* les problèmes topologiques disparaissent. Nous allons rappeler la recette de Deligne ci-dessous.

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, de corps résiduel $k \simeq \mathbb{F}_q$. Le groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ de K admet un dévissage

$$1 \to I_K \to \mathscr{G}_K \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 1,$$

I_K étant le sous-groupe d'inertie. Le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ est isomorphe au complété profini $\hat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_l \mathbb{Z}_l$ de $\mathbb{Z}$, un générateur topologique étant l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$. Le **groupe de Weil** W_K est le sous-groupe de $\mathscr{G}_K$ image inverse de $\mathbb{Z} \subset \hat{\mathbb{Z}}$, *i.e.* il contient les automorphismes de $\bar{K}$ sur K qui induisent une puissance entière de l'automorphisme de Frobenius sur le corps résiduel $\bar{k}$ de $\bar{K}$. Il admet une structure de groupe topologique telle que I_K (muni de sa topologie naturelle) soit ouvert dans W_K (cette topologie n'est pas celle induite par l'inclusion $W_K \subset \mathscr{G}_K$ et la topologie naturelle de $\mathscr{G}_K$). On note $n(\sigma)$ l'image de $\sigma \in W_K$ par l'application naturelle $W_K \to \mathbb{Z}$.

Définition 1.7.

Soit L un corps de caractéristique 0. Une **représentation de Weil-Deligne** de W_K sur L est une paire (r, N), où $r = (r, V)$ est une représentation de dimension finie sur L de W_K telle que $I_K \subset W_K$ agit par un quotient fini, et N est un endomorphisme nilpotent de V tel que

$$r(\sigma) N r(\sigma)^{-1} = q^{n(\sigma)} N$$

pour tout $\sigma \in W_K$. On dit que (r, N) est **Frobenius-semisimple** si r l'est (ce qui arrive si et seulement si $r(\sigma)$ est semisimple pour tout $\sigma \in W_K$; il suffit d'ailleurs qu'il existe $\sigma \in W_K \setminus I_K$ tel que $r(\sigma)$ soit semisimple).

Soit l un nombre premier *différent de p* et soit L une extension algébrique de $\mathbb{Q}_l$. Par le théorème de monodromie l–adique de Grothendieck et une amélioration due à Deligne [Del 73], on dispose d'une équivalence de catégories entre :

- la catégorie des représentations continues de $\mathscr{G}_K$ sur des L–espaces vectoriels de dimension finie et
- la catégorie des représentations de Weil-Deligne (r, N) sur L telles que $r(\sigma)$ soit borné [1] pour tout $\sigma \in W_K$ (il suffit que cela soit vrai pour un seul $\sigma \in W_K \setminus I_K$).

(1) Si V est l'espace sous-jacent à r, cela signifie que $r(\sigma) \in \mathrm{End}(V)$ stabilise un $\mathscr{O}_L$–réseau de V (en termes plus concrets, cela signifie que le polynôme caractéristique de $r(\sigma)$ est à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ et le terme constant est inversible).

https://spartacus-idh.com

Rappelons la construction de cette équivalence de catégories. Choisissons un morphisme non nul [2] $t : I_K \to \mathbb{Q}_l$. Grâce au théorème de monodromie de Grothendieck, pour toute représentation continue de dimension finie $\rho : \mathscr{G}_K \to \mathrm{GL}(V)$ il existe un endomorphisme nilpotent N de V tel que pour tout σ dans un sous-groupe ouvert de I_K on ait

$$\rho(\sigma) = e^{Nt(\sigma)}.$$

En choisissant un relèvement $\varphi \in W_K$ de l'automorphisme de Frobenius de $\mathscr{G}_k$, et en posant

$$r(\sigma) = \rho(\sigma)e^{-t(\sigma')N}, \quad \text{où} \quad \sigma' = \sigma\varphi^{-n(\sigma)} \in I_K,$$

on obtient une représentation de Weil-Deligne (r, N). Cela semble dépendre du choix de ζ et φ, mais on montre qu'il n'en est rien (à équivalence canonique de catégories près).

La même construction fournit une bijection entre :

• l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de Weil-Deligne Frobenius semi-simples, de dimension d sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et

• l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations continues, Frobenius semi-simples, de dimension d, de W_K sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$.

3.2 Correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands

Il existe un lien très étroit entre (certaines) représentations de Weil-Deligne de $W_{\mathbb{Q}_p}$ et certaines représentations de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Rendre cela plus précis demande quelques préliminaires.

Définition 1.8.

Soit C un corps algébriquement clos, de caractéristique 0. Une représentation π de G sur C est dite **lisse** si tout vecteur $v \in \pi$ est fixé par un sous-groupe ouvert de G, et **lisse admissible** si l'espace des invariants π^H par tout sous-groupe ouvert compact H de G est de dimension finie.

(2) Un tel morphisme existe et est unique à multiplication par un élément de $\mathbb{Q}_l^*$ près. Pour voir l'existence, soit I_K^w le sous-groupe d'inertie sauvage, *i.e.* l'unique pro-p Sylow de I_K. On choisit une racine primitive n-ième de l'unité ζ_n pour tout n premier à p, de telle sorte que $\zeta_{mn}^m = \zeta_n$ pour m, n premiers à p. Cela fournit un isomorphisme

$$t_\zeta : I_K/I_K^w \simeq \prod_{q \neq p} \mathbb{Z}_q,$$

défini par (ϖ_K est une uniformisante de K)

$$\frac{\sigma(\varpi_K^{1/n})}{\varpi_K^{1/n}} = \zeta_n^{t_\zeta(\sigma)},$$

d'où un morphisme $t : I_K \to \mathbb{Z}_l$, qui dépend du choix du système (ζ_n). Nous laissons l'unicité au lecteur.

© Spartacus-Idh 2019

Grâce à un théorème de Bernstein, toute représentation lisse irréductible est automatiquement admissible. Les représentations lisses irréductibles de G vivent dans quatre familles distinctes :

• les représentations de dimension 1, qui sont en bijection (via $\chi \mapsto \chi \circ \det$) avec les caractères lisses $\chi : \mathbb{Q}_p^* \to C^*$.

• les représentations de la **série principale**, classifiées par les paires de caractères lisses (χ_1, χ_2) telles que $\chi_1/\chi_2 \neq |\cdot|^{\pm 1}$. Explicitement, elles sont réalisées dans l'espace des fonctions $f : G \to C$ invariantes à droite par un sous-groupe ouvert de G et telles que

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) g\right) = \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|^{1/2} f(g)$$

pour tout $g \in G$ et tous $a, d \in \mathbb{Q}_p^*, b \in \mathbb{Q}_p$. L'action de G est induite simplement par la translation à droite sur les fonctions.

• les représentations de la **série spéciale**, *i.e.* les tordues de la représentation de Steinberg St par les caractères lisses de $\mathbb{Q}_p^*$. La représentation de Steinberg est le quotient de l'espace des fonctions localement constantes $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \to C$ par la droite engendrée par les fonctions constantes.

• enfin, les représentations **supercuspidales**, pour lesquelles il n'y a malheureusement pas de description facile. Elles sont caractérisées par la compacité (modulo le centre de G) du support de leurs coefficients matriciels.

Les représentations de la série spéciale et celles supercuspidales forment ce qu'on appelle la **série discrète** de G. La **correspondance de Langlands locale « classique »** pour G s'énonce sous une forme vague (qui peut être rendue précise avec beaucoup plus de travail) :

Théorème 1.9.

Il existe une bijection naturelle $\pi \to \mathrm{LL}(\pi)$ entre

• l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de G sur C et

• l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de Weil-Deligne de dimension 2 sur C, Frobenius-semisimples.

La bijection fournie par le théorème ci-dessus (dû à Jacquet-Langlands [JL 06] si $p > 2$, Tunnell [Tun 81] et Kutzko [Kut 80] si $p = 2$, et généralisé à $\mathrm{GL}_n(F)$ pour une extension finie F de $\mathbb{Q}_p$ par Harris-Taylor [HT 01], Henniart [Hen 00] et Scholze [Sch 13]) a un certain nombre de propriétés remarquables :

• elle est compatible avec les twists par des caractères lisses (en utilisant la théorie du corps de classes local).

• $\mathrm{LL}(\pi)$ est irréductible si et seulement si π est supercuspidale.

• $\mathrm{LL}(\pi)$ est indécomposable si et seulement si π est dans la série discrète de G.

• La bijection peut-être rendue « rationnelle » (en prenant la normalisation de Tate), *i.e.* compatible avec les automorphismes de C. En particulier, si $C = \overline{\mathbb{Q}_p}$ et si π est définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, alors il en est de même de $\mathrm{LL}(\pi)$.

Passons maintenant à la relation entre les représentations de D^* et celles de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, connue sous le nom de **correspondance de Jacquet-Langlands**

https://spartacus-idh.com

[JL 06]. Supposons pour l'instant que $C = \mathbb{C}$. Soit $H \in \{G, D^*\}$ et fixons une mesure de Haar dh sur H. Soit $\mathscr{H}(H)$ **l'algèbre de Hecke de** H, *i.e.* l'algèbre des fonctions localement constantes, à support compact sur H (le produit étant celui de convolution). Alors $\mathscr{H}(H)$ agit sur toute représentation lisse π de H par

$$f.v = \int_H f(h)h.v\,dh$$

pour $f \in \mathscr{H}(H)$ et $v \in \pi$. Si π est admissible, alors l'image de l'opérateur $v \to f.v$ est de dimension finie, donc on peut parler de sa trace, notée $\mathrm{tr}(f)$. Si π est irréductible, un théorème fondamental d'Harish-Chandra assure l'existence d'une unique fonction localement constante χ_π sur H^{reg} (l'ouvert dense des $h \in H$ dont le polynôme caractéristique est sans racine double dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$), localement intégrable sur H et telle que pour tout $f \in \mathscr{H}(H)$ on ait

$$\mathrm{tr}(f) = \int_H \chi_\pi(h)f(h)dh.$$

On appelle χ_π le **caractère** de π. Il s'agit d'une fonction constante sur les classes de conjugaison, indépendante du choix de la mesure de Haar sur H. Le théorème suivant est dû à Jacquet et Langlands [JL 06].

Théorème 1.10.

Il existe une bijection canonique $\rho \to \mathrm{JL}(\rho)$ entre

- l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de D^* sur $\mathbb{C}$ et
- l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations de la série discrète de G

telle que

$$\chi_{\mathrm{JL}(\rho)}(g) = -\chi_\rho(d)$$

si $g \in G$ et $d \in D^*$ ont le même polynôme caractéristique irréductible.

Par exemple, la représentation triviale de D^* correspond à la représentation de Steinberg de G. Les représentations lisses, irréductibles, de dimension plus grande que 1 de D^* sont en bijection avec les représentations supercuspidales de G.

On peut remplacer $\mathbb{C}$ par tout corps C abstraitement isomorphe à $\mathbb{C}$. De plus, ρ et $\mathrm{JL}(\rho)$ ont le même caractère central, et $\rho \to \mathrm{JL}(\rho)$ est compatible avec les twists par des caractères, ainsi qu'avec la dualité (si π est une représentation lisse admissible de $H \in \{G, D^*\}$, la duale-ou contragrédiente-de π est par définition le sous-espace $\pi^\vee$ des formes linéaires $\lambda \in \mathrm{Hom}(\pi, C)$ qui sont fixées par un sous-groupe ouvert compact de H, avec l'action naturelle de H ; la condition d'admissibilité de π est équivalente à la bijectivité de l'injection canonique $\pi \to (\pi^\vee)^\vee$).

3.3 La cohomologie l-adique de la tour de Drinfeld

Soit $l \neq p$ un nombre premier, et soit ρ une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation lisse irréductible de D^*. Il existe n tel que ρ soit triviale sur $1 + \varpi_D^n \mathscr{O}_D$. Supposons dans la suite que le caractère central de ρ est trivial.

© Spartacus-Idh 2019

Grâce à la correspondance de Jacquet-Langlands locale (théorème 1.10), on sait attacher à ρ une représentation lisse irréductible $\pi = \mathrm{JL}(\rho)$ de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, à caractère central trivial, et qui est dans la série discrète de G. Soit $\mathrm{W}(\rho)$ la représentation de $W_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ attachée à π par la correspondance de Langlands locale pour G (plus précisément, le théorème 1.9 fournit une représentation de Weil-Deligne, et $\mathrm{W}(\rho)$ est la représentation de $W_{\mathbb{Q}_p}$ qui lui correspond par la recette de Grothendieck-Deligne, *cf.* la fin du paragraphe 3.1).

On dispose alors du théorème profond suivant, dû aux travaux de Deligne, Carayol [Car 90], Faltings [Fal 02a], Fargues [FGL 08] (et qui admet des versions [HT 01] pour $\mathrm{GL}_n(F)$ où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, contrairement — pour l'instant — à ce que l'on verra dans ce cours).

Théorème 1.11.

Avec les notations précédentes il existe un isomorphisme de $G \times W_{\mathbb{Q}_p}$-modules

$$\mathrm{Hom}_{D^*}\left(\rho, H^1_c(p^{\mathbb{Z}} \backslash \mathscr{M}_n \otimes \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_l)\right) \xrightarrow{\sim} \pi \otimes \mathrm{W}(\rho)$$

Christophe Breuil et Mathias Strauch ont formulé une conjecture [BS 04] décrivant le complexe de de Rham des espaces $\mathscr{M}_n$, faisant aussi intervenir les correspondances de Jacquet-Langlands locales pour G (et D^*), mais le point nouveau est l'apparition de la correspondance de Langlands p-adique pour G. Le but de ce cours sera d'expliquer la preuve d'une version de cette conjecture. En utilisant ces résultats, on peut obtenir [CDN 17] une version p-adique du théorème ci-dessus.

Pour énoncer les résultats, nous avons besoin d'un certain nombre de préliminaires et de rappels auxquels sont consacrés les paragraphes suivants.

4 Représentations p-adiques et de Weil-Deligne

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Nous avons vu dans le paragraphe 3.1 que les représentations $l \neq p$-adiques continues de $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ fournissent naturellement des représentations de Weil-Deligne. Cela n'est plus du tout vrai pour les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_K$, qui sont celles qui vont nous intéresser, et dont la structure est nettement plus compliquée. Grâce aux travaux de Fontaine [Fon 82, Fon 90, Fon 94a, Fon 94c, Fon 04, Fon 94b], Colmez [CF 00, Col 02, Col 08a, Col 03], Berger [Ber 02, Ber 08], Kedlaya [Ked 04] et d'autres, on sait mettre un peu d'ordre dans le monde des représentations p-adiques de $\mathscr{G}_K$ et isoler une classe importante de représentations qui fournissent aussi naturellement des représentations de Weil-Deligne (mais contrairement au cas l-adique, elles ne sont pas déterminées par ces représentations de Weil-Deligne). La construction est nettement plus compliquée que dans le cas l-adique et demande bon nombre de préliminaires.

Dans une première étape, on associe à toute représentation p-adique V de $\mathscr{G}_K$ des objets de nature semi-linéaire :

- un K-espace vectoriel de dimension finie $D_{\mathrm{dR}}(V)$, muni d'une filtration décroissante, exhaustive, séparée $(\mathrm{Fil}^i(D_{\mathrm{dR}}(V)))_{i\in\mathbb{Z}}$ (on a donc $\mathrm{Fil}^i(D_{\mathrm{dR}}(V)) = 0$ pour i très grand et $\mathrm{Fil}^i(D_{\mathrm{dR}}(V)) = D_{\mathrm{dR}}(V)$ pour i très petit).

https://spartacus-idh.com

- Un $K_0 := \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}} \cap K$–espace vectoriel de dimension finie $D_{\mathrm{st}}(V)$ muni d'un frobenius K_0-semi-linéaire (par rapport au frobenius naturel de K_0) bijectif, ainsi que d'un opérateur de monodromie $N : D_{\mathrm{st}}(V) \to D_{\mathrm{st}}(V)$ qui est K_0-linéaire et satisfait $N\varphi = p\varphi N$.
- Une injection $D_{\mathrm{st}}(V) \otimes_{K_0} K \to D_{\mathrm{dR}}(V)$, qui permet de munir $D_{\mathrm{st}}(V) \otimes_{K_0} K$ de la filtration induite.

  La construction de $D_{\mathrm{dR}}(V)$ et $D_{\mathrm{st}}(V)$ repose sur la construction (très compliquée et que nous n'allons pas donner, voir [Fon 94a, Fon 94c]) de deux gigantesques anneaux de périodes p–adiques $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, en posant

$$D_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}, \quad D_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}.$$

  Les structures supplémentaires (filtration, frobenius, monodromie) sur $D_{\mathrm{st}}(V)$ et $D_{\mathrm{dR}}(V)$ sont induites par des structures supplémentaires sur les anneaux $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, comme suit :
- $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}$ est une $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$–algèbre, et il est muni d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, d'un frobenius bijectif φ, ainsi que d'un opérateur de monodromie N tel que $N\varphi = p\varphi N$. L'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ commute avec φ et N.
- $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ est un corps de valuation discrète et une $\overline{\mathbb{Q}_p}$–algèbre. Il est muni d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, ainsi que d'une filtration décroissante $\mathrm{Fil}^n(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) = t^n \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, où $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est l'anneau d'entiers de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ et t est une uniformisante.
- On dispose d'un plongement [3] $\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} K \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, en particulier on peut munir $\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} K$ de la filtration induite.

Fontaine a montré que pour toute représentation p–adique V on a

$$\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \leqslant \dim V, \quad \dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \leqslant \dim V.$$

Définition 1.12.

On dit que V est *de de Rham*, resp. *semi-stable* si

$$\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) = \dim V, \text{ resp. } \dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) = \dim V.$$

On dit que V devient semi-stable sur une extension finie K' de K si la restriction de V à $\mathscr{G}_{K'}$ est semi-stable, *i.e.* si la dimension sur K_0' de

$$D_{\mathrm{st},K'}(V) := (\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_{K'}}$$

est $\dim V$.

Remarque 1.13. La cohomologie étale p–adique des variétés algébriques propres et lisses sur K fournit des exemples très importants de représentations p–adiques de de Rham (et même semi-stables, si les variétés en question ont réduction semi-stable). Cela est une conséquence des théorèmes de comparaison en théorie de Hodge p–adique, voir par exemple [Fal 02b, Niz 08, Tsu 99].

(3) Qui dépend du choix d'une uniformisante de K.

© Spartacus-Idh 2019

Il est clair que toute représentation semi-stable est de de Rham. Mieux, toute représentation qui devient semi-stable sur une extension finie de K est de de Rham. La réciproque est vraie, mais nettement plus difficile. Le théorème profond suivant (conjecturé par Fontaine et connu sous le nom de **théorème de monodromie p-adique**) est dû à Berger [Ber 02], André [And 02], Kedlaya [Ked 04] et Mebkhout [Meb 02] (avec des preuves différentes données par Colmez [Col 08a], Fargues et Fontaine [FF 17]).

Théorème 1.14.

Toute représentation de de Rham V de $\mathscr{G}_K$ devient semi-stable sur une extension finie de K.

Il est utile à ce stade d'introduire la définition suivante, dans laquelle K' est une extension finie galoisienne de K.

Définition 1.15.

a. Un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$-**module** est un K'_0-espace vectoriel de dimension finie D, muni d'un endomorphisme semi-linéaire bijectif φ, d'un endomorphisme linéaire N satisfaisant $N\varphi = p\varphi N$, et enfin d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(K'/K)$, qui commute avec φ et N. Si $N = 0$, on parle de $(\varphi, \mathrm{Gal}(K'/K))$-**module**.

b. Un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-**module** est un objet de la forme $D \otimes_{K'_0} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ pour une extension finie galoisienne K'/K et un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$-module D. Si $N = 0$, on parle de $(\varphi, \mathscr{G}_K)$-**module**.

c. Un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$-**module filtré** est un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$-module D muni d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée $(\mathrm{Fil}^i(D_{K'}))_{i\in\mathbb{Z}}$ sur $D_{K'} = D \otimes_{K'_0} K'$ par des sous K'-espaces vectoriels stables sous $\mathscr{G}_K$. On définit de manière évidente la notion de $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-**module filtré**, en considérant une filtration sur $D_{\overline{K}} := D \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \overline{K}$.

Soit K'/K une extension finie, galoisienne, et soit V une représentation de $\mathscr{G}_K$, qui devient semi-stable sur K'. Alors $D_{\mathrm{st},K'}(V)$ est un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$-filtré et on associe à V un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module filtré

$$D_{\mathrm{pst}}(V) = D_{\mathrm{st},K'}(V) \otimes_{K'_0} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}},$$

qui ne dépend pas du choix de K'. De manière plus canonique, on a

$$D_{\mathrm{pst}}(V) = \varinjlim_{K'/K} (\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_{K'}},$$

la limite étant prise sur les extensions finies K'/K contenues dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Combinée avec le théorème 1.14, cette construction fournit un $\otimes$-foncteur exact $V \mapsto D_{\mathrm{pst}}(V)$

$$L - \text{représentations de de Rham de } \mathscr{G}_K \to (\varphi, N, \mathscr{G}_K) - \text{modules filtrés.}$$

Fontaine a montré que ce foncteur est pleinement fidèle. Plus précisément, si D est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module filtré, posons

$$V_{\mathrm{st}}(D) = (D \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathbb{B}_{\mathrm{st}})^{\varphi=1, N=0} \cap \mathrm{Fil}^0(D_{\overline{K}} \otimes_{\overline{K}} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}),$$

où

$$\mathrm{Fil}^0(D_{\overline{K}} \otimes_{\overline{K}} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i(D_{\overline{K}}) \otimes_{\overline{K}} \mathrm{Fil}^{-i}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}).$$

https://spartacus-idh.com

Alors pour toute représentation p–adique de de Rham V on dispose d'un isomorphisme canonique

$$V \simeq V_{\mathrm{st}}(D_{\mathrm{pst}}(V)).$$

Notons que l'on peut définir $V_{\mathrm{st}}(D)$ pour tout $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$–module filtré D et toute extension finie K'/K, par une recette semblable à celle ci-dessus.

La description de l'image essentielle du foncteur $V \to D_{\mathrm{pst}}(V)$ a été conjecturée par Fontaine et la conjecture a été démontrée par Colmez et Fontaine [CF 00] (avec des preuves différentes fournies par Berger [Ber 08], Colmez [Col 02], Fargues et Fontaine [FF 17]). Si D est un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$–module filtré, on pose

$$t_N(D) = \frac{1}{[K'_0 : \mathbb{Q}_p]} v_p(\det \varphi^{[K'_0:\mathbb{Q}_p]}), \quad t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_{K'}(\mathrm{gr}^i(D_{K'})).$$

Définition 1.16.

On dit que D est **faiblement admissible** si $t_N(D) = t_H(D)$ et si $t_N(D') \geqslant t_H(D')$ pour tout sous-espace D' de D stable par φ et N, muni de la filtration induite.

Le théorème de Colmez-Fontaine [CF 00] s'énonce alors comme suit :

Théorème 1.17.

Soit K' une extension finie galoisienne de K. Les foncteurs $V \mapsto D_{\mathrm{st},K'}(V)$ et $D \mapsto V_{\mathrm{st}}(D)$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses, préservant les dimensions, entre

- la catégorie des représentations de $\mathscr{G}_K$ qui deviennent semi-stables sur K' et
- la catégorie des $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$–modules filtrés faiblement admissibles.

Remarque 1.18.

a. On dispose de l'énoncé plus précis suivant : soit D un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$–module filtré. Alors $V_{\mathrm{st}}(D)$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $t_H(D') \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D. Si c'est le cas, alors $\dim V_{\mathrm{st}}(D) \leqslant \dim D$, et on a égalité si et seulement si D est faiblement admissible.

b. Les foncteurs $V \mapsto D_{\mathrm{pst}}(V)$ et $D \mapsto V_{\mathrm{st}}(D)$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des représentations de de Rham de $\mathscr{G}_K$ et celle des $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$–modules filtrés faiblement admissibles.

c. Voici deux exemples « concrets ».

- Si $k \geqslant 2$ est un entier et a_p est dans l'idéal maximal m_L de L, on peut définir un φ–module filtré D_{k,a_p}, ayant une L-base e_1, e_2 telle que $\varphi(e_1) = p^{k-1}e_2$, $\varphi(e_2) = -e_1 + a_p e_2$, et une filtration telle que $\mathrm{Fil}^i(D_{k,a_p}) = Le_1$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $\mathrm{Fil}^i(D_{k,a_p}) = 0$ pour $i \geqslant k$ et $\mathrm{Fil}^i(D_{k,a_p}) = D_{k,a_p}$ pour $i \leqslant 0$. Alors D_{k,a_p} est faiblement admissible. Le théorème de Colmez-Fontaine fournit donc une L–représentation V_{k,a_p} de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, cristalline, telle que

$$D_{\mathrm{cris}}(V^*_{k,a_p}) = D_{k,a_p}.$$

© Spartacus-Idh 2019

À torsion par un caractère cristallin près, toute représentation cristalline absolument irréductible de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est ainsi obtenue.

• Soit $k>2$ un entier et soit $\mathscr{L}\in L$. On construit alors un (φ,N)–module filtré faiblement admissible $D_{k,\mathscr{L}}$, ayant une L-base e_1,e_2 telle que $\varphi(e_1)=p^{\frac{k}{2}}e_1$, $\varphi(e_2)=p^{\frac{k}{2}-1}e_2$, $N(e_1)=e_2$, $N(e_2)=0$ et tel que $\mathrm{Fil}^i(D_{k,\mathscr{L}})$ est nul pour $i\geqslant k$, égal à $L(e_1+\mathscr{L}e_2)$ pour $1\leqslant i\leqslant k-1$ et égal à $D_{k,\mathscr{L}}$ pour $i\leqslant 0$. Par le théorème de Colmez-Fontaine, on obtient une L–représentation semi-stable $V_{k,\mathscr{L}}$ telle que $D_{\mathrm{st}}(V^*_{k,\mathscr{L}})=D_{k,\mathscr{L}}$.

Rappelons que notre objectif est d'attacher des représentations de Weil-Deligne aux représentations p–adiques de de Rham de $\mathscr{G}_K$, où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Il convient de fixer une extension finie galoisienne K' de K, ainsi qu'un corps des coefficients L, qui est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, suffisamment grande pour que tout plongement $K'_0\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ se factorise par L (rappelons que $K'_0=K'\cap\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$).

Fontaine [Fon 94c, Fon 94b, BS 07] a défini un foncteur

$$\mathrm{WD}: L-(\varphi,N,\mathrm{Gal}(K'/K))-\text{modules}^{(4)}\to \mathrm{WD}_{K'/K},$$

où $\mathrm{WD}_{K'/K}$ est la catégorie des représentations de Weil-Deligne de K sur L, non ramifiées en restriction à $W_{K'}$. Pour simplifier les formules, il convient de fixer un plongement $\sigma: K'_0\to L$ (le foncteur qui en résulte ne dépend pas du choix, à isomorphisme non canonique près). Si D est un $L-(\varphi,N,\mathrm{Gal}(K'/K))$–module, l'isomorphisme

$$L\otimes_{\mathbb{Q}_p}K'_0=\prod_{\tau:K'_0\to L}L,\quad l\otimes x\mapsto (l\,\tau(x))_\tau$$

permet de définir le L–espace vectoriel

$$V=D\otimes_{L\otimes_{\mathbb{Q}_p}K'_0,\sigma}L.$$

L'endomorphisme N de D induit un endomorphisme de V. Pour $g\in W_K$ on note $u(g)$ l'unique entier tel que l'image de g dans $\mathscr{G}_{\mathbb{F}_p}$ soit donnée par $x\mapsto x^{p^{u(g)}}$, et on note $\bar{g}$ l'image de g dans $\mathrm{Gal}(K'/K)$. En posant $r(g)=\bar{g}\circ\varphi^{-u(g)}$ on obtient un endomorphisme $K'_0\otimes L$*-linéaire* de D, ce qui induit un endomorphisme $r(g)$ de V. On vérifie que (r,N,V) est une représentation de Weil-Deligne de K sur L, non ramifiée en restriction à $W_{K'}$, et on pose

$$\mathrm{WD}(D)=(r,N,V).$$

Remarque 1.19. Breuil et Schneider [BS 07] ont montré que le foncteur de Fontaine est en fait une équivalence de catégories.

(4) Ce sont des $(\varphi,N,\mathrm{Gal}(K'/K))$–modules munis d'une action de L commutant aux structures supplémentaires, et qui sont libres en tant que $K'_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$–modules.

https://spartacus-idh.com

Ainsi, pour toute L–représentation V de $\mathscr{G}_K$ qui devient semi-stable sur K', on peut définir une L–représentation de Weil-Deligne

$$\mathrm{WD}(V) := \mathrm{WD}(D_{\mathrm{st},K'}(V)),$$

non ramifiée sur K'. On vérifie qu'elle ne dépend pas du choix de K' (tant que L est suffisamment grand, comme ci-dessus, ce qui sera le cas dans les applications). Contrairement au cas l–adique, où la représentation de Weil-Deligne associée garde presque toute l'information [5], ce n'est pas du tout le cas de la représentation de Weil-Deligne associée à une représentation de de Rham. En effet, sa construction n'utilise que le $L-(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K'/K))$–module sous-jacent, et pas sa filtration de Hodge. Il existe en général *beaucoup* de représentations de de Rham ayant la même représentation de Weil-Deligne (voir l'exemple des représentations $V_{k,\mathscr{L}}$ ci-dessus : la représentation de Weil-Deligne associée « oublie » le paramètre $\mathscr{L}$).

5 La correspondance de Langlands p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

5.1 Représentations de Banach et localement analytiques de G

Fixons une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, qui sera le corps des coefficients des représentations de G que l'on utilisera. Rappelons qu'un L–espace de type compact est un L–espace vectoriel localement convexe qui peut s'écrire comme limite inductive d'une suite de L–espaces de Banach, avec des applications de transition compactes.

Définition 1.20.

a. Une L–**représentation de Banach** de G est un L–espace de Banach Π muni d'une action continue de G. La représentation Π est dite unitaire si elle admet un $\mathscr{O}_L$–réseau G-stable.[(a)]

Soit k_L le corps résiduel de L. On dit que Π est **unitaire admissible** s'il existe un $\mathscr{O}_L$–réseau G-stable Θ tel que $\left(\Theta \underset{\mathscr{O}_L}{\otimes} k_L\right)^H$ soit un k_L–espace de dimension finie (et donc un ensemble fini) pour tout sous-groupe compact ouvert H de G.

b. Une L–**représentation localement analytique** de G est un L–espace de type compact Π muni d'une action continue de G telle que tout $v \in \Pi$ l'application $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \Pi \\ g & \longmapsto & gv \end{array}$ soit localement analytique.

(*a*) Cela équivaut à l'existence d'une norme G-invariante définissant la topologie de Π.

Remarque 1.21. Soit H un sous-groupe compact ouvert de G, et soit $D(H)$ l'algèbre des distributions localement analytiques sur H, à valeurs dans L (*i.e.* le dual fort de l'espace des fonctions localement analytiques sur H, à valeurs dans L). Si Π est une L–

(5) Et même toute l'information si la représentation de départ est Frobenius semi-simple.

© Spartacus-Idh 2019

représentation continue de G sur un L–espace de type compact, alors Π est localement analytique si et seulement si la structure de H–module sur le dual topologique Π^* de Π s'étend en une structure de $D(H)$–module topologique.

Soit $\mathrm{Ban}(G)$ la catégorie des L–représentations de Banach unitaires admissibles de G, et soit $\mathrm{Rep}^{\mathrm{an}}(G)$ (resp. $\mathrm{Rep}^{\mathrm{lisse}}(G)$) la catégorie des L–représentations localement analytiques (resp. lisses) de G. On dispose de foncteurs

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ban}(G) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}^{\mathrm{an}}(G) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}^{\mathrm{lisse}}(G) \\ \Pi & \longrightarrow & \Pi^{\mathrm{an}} & & \\ & & X & \longrightarrow & X^{\mathrm{lisse}} \end{array}$$

où Π^{an} est le sous-espace G-invariant de Π formé des vecteurs $v \in \Pi$ qui sont localement analytiques, *i.e.* tels que l'application $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \Pi \\ g & \mapsto & gv \end{array}$ soit localement analytique, et X^{lisse} est le sous-espace de X formé des vecteurs lisses (*i.e.* fixés par un sous-groupe ouvert compact de G).

Si $\Pi \in \mathrm{Ban}(G)$, on note simplement $\Pi^{\mathrm{lisse}} = \left(\Pi^{\mathrm{an}}\right)^{\mathrm{lisse}}$. Notons que Π^{lisse} est la plupart du temps nul (mais il ne sera pas nul pour les représentations que l'on étudiera dans ce cours), alors que ce n'est pas du tout le cas de Π^{an}, grâce au théorème suivant, dû à Schneider et Teitelbaum [ST 03] et valable pour toute représentation de Banach admissible d'un groupe de Lie p–adique.

Théorème 1.22.

Π^{an} est dense dans Π pour tout $\Pi \in \mathrm{Ban}(G)$.

Remarque 1.23. Schneider et Teitelbaum montrent aussi que le foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{an}}$ est exact sur $\mathrm{Ban}(G)$ (c'est encore valable pour tout groupe de Lie p–adique à la place de G). Pour le groupe G, un des résultats principaux de [CD 14] affirme que le foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{an}}$ est pleinement fidèle si on le restreint à la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ban}(G)$ formée des représentations de longueur finie, ayant un caractère central. Plus précisément, si Π est une telle représentation, alors Π n'est autre que le complété unitaire universel de Π^{an}, *i.e.* pour toute représentation de Banach unitaire $\mathscr{B}$ (pas forcément admissible ou de longueur finie), l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{L[G]}(\Pi, \mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{L[G]}(\Pi^{\mathrm{an}}, \mathscr{B})$$

déduite de l'inclusion $\Pi^{\mathrm{an}} \subset \Pi$ est bijective. Cet énoncé semble être une conséquence immédiate de la densité de Π^{an} dans Π, mais il n'en est rien (le problème est que la topologie naturelle de Π^{an} n'est pas du tout celle induite par Π). D'ailleurs, la preuve de ce résultat utilise de manière cruciale les constructions et les résultats principaux de la correspondance de Langlands locale p–adique pour G (ainsi, ce résultat est pour l'instant connu seulement pour G, contrairement aux résultats généraux ci-dessus de Schneider et Teitelbaum).

Finissons ce court paragraphe avec un exemple explicite. Soit $\chi : \mathbb{Q}_p^* \to L^*$ le caractère cyclotomique, *i.e.* $\chi(x) = x|x|$. Soient δ_1, δ_2 deux caractères unitaires (*i.e.* à valeurs dans $\mathscr{O}_L^*$) de $\mathbb{Q}_p^*$, et notons

$$B(\delta_1, \delta_2) = \mathrm{Ind}(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1)^{\mathrm{cont}}$$

https://spartacus-idh.com

l'espace des fonctions continues $\phi : G \to L$ telles que

$$\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) g\right) = \delta_2(a)\chi^{-1}(d)\delta_1(d)\phi(g)$$

pour $g \in G$, $a, d \in \mathbb{Q}_p^*$ et $b \in \mathbb{Q}_p$. Le groupe G agit naturellement sur $B(\delta_1, \delta_2)$, par $(g.\phi)(x) = \phi(xg)$. Alors $B(\delta_1, \delta_2) \in \mathrm{Ban}(G)$ et on peut montrer que cette représentation est irréductible si et seulement si $\delta_2 \neq \chi^{-1}\delta_1$. Si $\delta_2 = \chi^{-1}\delta_1$, la représentation $B(\delta_1, \delta_2)$ est de longueur 2, extension de $\mathrm{St}^{\mathrm{cont}} \otimes (\delta_2 \circ \det)$ par $\delta_2 \circ \det$, où $\mathrm{St}^{\mathrm{cont}} = \mathscr{C}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), L)/\mathrm{cst}$ est la représentation de Steinberg continue de G. Cela fournit une famille d'objets irréductibles de $\mathrm{Ban}(G)$, que l'on appelle *ordinaires*. Il n'est pas très facile de construire d'autres objets irréductibles, mais on verra plus tard (*cf.* théorème 1.27) qu'il en existe beaucoup.

5.2 Le foncteur de Colmez

On dit qu'une représentation $\Pi \in \mathrm{Ban}(G)$ est **résiduellement de longueur finie** si elle admet un caractère central, ainsi qu'un $\mathscr{O}_L$–réseau $\Theta \subset \Pi$ stable par G et tel que $\Theta \otimes_{\mathscr{O}_L} k_L$ soit un $k_L[G]$–module de longueur finie. Soit $\mathrm{Ban}(G)^{\mathrm{lf}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ban}(G)$ dont les objets sont les représentations résiduellement de longueur finie et soit $\mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$ la catégorie des L–représentations continues, de dimension finie de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Colmez a construit [Col 10b] un foncteur covariant, exact et magique

$$V : \mathrm{Ban}(G)^{\mathrm{lf}} \to \mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}).$$

Nous allons rappeler rapidement la construction de ce foncteur. Elle passe par l'équivalence des catégories de Fontaine [Fon 90], qui permet de remplacer $\mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$ par une catégorie plus concrète, celle des (φ, Γ)–modules étales sur l'anneau de Fontaine $\mathscr{E}$. Notons $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ le complété p–adique de $\mathscr{O}_L[[T]][1/T]$ et $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}[1/p]$ son corps des fractions. Le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}_p)$ s'identifie à $\mathbb{Z}_p^*$ par le caractère cyclotomique p–adique, et on note σ_a l'élément de Γ qui correspond à $a \in \mathbb{Z}_p^*$ (on a donc $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$ pour $\zeta \in \mu_{p^\infty}$). On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E}$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires, respectant la structure d'anneau, de φ et Γ en posant

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1, \quad \sigma_a(T) = (1+T)^a - 1.$$

Définition 1.24.

Un (φ, Γ)–**module** sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ (resp. $\mathscr{E}$) est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$–module de type fini (resp. $\mathscr{E}$–espace vectoriel de dimension finie) muni d'actions semi-linéaires continues de φ et Γ, commutant entre elles. Un tel objet D est appelé **étale** si $\varphi(D)$ engendre D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ (resp. si D admet un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$–réseau qui est un (φ, Γ)–module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$).

On dispose alors du théorème fondamental suivant, dû à Fontaine [Fon 90] :

Théorème 1.25.

Il existe une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$ et la catégorie $\varphi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ des (φ, Γ)–modules étales sur $\mathscr{E}$.

© Spartacus-Idh 2019

De plus, cette équivalence admet une version entière et de torsion (en considérant des (φ,Γ)–modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et des $\mathscr{O}_L$–modules de type fini munis d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$). La construction du foncteur V passe par la construction d'un foncteur contravariant exact

$$D : \mathrm{Ban}(G)^{\mathrm{lf}} \to \varphi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}),$$

en posant $V(\Pi) = V(D(\Pi))^*(1)$, *i.e.* on tord par le caractère cyclotomique le dual de la représentation galoisienne correspondant à $D(\Pi)$ par l'équivalence de catégories de Fontaine.

Il nous reste à expliquer la construction de $D(\Pi)$ pour $\Pi \in \mathrm{Ban}(G)^{\mathrm{lf}}$. Soit $\mathrm{Rep}(G)^{\mathrm{lf,tors}}$ la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$–modules lisses, admissibles, de longueur finie, de torsion en tant que $\mathscr{O}_L$–modules, et ayant un caractère central. Il suffit de construire un foncteur D de la catégorie $\mathrm{Rep}(G)^{\mathrm{lf,tors}}$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_L$–représentations continues, de torsion en tant que $\mathscr{O}_L$–modules, de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. En effet, étant donné $\Pi \in \mathrm{Ban}(G)^{\mathrm{lf}}$, on choisit un réseau G-stable $\Theta \subset \Pi$ tel que $\Theta/\varpi_L\Theta$ soit de longueur finie sur $k_L[G]$, et on observe que $\Theta/\varpi_L^n\Theta \in \mathrm{Rep}(G)^{\mathrm{lf,tors}}$ pour tout n, ce qui permet de poser

$$D(\Pi) = \varprojlim_n D(\Theta/\varpi_L^n\Theta) \otimes_{\mathscr{O}_L} L.$$

Il est clair que $D(\Pi)$ ne dépend pas du choix de Θ.

Considérons alors $\Pi \in \mathrm{Rep}(G)^{\mathrm{lf,tors}}$ et choisissons un sous-$\mathscr{O}_L$–module de longueur finie $W \subset \Pi$ qui engendre Π sur $\mathscr{O}_L[G]$ et qui est stable par $K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (l'existence de W découle facilement des hypothèses faites sur Π). L'orthogonal $D_W^+(\Pi)$ (dans $\Pi^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_L}(\Pi, L/\mathscr{O}_L)$) de

$$\sum_{a+p^n\mathbb{Z}_p \not\subset \mathbb{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) W$$

est stable par $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_p\setminus\{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ce qui permet de le considérer comme un (φ,Γ)–module sur $\mathscr{O}_L[[T]]$ (à priori pas de type fini !), en faisant agir T par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$, φ par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\sigma_a \in \Gamma$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Colmez a montré [Col 10b, ch. III, IV] que

$$D(\Pi) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_L[[T]]} D_W^+(\Pi)$$

ne dépend pas du choix de W, que $\Pi \to D(\Pi)$ est un foncteur exact, et que $D(\Pi)$ est bien un (φ,Γ)–module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ (ce dernier point est difficile et repose sur la classification des représentations lisses, admissibles, irréductibles modulo p de G, due à Barthel, Livné et Breuil [BL 94, BL 95, Bre 03b, Bre 03a]).

Donnons deux exemples concrets. D'abord, si Π est de dimension finie sur L, il découle directement de la construction que $V(\Pi) = 0$. Ensuite, supposons que δ_1, δ_2 sont des caractères unitaires de $\mathbb{Q}_p^*$ et considérons la représentation $B(\delta_1,\delta_2)$ introduite après le théorème 1.22. On montre que $B(\delta_1,\delta_2) \in \mathrm{Ban}(G)^{\mathrm{lf}}$ et que

$$V(B(\delta_1,\delta_2)) \simeq L(\delta_1),$$

où $L(\delta_1)$ est le caractère de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ correspondant à δ_1 par la théorie locale du corps des classes (à priori δ_1 correspond à un caractère de $W_{\mathbb{Q}_p}$, mais le fait que δ_1 est unitaire permet de prolonger par continuité ce caractère à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$).

https://spartacus-idh.com

5.3 La correspondance p–adique

Le théorème suivant a été établi dans [CDP 14], suite à une longue série de travaux de Berger, Breuil [BB 10, Bre 04] (qui a été le premier à formuler des conjectures très précises dans le cadre du programme de Langlands p–adique, et à vérifier leur validité dans certains cas), Colmez [Col 10a, Col 10b], Emerton [Eme 06a, Eme 11], Kisin [Kis 10], Paškūnas [Paš 13]. Pour l'énoncer, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 1.26.

Une représentation $\Pi \in \mathrm{Ban}(G)$ est dite **supersingulière** si Π est (topologiquement) absolument irréductible et si Π n'est pas isomorphe à un sous-quotient de l'induite parabolique d'un caractère unitaire du tore diagonal de G.

Une manière d'énoncer la correspondance p–adique est alors la suivante :

Théorème 1.27.

Toute représentation supersingulière Π est dans $\mathrm{Ban}(G)^{\mathrm{lf}}$, et le foncteur V de Colmez induit une bijection

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{représentations supersingulières} \\ \Pi \in \mathrm{Ban}(G) \end{array} \right\} \Big/ \simeq$$
$$\updownarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} L\text{–représentations continues, absolument irréductibles,} \\ \text{de dimension 2 de } \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \end{array} \right\} \Big/ \simeq$$

Remarque 1.28.

1. La première partie de l'énoncé a été établie par Paškūnas [Paš 13] pour $p \geqslant 5$, les cas restants faisant l'objet de [CDP 14]. Ce résultat de finitude permet de faire fonctionner le foncteur de Colmez, *i.e.* il permet de définir la flèche attachant à une représentation supersingulière Π une représentation galoisienne $V(\Pi)$.

2. Un des points les plus délicats du théorème est de montrer que $V(\Pi)$ est bien de dimension 2 si Π est supersingulière.

3. Une autre construction de Colmez (qui sera rappelée dans le troisième chapitre) associe à toute L–représentation V de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ une représentation $\Pi(V) \in \mathrm{Ban}(G)$, et $\Pi(V)$ est supersingulière si V est absolument irréductible.

4. Un point fondamental (et très différent du cas « classique ») est que toutes ces constructions sont fonctorielles (en Π et en V).

5. Voici deux exemples « concrets » et fondamentaux (il s'agit des deux premiers cas connus de la correspondance, et leur étude joue d'ailleurs un rôle fondamental dans la construction et l'étude de la correspondance).

• Soit $k \geqslant 2$ un entier et a_p un élément de l'idéal maximal de L. Soit $\sigma = \mathrm{Sym}^{k-2}(L^2)$, vue comme représentation de $KZ := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^*$ en faisant agir $p \in \mathbb{Q}_p^*$ trivialement et le reste de la manière naturelle (on identifie $\mathbb{Q}_p^*$ au centre de G). Soit

$$\Pi_{k,a_p} = \frac{\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma)}{T - a_p},$$

© Spartacus-Idh 2019

où T est un certain opérateur de Hecke que nous n'allons pas expliciter. De façon encore plus concrète, on peut écrire

$$\Pi_{k,a_p} \simeq \mathrm{Sym}^{k-2}(L^2) \otimes_L \mathrm{Ind}_B^G(\lambda_1^{v_p} \otimes (p/\lambda_2)^{v_p}),$$

où λ_1, λ_2 sont les racines du polynôme $X^2 - a_p X + p^{k-1}$, l'induite est lisse, et B est le Borel triangulaire supérieur de G. On montre que Π_{k,a_p} est irréductible si $a_p \neq \pm(p^{\frac{k}{2}} + p^{\frac{k}{2}-1})$. D'après un théorème fondamental de Berger-Breuil [BB 10] (complété par Paškūnas dans le cas $a_p = \pm 2p^{\frac{k-1}{2}}$ si $p > 2$, voir [CDP 14] pour le cas $p = 2$), Π_{k,a_p} admet un réseau de type fini sur $\mathcal{O}_L[G]$ et le complété de Π_{k,a_p} par rapport à un tel réseau est (indépendant du choix du réseau et) une représentation unitaire, admissible, irréductible de G. Ce complété correspond à la représentation galoisienne V_{k,a_p} par le théorème ci-dessus (voir la remarque 1.18 pour la définition de V_{k,a_p}). Notons que l'existence du réseau ou la non nullité du complété sont des résultats hautement nontriviaux, bien que Π_{k,a_p} soit tout à fait « concrète ».

• Soit $k > 2$ et $\mathscr{L} \in L$. Soit $\delta = |\cdot|^{\frac{k}{2}-1} \otimes |\cdot|^{\frac{k}{2}-1} x^{k-2}$, un caractère du tore diagonal de G. La représentation algébrique $W_k = \mathrm{Sym}^{k-2}(L^2) \otimes |\det|^{\frac{k}{2}-1}$ se plonge dans $\mathrm{Ind}_B^G(\delta)$ (l'induite est lisse). D'autre part, on construit une extension de $\mathrm{Ind}_B^G(\delta)$ par elle-même en induisant une B-extension $\sigma_{\mathscr{L}} \otimes \delta$ du caractère δ par lui-même, où $\sigma_{\mathscr{L}}$ est donnée par

$$\sigma_{\mathscr{L}}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \log_{\mathscr{L}} \frac{a}{d} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

$\log_{\mathscr{L}}$ étant le logarithme p-adique de valeur $\mathscr{L}$ en p. Soit $\pi : \mathrm{Ind}_B^G(\sigma_{\mathscr{L}}) \to \mathrm{Ind}_B^G(\delta)$ la projection naturelle et soit $\Sigma(k, \mathscr{L}) = \pi^{-1}(W_k)/W_k$. Colmez [Col 10c] a montré que $\Sigma(k, \mathscr{L})$ admet un réseau G-stable, dont le complété $B(k, \mathscr{L})$ est une représentation unitaire, admissible, irréductible de G (des cas particuliers de ce résultat ont été établis par Breuil dans ses articles fondateurs sur la correspondance de Langlands p-adique [Bre 04, Bre 10b]). Il s'agit de la représentation attachée à la représentation galoisienne $V_{k,\mathscr{L}}$ (*cf.* remarque 1.18) par le théorème ci-dessus.

Nous aurons aussi besoin du théorème de compatibilité entre les correspondances « classique » et p-adique, dû à Colmez [Col 10b] et Emerton [Eme 11]. Rappelons que si V est de de Rham, on dispose d'une représentation de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(V)$, *cf.* paragraphe 4.

Théorème 1.29.

Si Π et V se correspondent (via le théorème précédent), alors $\Pi^{\mathrm{lisse}} \neq 0$ si et seulement si V est de de Rham, à poids de Hodge-Tate 0 et 1, dans quel cas

$$\Pi^{\mathrm{lisse}} = \mathrm{LL}(\mathrm{WD}(V)).$$

6 Les principaux résultats de ce cours

Fixons une représentation lisse irréductible ρ de D^*, définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, à caractère central trivial. Prenons n assez grand pour que ρ soit triviale

https://spartacus-idh.com

sur $1+\varpi_D^n\mathcal{O}_D$ (un tel n existe puisque D^* est compact modulo le centre). Supposons que $\dim\rho>1$, de telle sorte que $\pi:=\mathrm{JL}(\rho)$ est une représentation supercuspidale de G. Soit enfin $\sigma=\mathrm{LL}(\pi)$ la représentation irréductible de dimension 2 de $W_{\mathbb{Q}_p}$ attachée à π. Toutes ces représentations sont définies sur L.

Rappelons que nous disposons aussi d'espaces analytiques Σ_n sur $\mathbb{Q}_p$, modèles rationnels de la tour de Drinfeld. Ils sont munis d'actions de G et D^*, qui commutent entre elles. En fixant L, ρ une fois pour toutes, on écrira Σ_n au lieu de $\Sigma_n\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$ dans la suite.

Définition 1.30.

Soit $\mathcal{V}(\rho)$ l'ensemble des L–représentations de de Rham V, de dimension 2, à poids de Hodge-Tate 0 et 1, et telles que

$$\mathrm{WD}(V)\xrightarrow{\sim}\sigma.$$

Remarque 1.31. Une telle représentation V est absolument irréductible, ce qui permet de lui associer (grâce au théorèmes 1.27 et 1.29) une représentation supersingulière $\Pi(V)\in\mathrm{Ban}(G)$ telle que $\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}\xrightarrow{\sim}\pi$.

Quand V varie dans $\mathcal{V}(\rho)$, les $(\varphi,N,\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$–modules $D_{\mathrm{pst}}(V)$ sont isomorphes (on oublie la filtration de Hodge), et nous allons noter $M=M(\rho)$ la classe d'isomorphisme de ces $(\varphi,N,\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$–modules. Notons d'ailleurs que $N=0$ sur M, puisque la représentation de Weil-Deligne sous-jacente est irréductible.

Enfin, si X est une représentation de D^*, on note

$$X^\rho=\mathrm{Hom}_{D^*}(\rho,X)=\left(\rho^*\underset{L}{\otimes}X\right)^{D^*}.$$

Le premier résultat s'énonce alors :

Théorème 1.32.

Pour tout $V\in\mathcal{V}(\rho)$ il existe un unique (à scalaire près) isomorphisme de G–modules de Fréchet

$$\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho\xrightarrow{\sim}\left(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}\right)^*.$$

On obtient donc des suites exactes

$$0\longrightarrow\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho\longrightarrow\left(\Pi(V)^{\mathrm{an}}\right)^*\longrightarrow\pi^*\longrightarrow 0$$

pour $V\in\mathcal{V}(\rho)$.

Remarque 1.33.

1. En « particulier » la représentation $\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}\xrightarrow{\sim}\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\pi$ ne dépend pas du choix de $V\in\mathcal{V}(\rho)$. Nous écrivons « particulier » car ce résultat (dû à Colmez [Col 10b, ch. VI]) est un ingrédient majeur de la preuve du théorème !

2. Colmez a montré [Col 15] que $\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$ est un G–module topologiquement irréductible. On en déduit l'irréductibilité de $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$.

© Spartacus-Idh 2019

3. Le théorème entraine aussi que $\mathscr{O}(\Sigma_n)$ est un G–module coadmissible au sens de Schneider-Teitelbaum [ST 03] (il s'agit d'une notion de finitude pour les duaux de représentations localement analytiques de G, par exemple $\left(\Pi^{\mathrm{an}}\right)^*$ est un G–module coadmissible pour tout $\Pi \in \mathrm{Ban}(G)$. Ce résultat était connu pour $n = 1$ (et pour $\mathrm{GL}_2(F)$ avec $F/\mathbb{Q}_p$ finie) grâce aux travaux de Patel, Schmidt et Strauch [PSS 17].

L'espace Σ_n est un espace de Stein et les résultats de Strauch [Str 08] concernant les composantes irréductibles géométriques de Σ_n combinés avec l'isomorphisme de Faltings-Fargues [FF 17] montrent que $H^0_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho = 0$ (cela utilise de manière cruciale le fait que $\dim(\rho) > 1$). On en déduit une suite exacte de G–modules de Fréchet

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho \longrightarrow \Omega^1(\Sigma_n)^\rho \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \longrightarrow 0.$$

Notons

$$M_{\mathrm{dR}} = \left(M \underset{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}_p}\right)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}},$$

un L–espace de vectoriel de dimension 2. Pour tout $V \in \mathscr{V}(\rho)$ on a un isomorphisme (unique à un scalaire près) $D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M$, qui induit un isomorphisme $D_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} M_{\mathrm{dR}}$. Cela permet de définir une application

$$\mathscr{V}(\rho) \longrightarrow \mathbb{P}(M_{\mathrm{dR}}) \simeq \mathbb{P}^1(L)$$

en envoyant $V \in \mathscr{V}(\rho)$ sur $\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V)) \subseteq D_{\mathrm{dR}}(V) \simeq M_{\mathrm{dR}}$.

Le résultat suivant découle du théorème de Colmez-Fontaine 1.17 (l'irréductibilité de la représentation de Weil-Deligne permet de montrer que toute filtration sur M_{dR} est faiblement admissible) :

Proposition 1.34.

L'application $\mathscr{V}(\rho) \longrightarrow \mathbb{P}(M_{\mathrm{dR}})$ ci-dessus est bijective.

Si $\mathscr{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$ est une L-droite, on note $V_{\mathscr{L}} \in \mathscr{V}(\rho)$ la représentation qui lui correspond par la bijection ci-dessus. Notre résultat principal s'énonce alors comme suit (on écrit $\overline{\omega}$ pour l'image de $\omega \in \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$) :

Théorème 1.35.

Il existe un isomorphisme de G–modules topologiques

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \xrightarrow{\sim} M^*_{\mathrm{dR}} \otimes \pi^*$$

tel que pour toute L-droite $\mathscr{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$ on ait un isomorphisme de G–modules de Fréchet (unique à scalaire près)

$$\left(\Pi(V_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}\right)^* \cong \left\{\omega \in \Omega^1(\Sigma_n)^\rho \mid \overline{\omega} \in \mathscr{L}^\perp \otimes \pi^* \subset M^*_{\mathrm{dR}} \otimes \pi^* \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho\right\}.$$

https://spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2019

Chapitre 2

Uniformisation p-adique et compatibilité local-global

1 Introduction

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème 2.2 ci-dessous, en utilisant des arguments globaux. Bien que beaucoup plus faible que les deux résultats principaux énoncés à la fin du premier chapitre, ce théorème jouera un rôle fondamental par la suite, car il permet de relier la géométrie des espaces $\mathscr{M}_n$ et les représentations sortant de la correspondance de Langlands p–adique. Ce théorème est essentiellement une combinaison de deux résultats fondamentaux, de nature globale :

- le théorème d'uniformisation p–adique de Cerednik-Drinfeld [Che 76, BC 91, Dri 76], qui relie la géométrie de $\mathscr{M}_n$ et celle de certaines courbes de Shimura.
- le théorème de compatibilité local-global p–adique d'Emerton [Eme 11], qui permet de retrouver la correspondance de Langlands p–adique dans la cohomologie étale complétée de la tour des courbes modulaires. En fait, nous aurons besoin d'une version de ce théorème pour une tour de variétés de Hida, mais les arguments sont rigoureusement les mêmes que dans le cas des courbes modulaires (sauf que dans notre cas il n'y aura pas d'action de Galois sur les groupes de cohomologie, qui seront simplement des espaces de fonctions continues sur certaines variétés p–adiques compactes).

Avant de continuer, rappelons quelques notations du premier chapitre.

- L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (corps des coefficients)
- D est l'unique algèbre de quaternions ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$
- $\mathscr{M}_n$ est le n-ème étage de la tour de Drinfeld, avec

$$\mathscr{M}_0 = \coprod_{\mathbb{Z}} \Omega \hat{\otimes} \breve{\mathbb{Q}}_p,$$

  Ω étant le demi-plan de Drinfeld.
- Σ_n est le modèle canonique sur $\mathbb{Q}_p$ du quotient $p^{\mathbb{Z}}\backslash\mathscr{M}_n$, p étant vu comme un élément du centre de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

- π est une représentation lisse, supercuspidale de G, définie sur L, à caractère central trivial, et $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$ est la représentation lisse irréductible de D^* qui lui est attachée par la correspondance de Jacquet-Langlands locale.
- On fixe n assez grand de telle sorte que ρ soit triviale en restriction à $1+p^n\mathcal{O}_D$.
- On écrit $X^\rho = \mathrm{Hom}_{D^*}(\rho, X)$ pour toute L–représentation X de D^*.
- Si V est une L–représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on note $\Pi(V)$ la L–représentation de Banach de G associée à V par la correspondance de Langlands locale p–adique.

Définition 2.1.

On dit qu'une L–représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est π–**compatible** si V est de dimension 2, de de Rham, à poids de Hodge-Tate 0, 1 et si

$$\mathrm{LL}(\mathrm{WD}(V)) \simeq \pi,$$

où $\mathrm{WD}(V)$ est la représentation de Weil-Deligne attachée à V par la recette de Fontaine (paragraphe 4 du premier chapitre).

Nous allons expliquer la preuve du théorème suivant :

Théorème 2.2.

Il existe une L–représentation π–compatible V telle que

$$\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}((\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*, \Omega^1(\Sigma_n)^\rho) \neq 0.$$

Dans la suite on note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}}$ les adèles finies ($\hat{\mathbb{Z}}$ étant le complété profini de $\mathbb{Z}$), $\mathbb{A}_f^p$ les adèles finies en dehors de p, etc.

2 Uniformisation complexe

Soit $B/\mathbb{Q}$ une algèbre de quaternions déployée à l'infini et ramifiée en p. Regardons B^* comme un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ et fixons des isomorphismes $B^*(\mathbb{R})\simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $B^*(\mathbb{Q}_p)\simeq D^*$.

On dispose alors d'une tour (Sh_{K_f}) de courbes de Shimura, indexée par les sous-groupes ouverts compacts suffisamment petits K_f de $B^*(\mathbb{A}_f)$. Ces courbes sont propres et lisses sur $\mathbb{Q}$ et leurs points complexes sont décrits par

$$\mathrm{Sh}_{K_f}(\mathbb{C}) = B^*(\mathbb{Q})\backslash(X\times B^*(\mathbb{A}_f)/K_f),$$

avec $X = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ l'analogue réel de Ω.

Remarque 2.3.

a. $B^*(\mathbb{Q})$ agit sur X via le plongement $B^*(\mathbb{Q})\subset B^*(\mathbb{R})\simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et l'action naturelle de ce dernier groupe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On peut en fait identifier $X = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ avec la

https://spartacus-idh.com

classe de $B^*(\mathbb{R})$–conjugaison du morphisme

$$h : \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_{m,\mathbb{C}}) \to B^*(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \quad z = x + iy \to \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right),$$

en identifiant ghg^{-1} avec $g(i) = \frac{ai+b}{ci+d}$ pour $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in B^*(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On obtient ainsi une donnée de Shimura et la théorie générale permet de construire les courbes Sh_{K_f} sur $\mathbb{Q}$.

b. Le groupe $B^*(\mathbb{A}_f)$ agit naturellement à droite sur la tour (Sh_{K_f}), de telle sorte que $g \in B^*(\mathbb{A}_f)$ induise un isomorphisme $\mathrm{Sh}_{K_f} \simeq \mathrm{Sh}_{g^{-1}K_f g}$. L'action est définie sur $\mathbb{Q}$, et se voit très facilement sur les $\mathbb{C}$-points : en termes de l'uniformisation complexe

$$\mathrm{Sh}_{K_f}(\mathbb{C}) = B^*(\mathbb{Q})\backslash(X \times B^*(\mathbb{A}_f)/K_f)$$

elle est simplement donnée par $[x, g'K_f] \to [x, g'gK_f]$.

Si $x_1, \ldots, x_r$ forment un système de représentants pour l'action de $B^*(\mathbb{Q})$ sur $B^*(\mathbb{A}_f)/K_f$ (cette action n'a qu'un nombre fini d'orbites), et si on note Γ_i le stabilisateur de x_i, alors les Γ_i sont des sous-groupes discrets co-compacts de $B^*(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{Sh}_{K_f}(\mathbb{C}) = \coprod_{i=1}^{r} \Gamma_i\backslash X.$$

Notons

$$\Omega_{K_f} = H^0(\mathrm{Sh}_{K_f}(\mathbb{C}), \Omega^1)$$

l'espace des formes différentielles holomorphes sur la surface de Riemann compacte $\mathrm{Sh}_{K_f}(\mathbb{C})$, et posons

$$\Omega_\infty = \varinjlim_{K_f} \Omega_{K_f},$$

la limite inductive étant prise sur les sous-groupes ouverts compacts K_f de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$. Alors Ω_∞ est une représentation lisse admissible de $B^*(\mathbb{A}_f)$ et Ω_{K_f} s'identifie à l'espace des K_f-invariants dans Ω_∞. En écrivant l'uniformisation

$$\mathrm{Sh}_{K_f}(\mathbb{C}) = \coprod_{i=1}^{r} \Gamma_i\backslash X$$

en termes du demi-plan de Poincaré (la partie « positive » de X), il n'est pas difficile de vérifier que Ω_{K_f} s'identifie à l'espace des fonctions

$$f : B^*(\mathbb{Q})\backslash B^*(\mathbb{A})/\mathbb{R}^* K_f \to \mathbb{C}$$

telles que

- l'application $z = x + iy \to \frac{1}{y} f(g\left(\begin{smallmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$ est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré pour tout $g \in B^*(\mathbb{A})$ et
- $f(g\, r_\theta) = e^{-2i\pi\theta} f(g)$ pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $g \in B^*(\mathbb{A})$, avec $r_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$.

© Spartacus-Idh 2019

En notant $\mathscr{A}$ l'espace des formes automorphes pour $B^*(\mathbb{A})$, on en déduit facilement un isomorphisme

$$\Omega_\infty \simeq \mathrm{Hom}_{B^*(\mathbb{R})}(\sigma_2, \mathscr{A}),$$

où σ_2 est la série discrète holomorphe de poids 2 de $B^*(\mathbb{R})$. En décomposant $\mathscr{A} = \bigoplus_\pi \pi$ selon les représentations automorphes π de $B^*(\mathbb{A})$ et en décomposant chaque π sous la forme $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ (avec π_∞ une représentation de $B^*(\mathbb{R})$ et π_f une représentation de $B^*(\mathbb{A}_f)$) on aboutit à la formule

$$\Omega_\infty = \bigoplus_{\pi_\infty \simeq \sigma_2} \pi_f,$$

qui est un cas très particulier de la formule de Matsushima. On notera dans la suite SD_2 l'ensemble des formes automorphes π contribuant à la décomposition précédente, *i.e.* telles que $\pi_\infty \simeq \sigma_2$.

3 Uniformisation p-adique

Tout ce qui précède admet un analogue p–adique, que nous allons discuter maintenant. Fixons un ordre maximal $\mathscr{O}_B$ de B (ils sont tous conjugués par le théorème d'approximation forte) qui est préservé par l'involution canonique de B. Alors la courbe de Shimura Sh_{K_f} sur $\mathbb{Q}$ classifie les triplets (à isomorphisme près) (A, ι, η), avec A une surface abélienne sur S (un $\mathbb{Q}$-schéma), $\iota : \mathscr{O}_B \to \mathrm{End}_S(A)$ une action de $\mathscr{O}_B$ sur A et η une structure de niveau K_f sur A.

Rappelons que nous avons fixé un isomorphisme $B^*(\mathbb{Q}_p) \simeq D^*$. Supposons d'abord que $K_f = \mathscr{O}_D^* \times K^p$ pour un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit K^p de $B^*(\mathbb{A}_f^p)$. La courbe $\mathrm{Sh}_{K_f} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ admet alors un modèle S_{K_f} sur $\mathbb{Z}_p$ (qui est un schéma projectif sur $\mathbb{Z}_p$), classifiant des triples (A, ι, η) sur une base S (qui est maintenant un $\mathbb{Z}_p$–schéma), où A et ι sont comme ci-dessus, le groupe p–divisible $A[p^\infty]$ est un $\mathscr{O}_D$–module formel spécial au sens de Drinfeld [1] (*cf.* déf. 1.1, chapitre 1, pour cette notion) et η est une structure de niveau K^p, *i.e.* une K^p–orbite d'isomorphismes de $\mathscr{O}_B$–modules $T_f^p(A) \simeq \mathscr{O}_B \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p$. Un point important est que les $\bar{\mathbb{F}}_p$–points de S_{K_f} vivent dans une seule classe d'isogenie, car il existe une unique classe d'isogenie de surfaces abéliennes sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ avec action de $\mathscr{O}_B$. Cela permettra une uniformisation p–adique de toute la courbe de Shimura.

Si on fixe un $\bar{\mathbb{F}}_p$–point $x = [(A, \iota, \eta)]$ de S_{K_f}, l'algèbre

$$\bar{B} = \mathrm{End}(x) \otimes \mathbb{Q}$$

est une algèbre de quaternions définie (*i.e.* ramifiée à l'infini), déployée en p et ayant les mêmes invariants que B en dehors de ces deux places de $\mathbb{Q}$. Cela découle facilement de l'isomorphisme $V_f^p(A) \simeq B \otimes \mathbb{A}_f^p$ et du théorème d'isogenie de Tate. Le même argument fournit un isomorphisme $B^*(\mathbb{A}_f^p) \simeq \bar{B}^*(\mathbb{A}_f^p)$, et nous allons systématiquement identifier ces deux groupes. En particulier on se permettra de regarder

(1) Cela est automatique en caractéristique 0.

https://spartacus-idh.com

K^p comme un sous-groupe de $\bar{B}^*(\mathbb{A}_f^p)$. Cerednik [Che 76] a montré que le complété formel de $S_{K_f} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \breve{\mathbb{Z}}_p$ le long de la fibre spéciale s'identifie naturellement à $\bar{B}^*(\mathbb{Q})\backslash(\mathfrak{X} \times \bar{B}^*(\mathbb{A}_f^p)/K^p)$ ($\mathfrak{X}$ étant le modèle formel canonique de $\breve{\mathscr{M}}_0$), de manière compatible avec le changement de K^p, l'action de D^* et la donnée de descente à la Weil. De plus, cette identification se relève au niveau des groupes formels universels, ce qui permet de déduire le théorème d'uniformisation suivant (connu sous le nom de **théorème d'uniformization de Cerednik-Drinfeld**), dans lequel nous posons

$$\mathrm{Sh}_n(K^p) = \mathrm{Sh}_{(1+p^n\mathscr{O}_D)K^p}.$$

Théorème 2.4.

Il existe des isomorphismes d'espaces rigides analytiques sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$

$$(\mathrm{Sh}_n(K^p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p)^{\mathrm{an}} \simeq \bar{B}^*(\mathbb{Q})\backslash(\mathscr{M}_n \times \bar{B}^*(\mathbb{A}_f^p)/K^p),$$

compatibles avec les variations de n et de K^p (en particulier compatibles avec l'action de l'algèbre de Hecke en dehors de p), avec l'action de D^* et aussi avec les données de descente à la Weil.

On peut refaire le jeu précédent : en choisissant un système de représentants pour l'action de $\bar{B}^*(\mathbb{Q})$ sur $\bar{B}^*(\mathbb{A}_f^p)/K^p$, on obtient des sous-groupes discrets co-compacts Γ_i de $\bar{B}^*(\mathbb{Q}) \subset \bar{B}^*(\mathbb{Q}_p) \simeq G$, qui agissent proprement discontinument sur $\mathscr{M}_n$. Il existe N tel que $p^N \in \Gamma_i$ pour tout i, et si on note $\Sigma_{n,N}$ le modèle de $p^{N\mathbb{Z}}\backslash\mathscr{M}_n$ sur $\mathbb{Q}_p$, le théorème d'uniformisation de Cerednik-Drinfeld fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Sh}_n(K^p)^{\mathrm{an}} \simeq \coprod_i \Gamma_i\backslash\Sigma_{n,N}.$$

Pour simplifier certaines formules, nous allons écrire $\mathrm{Sh}_n(K^p)$ *au lieu de* $\mathrm{Sh}_n(K^p)^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ *par la suite*. Soit

$$X(K^p) = \bar{B}^*(\mathbb{Q})\backslash\bar{B}^*(\mathbb{A}_f^p)/K^p = \coprod_i \Gamma_i\backslash G.$$

Alors $X(K^p)$ est une variété p–adique compacte (mais pas une variété rigide analytique!) munie d'une action naturelle de G. Notons $\mathrm{LA}(X(K^p))$ l'espace des fonctions localement analytiques sur $X(K^p)$, à valeurs dans L.

Le résultat suivant sera fondamental pour la preuve du théorème 2.2 :

Théorème 2.5.

On dispose d'un isomorphisme canonique

$$\Omega^1(\mathrm{Sh}_n(K^p))^\rho \simeq \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}((\Omega^1(\mathscr{M}_n)^\rho)^*, \mathrm{LA}(X(K^p))).$$

En fait, le théorème 2.2 se déduit du précédent en faisant l'analyse spectrale pour l'action de l'algèbre de Hecke en dehors de p (c'est plus facile à le dire qu'à

© Spartacus-Idh 2019

le faire : dans cette analyse spectrale on aura besoin du théorème de compatibilité local-global d'Emerton [Eme 11] adapté à notre situation, qui utilise toute la force de la correspondance de Langlands locale p–adique pour $G\ldots$).

Nous allons expliquer maintenant la preuve du théorème 2.5. Nous commençons par un certain nombre de calculs purement formels, que l'on justifiera ensuite. En utilisant la décomposition

$$\mathrm{Sh}_n(K^p)^{\mathrm{an}} \simeq \coprod_i \Gamma_i \backslash \Sigma_{n,N}$$

et le fait que le centre de D^* agit trivialement sur ρ, on obtient

$$\Omega^1(\mathrm{Sh}_n(K^p))^\rho = \bigoplus_i \Omega^1(\Gamma_i\backslash\Sigma_n)^\rho = \bigoplus_i [\Omega^1(\Sigma_n)^\rho]^{\Gamma_i}.$$

Pour simplifier les notations, posons $\Pi = (\Omega^1(\Sigma_n)^\rho)^*$. Puisque Σ_n est Stein, $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ est un L–espace de Fréchet nucléaire, en particulier réflexif, et donc $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho = \Pi^*$. En utilisant la réciprocité de Frobenius on obtient

$$\begin{aligned}\bigoplus_i [\Omega^1(\Sigma_n)^\rho]^{\Gamma_i} &= \bigoplus_i (\Pi^*)^{\Gamma_i} = \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\Gamma_i}(1,\Pi^*) = \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\Gamma_i}(\Pi,1)\\ &= \bigoplus_i \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi, \mathrm{LA}(\Gamma_i\backslash G)) = \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi, \mathrm{LA}(X(K^p))).\end{aligned}$$

Il faut tout de même justifier ces calculs formels (le problème est topologique), ce qui demande un peu d'analyse fonctionnelle. Il s'agit de justifier les deux assertions suivantes (le reste étant purement formel) :

• Π est une L–représentation localement analytique de G sur un espace de type compact. Rappelons qu'un L–espace vectoriel topologique localement convexe est de type compact s'il est la limite inductive (localement convexe) d'une suite de L–espaces de Banach avec des morphismes de transition injectifs et compacts.

• Si $l \in (\Pi^*)^{\Gamma_i}$ (pour un certain i), alors l'application

$$\Pi \to \mathrm{LA}(\Gamma_i\backslash G), \quad v \to (\Gamma_i g \to l(gv))$$

est continue.

Expliquons d'abord le deuxième point (en admettant le premier). On se ramène à l'énoncé purement « abstrait » suivant : si Π est une représentation localement analytique de G sur un espace de type compact, avec G un groupe de Lie p–adique, alors pour tout $l \in \Pi^*$ l'application

$$\Pi \to \mathrm{LA}(G), \quad v \to (g \to l(gv))$$

est continue. Cela n'est pas difficile, mais un peu pénible : on se ramène facilement au cas où G est compact, dans quel cas il suffit de vérifier que la flèche

$$D(G) \to \Pi^*, \quad \mu \to (v \to \int_G l(gv)\mu(g))$$

https://spartacus-idh.com

est continue. Un exercice d'analyse fonctionnelle montre qu'il suffit de démontrer l'assertion suivante : si v est fixé et si $\mu_n \to 0$ dans $D(G)$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_G l(gv)\mu_n(g) = 0,$$

ce qui a été vérifié par Schneider et Teitelbaum dans leur article fondateur [ST 02b].

Il nous reste à expliquer le premier point. Comme Σ_n est un espace Stein, $\Omega^1(\Sigma_n)$ est un L-fréchet nucléaire et donc son dual est un espace de type compact. Schneider et Teitelbaum ont montré [ST 02b] que $V \to V_b'$ (dual fort de V) induit une anti-équivalence entre la catégorie des représentations localement analytiques de G sur des L–espaces de type compact et la catégorie des $D(G)$–modules séparément continus sur des Fréchets nucléaires, où $D(G)$ est l'algèbre des distributions sur G. Il suffit donc de montrer que l'action de G sur $\Omega^1(\Sigma_n)$ s'étend en une structure de $D(G)$–module séparément continu. Puisque $\Omega^1(\Sigma_n) = \mathcal{O}(\Sigma_n)dz$, il n'est pas difficile de voir qu'il suffit de démontrer le même énoncé avec $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ au lieu de $\Omega^1(\Sigma_n)$.

En considérant un recouvrement croissant de Σ_n par des affinoïdes, on se ramène à démontrer l'assertion suivante : si U_0 est un ouvert affinoïde de Σ_0 et si U_n est son image inverse dans Σ_n, alors pour tout sous-groupe ouvert compact H de G qui stabilise U_0 (et donc U_n), l'action de H sur $\mathcal{O}(U_n)$ s'étend en une structure de $D(H)$–module continu sur $\mathcal{O}(U_n)$.

Pour démontrer cette assertion, on commence par remarquer que pour tout $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(H)$ la dérivation continue

$$\partial_{\mathfrak{X}}(f) = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{p^k\mathfrak{X}}f - f}{p^k}$$

de $\mathcal{O}(U_0)$ s'étend de manière unique en une dérivation continue $\partial_{\mathfrak{X}}$ de $\mathcal{O}(U_n)$ (puisque $U_n \to U_0$ est fini étale). En considérant le polynôme minimal de $f \in \mathcal{O}(U_n)$ sur $\mathcal{O}(U_0)$ et en utilisant la continuité de l'action de H sur U_n (conséquence du théorème d'Elkik [Elk 73]) il n'est pas difficile de montrer que l'égalité précédente

$$\partial_{\mathfrak{X}}(f) = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{p^k\mathfrak{X}}f - f}{p^k}$$

reste valable pour tout $f \in \mathcal{O}(U_n)$ (le point à vérifier est que la limite existe bien !).

Si $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_4$ est une base de $\mathfrak{g}$, on en déduit l'existence d'une constante C telle que pour toute suite $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^4}$ satisfaisant

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} v_p(a_\alpha) - C|\alpha| = \infty$$

et pour tout $f \in \mathcal{O}(U_n)$ la série

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^4} a_\alpha \partial_{\mathfrak{X}_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{\mathfrak{X}_4}^{\alpha_4} f$$

converge dans $\mathcal{O}(U_n)$. On peut alors conclure facilement grâce à un résultat de Frommer [Fro 03] (« developpement de Taylor d'une distribution »). Voir la preuve du théorème 3.2 de [DLB 17] pour les détails.

© Spartacus-Idh 2019

4 Préliminaires sur la cohomologie de de Rham de Σ_n

Gardons les notations introduites dans la section précédente. La suite de Hochschild-Serre fournit des suites exactes

$$0 \to H^1(\Gamma_i, H^0_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{n,N})) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma_i \backslash \Sigma_{n,N}) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{n,N})^{\Gamma_i} \to H^2(\Gamma_i, H^0_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{n,N})).$$

En localisant en ρ les termes correspondant à $H^0_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{n,N})$ disparaissent (cela utilise la description des composantes irréductibles géométriques de $\Sigma_{n,N}$, qui se déduit des résultats de Strauch [Str 08]-du côté Lubin-Tate- et de l'isomorphisme de Faltings-Fargues [Fal 02a, FGL 08]), ce qui fournit (en faisant varier i et en utilisant l'uniformisation p–adique) un isomorphisme

$$\bigoplus_i (H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho)^{\Gamma_i} \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n(K^p)).$$

Puisque Σ_n est Stein, on a $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho = \Omega^1(\Sigma_n)^\rho / d\mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho$, et donc le dual $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*}$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ est une représentation localement analytique de G sur un espace de type compact (en tant que sous G–module fermé du dual de $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$, ce dernier dual étant localement analytique d'après la section précédente). On peut alors reprendre l'argument de réciprocité de Frobenius utilisé ci-dessus pour obtenir un isomorphisme

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n(K^p)) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_G(H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*}, \mathrm{LA}(X(K^p))),$$

compatible avec l'inclusion de $\Omega^1(\mathrm{Sh}_n(K^p))$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n(K^p))$ et avec l'isomorphisme du théorème 2.5. Un point qui sera très important pour la suite est le suivant :

Proposition 2.6.

Le G–module $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*}$ est lisse.

Démonstration. Comme il est localement analytique en tant que G–module, il suffit de montrer qu'il est tué par l'action infinitésimale de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Introduisons

$$a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), a^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}.$$

Notons aussi ∂ l'opérateur de multiplication par $z \in \mathscr{O}(\Sigma_0) \subset \mathscr{O}(\Sigma_n)$. On vérifie par un calcul direct (en niveau 0, prolongé au niveau n grâce au fait que Σ_n est étale sur Σ_0) les identités

$$a^+ = \partial u^+,\ a^- = -a^+,\ u^- = -\partial^2 u^+,\ \partial u^+ - u^+ \partial = 1$$

valables sur le dual de $\Omega^1(\Sigma_n)$. De plus, la dérivation $\mathscr{O}(\Sigma_n) \to \Omega^1(\Sigma_n)$ s'identifie à l'opérateur $-u^+$ via l'identification $\Omega^1(\Sigma_n) = \mathscr{O}(\Sigma_n) dz \simeq \mathscr{O}(\Sigma_n)$. Donc $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*}$ est tué par u^+ et les formules précédentes montrent qu'il est aussi tué par a^+, a^- et u^-, ce qui permet de conclure (cet argument très élégant est dû à Colmez). □

Fin de la preuve (ϕ,Γ)–modules Compatibilité local-global Conjecture de Breuil et Strauch Préface
https://spartacus-idh.com

5 Compatibilité local-global-le cas des courbes modulaires

5.1 La situation « classique »

Si K_f est un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit [2] de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, la surface de Riemann [3]

$$Y(K_f)(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \setminus ((\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K_f) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/\mathbb{C}^* K_f$$

est attachée à une courbe algébrique affine $Y(K_f)$, lisse sur $\mathbb{Q}$, la **courbe modulaire « ouverte » de niveau** K_f. Elle classifie les courbes elliptiques E munies d'une structure de niveau K_f, *i.e.* une K_f-orbite d'isomorphismes

$$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 \simeq \varinjlim_n E[n],$$

où $E[n]$ est le sous-groupe de n-torsion de E. Pour toute inclusion $K_f' \subset K_f$ on dispose d'un morphisme $Y(K_f') \to Y(K_f)$ de courbes algébriques sur $\mathbb{Q}$, et le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ agit sur le système des courbes $(Y(K_f))_{K_f}$ obtenu en faisant varier K_f (au niveau des $\mathbb{C}$-points, l'action est décrite par $(z, g).g' = (z, g\,g')$ via l'uniformization de $Y(K_f)(\mathbb{C})$ décrite ci-dessus).

Si $k \geqslant 2$, on peut construire une famille de systèmes locaux étales $\mathscr{F}_k$ de $\mathbb{Z}_p$–modules libres de rang $k-1$ sur $Y(K_f)$, de manière compatible avec le pullback par rapport aux morphismes canoniques $Y(K_f') \to Y(K_f)$, pour $K_f' \subset K_f$. Le système de faisceaux étales ainsi obtenu est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–équivariant par rapport à l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur $(Y(K_f))_{K_f}$. Plus précisément, on a $\mathscr{F}_k = \mathrm{Sym}^{k-2}(R^1\pi_*\mathbb{Z}_p)$, où $\pi : E^{\mathrm{un}} \to Y(K_f)$ est la courbe elliptique universelle avec structure de niveau K_f au-dessus de $Y(K_f)$. De manière plus concrète, le pullback de $\mathscr{F}_k$ à $Y(K_f)(\mathbb{C})$ est le système local (pour la topologie usuelle)

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \setminus ((\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f) \times \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}_p^2))/K_f,$$

où l'action est décrite par

$$\gamma.(z, g, x).k = (\gamma z, \gamma g k, k_p^{-1} x),$$

k_p étant la composante en p de $k \in K_f$ et $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ et enfin $x \in \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}_p^2)$.

Notons

$$H_k = \varinjlim_{K_f} H^1_{\text{ét}}(Y(K_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{F}_k)$$

et définissons de manière analogue l'espace $H_{k,\mathrm{par}}$ (en remplaçant $H^1_{\text{ét}}$ par $H^1_{\text{ét, par}}$, *i.e.* l'image de la cohomologie à support compact dans la cohomologie étale). La

(2) Il suffit que $K_f \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ soit sans torsion.
(3) On identifie $\mathbb{C}^*$ avec le sous-groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\mathbb{R}_+^*$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

© Spartacus-Idh 2019

limite inductive est prise sur tous les sous-groupes ouverts suffisamment petits K_f de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$. Alors H_k et $H_{k,\mathrm{par}}$ sont des $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–modules, l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ étant induite par l'action de ce groupe sur le système des courbes $(Y(K_f))_{K_f}$ et par l'équivariance des systèmes locaux $\mathscr{F}_k$.

Soit maintenant $f = q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + \cdots$ une forme parabolique nouvelle de poids $k \geqslant 2$ et de conducteur N, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et soit $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \overline{\mathbb{Q}}_p^*$ son caractère. Alors f donne naissance à une représentation automorphe $\pi(f)$, qui est une représentation irréductible, lisse, admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ (nous prenons la normalisation suivant laquelle $\pi(f) \otimes |\cdot|^{1-\frac{k}{2}}$ est unitaire). Notons

$$V_f = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)}(\pi(f), H_{k,\mathrm{par}}).$$

Le théorème suivant est dû à Deligne [Del 69] :

Théorème 2.7.

V_f est une représentation continue, irréductible, de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, non ramifiée en dehors de pN et telle que pour tout premier l ne divisant pas Np, le polynôme caractéristique d'un Frobenius géométrique en l est $X^2 - a_l X + \chi(l) l^{k-1}$.

Nous appelons V_f la *représentation galoisienne attachée à f*. La théorie d'Eichler-Shimura fournit un isomorphisme de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–représentations

$$H_{k,\mathrm{par}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \bigoplus_f V_f \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \pi(f),$$

la somme directe étant prise sur toutes les formes nouvelles paraboliques de poids k définies sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Avant d'énoncer le théorème de compatibilité local-global « classique », nous allons expliquer (suivant Emerton [Eme 06a]) comment attacher des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ aux représentations continues, non ramifiées presque partout de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}}$. Soit V une L–représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}}$, non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers, L étant une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si l est un nombre premier, on note V_l la restriction de V à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_l}$. Si $l \neq p$ on note $\mathrm{WD}_l(V)$ la représentation de Weil-Deligne de $\mathbb{Q}_l$ sur L associée à V_l par la recette de Deligne (paragraphe 3.1 du premier chapitre ; noter que les rôles de l et p sont inversés ici). Si V_p est de de Rham, on note $\mathrm{WD}_p(V)$ la représentation de Weil-Deligne de $\mathbb{Q}_p$ sur L associée à V_p par la recette de Fontaine (paragraphe 4 du premier chapitre). Nous allons associer à V une L–représentation $\mathrm{LL}_l(V)$ lisse, admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l)$ comme suit (cette recette est due à Emerton [Eme 06a] ; si $l = p$, on suppose que V_p est de de Rham).

• Si la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l)$ sur L associée à $\mathrm{WD}_l(V)$ par la correspondance de Langlands classique (théorème 1.9 du premier chapitre [4]) n'est pas de dimension 1, alors $\mathrm{LL}_l(V)$ est cette représentation. Par exemple, si $V_l = \delta_1 \oplus \delta_2$ avec δ_1, δ_2 des caractères tels que $\delta_1/\delta_2 \neq |\cdot|_l^{\pm 1}$, alors $\mathrm{LL}_l(V)$ est la représentation

(4) On normalise la correspondance pour préserver la rationalité. Noter que les rôles de l et p sont inversés…

https://spartacus-idh.com

irréductible [5] $\mathrm{Ind}(\delta_1|\cdot|_l \otimes \delta_2)^{\mathrm{lisse}}$. Si V_l est une extension non scindée de δ_2 par δ_1, alors $\mathrm{LL}_l(V) = \mathrm{Ind}(\delta_1|\cdot|_l \otimes \delta_1)^{\mathrm{lisse}}$ si $\delta_1 = \delta_2$ et $\mathrm{LL}_l(V) = \mathrm{St}\otimes\delta_1\circ\det$ si $\delta_1 = \delta_2\cdot|\cdot|_l$. Si V_l est absolument irréductible, alors $\mathrm{LL}_l(V)$ est une représentation supercuspidale.

• Si la représentation associée à $\mathrm{WD}_l(V)$ par la correspondance de Langlands classique est de dimension 1, alors forcément $V_l = \delta_1 \oplus \delta_2$ pour deux caractères δ_1, δ_2 satisfaisant $\delta_1 = \delta_2|\cdot|_l$, et $\mathrm{LL}_l(V)$ est définie par la recette

$$\mathrm{LL}_l(V) = \mathrm{Ind}(\delta_1|\cdot|_l \otimes \delta_2)^{\mathrm{lisse}},$$

qui est une extension non scindée de $\delta_1\circ\det$ par $\mathrm{St}\otimes(\delta_1\circ\det)$.

Ainsi, $\mathrm{LL}_l(V)$ *n'est pas toujours irréductible, mais elle est toujours générique (*i.e. *de dimension infinie), et son caractère central correspond par la théorie locale du corps de classe* [6] *à* $\det(V_l)|\cdot|_l$.

On vérifie facilement que $\mathrm{LL}_l(V)$ est une série principale non ramifiée pour presque tout l, ce qui permet de donner un sens au produit tensoriel restreint $\otimes'_{l\neq p}\mathrm{LL}_l(V)$ (resp. $\otimes'_l\mathrm{LL}_l(V)$ si V_p est de de Rham), qui est une représentation lisse, admissible (pas forcément irréductible) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ (resp. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$).

Le théorème de compatibilité local-global « classique », obtenu en combinant des travaux d'Eichler-Shimura, Igusa, Deligne, Langlands, Carayol et Saito (voir par exemple [Car 86] et [Sai 97] pour les références précises), s'énonce ainsi [7] :

Théorème 2.8.

Soit f une forme nouvelle cuspidale de poids $k \geqslant 2$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Il existe un isomorphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–représentations

$$\pi(f) \simeq \otimes'_l \mathrm{LL}_l(V_f).$$

Remarque 2.9. On peut montrer que $\mathrm{LL}_l(V_f)$ est vraiment la représentation attachée à $\mathrm{WD}_l(V_f)$ par la correspondance de Langlands locale, *i.e.* on n'a pas vraiment besoin de la recette d'Emerton pour énoncer le théorème précédent. Cependant cette recette sera très utile dans la section suivante.

5.2 Cohomologie complétée et compatibilité local-global

Considérons maintenant la situation suivante, qui est mieux adaptée aux techniques d'analyse p–adique et qui a été introduite par Breuil [Bre 10b] et Emerton [Eme 06b] dans le cadre de la correspondance de Langlands locale p–adique. Fixons

(5) Rappelons qu'il s'agit de l'espace des fonctions $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l) \to L$ invariantes par un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l)$ à droite et telles que

$$\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) g\right) = \delta_1(a)|a|_l\delta_2(d)\phi(g)$$

pour $a, d \in \mathbb{Q}_l^*$, $b \in \mathbb{Q}_l$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l)$.

(6) Normalisée de telle sorte que les uniformisantes correspondent aux Frobenius géométriques.

(7) Les théorèmes de comparaison p–adiques et la définition de V_f montrent que V_f est bien de de Rham, ce qui fait que $\pi_p(V_f)$ est bien définie.

© Spartacus-Idh 2019

une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, ainsi qu'un sous-groupe ouvert compact K^p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ et notons

$$\hat{H}(K^p) = \varprojlim_n \left(\varinjlim_{K_p \subset G} H^1_{\text{et}}(Y(K_pK^p)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_L) \right) / p^n$$
$$= \varprojlim_n \varinjlim_{K_p \subset G} H^1_{\text{et}}(Y(K_pK^p)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_L/p^n),$$

la **cohomologie complétée de niveau** K^p. De manière moins barbare, $\hat{H}(K^p)$ est le complété p–adique de

$$H(K^p) := \varinjlim_{K_p \subset G} H^1_{\text{et}}(Y(K_pK^p)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_L).$$

Ce dernier module étant p–adiquement séparé et sans p–torsion, l'espace

$$\hat{H}(K^p)_L := \hat{H}(K^p) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$$

est naturellement muni d'une structure de L–espace de Banach, ayant la boule unité $\hat{H}(K^p)$.

L'espace de Banach $\hat{H}(K^p)_L$ est muni d'un certain nombre de structures supplémentaires. On dispose d'abord d'une action naturelle de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ sur $\hat{H}(K^p)_L$, qui préserve sa boule unité, et qui vient de l'action naturelle de ce groupe sur les groupes de cohomologie étale. Cette action est non ramifiée en dehors de

$$S(K^p) := \{p\} \cup \mathrm{Ram}(K^p),$$

où $\mathrm{Ram}(K^p)$ est l'ensemble des nombres premiers $l \neq p$ non ramifiés dans K^p. Ensuite, l'action naturelle de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $H(K^p)$ s'étend en une action de ce groupe sur $\hat{H}(K^p)_L$, préservant la boule unité et commutant à l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$. L'espace $\hat{H}(K^p)_L$ devient ainsi une G–représentation de Banach unitaire. Emerton a montré (dans un cadre beaucoup plus général) [Eme 06b] le résultat suivant :

Théorème 2.10.

La G–représentation de Banach unitaire $\hat{H}(K^p)_L$ est admissible.

Enfin, $\hat{H}(K^p)$ et $\hat{H}(K^p)_L$ sont munis d'une action fidèle de **l'algèbre de Hecke complétée** $\mathbf{T}(K^p)$, définie par [8]

$$\mathbf{T}(K^p) = \varprojlim_{K_p \subset G} \mathbf{T}(K_pK^p),$$

(8) On peut aussi utiliser la description

$$\hat{H}(K^p) = \varprojlim_n \varinjlim_{K_p \subset G} H^1_{\text{et}}(Y(K_pK^p)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}/p^n)$$

et définir

$$\mathbf{T}(K^p) = \varprojlim_{K_p, n} \mathbf{T}(K^pK_p, n),$$

où $\mathbf{T}(K^pK_p, n)$ est la $\mathcal{O}_L$–sous-algèbre de $\mathrm{End}(H^1_{\text{ét}}(Y(K_pK^p)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_L/p^n))$ engendrée par les opérateurs S_l et T_l. On obtient bien sûr la même définition que celle qui suit.

https://spartacus-idh.com

$\mathbf{T}(K_pK^p)$ étant la $\mathcal{O}_L$–algèbre d'endomorphismes de $H^1(Y(K_pK^p)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_L)[1/p]$ engendrée par les opérateurs de Hecke S_l et T_l pour les nombres premiers $l \neq p$ non ramifiés dans K^p. On montre que $\mathbf{T}(K^p)$ est une $\mathcal{O}_L$–algèbre commutative, réduite, compacte [9], produit (compatible avec sa topologie) d'un nombre fini de $\mathcal{O}_L$–algèbres locales noethériennes complètes (indexées par les systèmes de valeurs propres de Hecke attachés aux formes modulaires de niveau modéré K^p et définies sur k_L et munies de leur topologie adique définie par leurs idéaux maximaux).

Le théorème de classicité suivant est dû à Emerton [Eme 06b] et joue un rôle fondamental dans la compréhension des représentations $\hat{H}(K^p)_L$, en décrivant leurs vecteurs localement algébriques. Il est convenable d'introduire le gros L–espace localement convexe (pour la topologie limite inductive)

$$\hat{H}_L = \varinjlim_{K^p} \hat{H}(K^p)_L.$$

Les morphismes de transition dans la définition de $\hat{H}_L$ sont des immersions fermées, compatibles avec les structures supplémentaires de ces espaces. On peut récupérer chaque $\hat{H}(K^p)_L$ en prenant les invariants sous K^p :

$$\hat{H}(K^p)_L = \hat{H}_L^{K^p}.$$

Cela permet aussi de mieux voir l'action de T_l (resp. S_l) sur $\hat{H}(K^p)_L$ quand $l \notin S(K^p)$ (*i.e.* $l \neq p$ est non ramifié dans K^p) : il s'agit de l'action de la double classe $K^p \left(\begin{smallmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) K^p$ (resp. $K^p \left(\begin{smallmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{smallmatrix}\right) K^p$) sur $\hat{H}_L^{K^p}$.

L'espace $\hat{H}_L$ est un $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–module, l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ étant lisse, contrairement à celle de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, qui est continue, mais pas lisse. Le théorème de classicité d'Emerton s'énonce ainsi :

Théorème 2.11.

On dispose d'un isomorphisme de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–modules

$$hat H_L^{\mathrm{alg}} \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}, k \geqslant 2} (H_k \otimes L) \otimes_L (\mathrm{Sym}^{k-2}(L^2))^\vee \otimes (\chi^n \otimes \chi^n \circ \det),$$

l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur $\mathrm{Sym}^{k-2}(L^2)$ se faisant à travers son quotient G.

Remarque 2.12. Il découle directement du théorème précédent et de la théorie d'Eichler-Shimura (*cf.* paragraphe précédent) que pour toute forme nouvelle parabolique f de poids $k \geqslant 2$, définie sur L, on dispose d'un plongement $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–équivariant

$$V_f \otimes_L \pi(f) \otimes_L (\mathrm{Sym}^{k-2}(L^2))^\vee \to \hat{H}_L.$$

Avant de continuer, nous avons besoin d'introduire la notion de **représentation pro-modulaire**. Fixons un ensemble fini de nombres premiers S, contenant p, et notons $\mathcal{G}_{\mathbb{Q},S}$ le groupe de Galois de l'extension maximale de $\mathbb{Q}$ non ramifiée en dehors

(9) Pour sa topologie naturelle, limite projective des topologies p–adiques sur les $\mathbf{T}(K_pK^p)$.

© Spartacus-Idh 2019

de S. Une représentation continue, irréductible $\rho : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(L)$ est pro-modulaire si elle est isomorphe à la représentation attachée à une forme modulaire p–adique parabolique, vecteur propre pour les opérateurs de Hecke. Comme nous n'avons pas défini la notion de forme modulaire p–adique, nous allons donner une définition équivalente de la pro-modularité, comme suit :

Définition 2.13.

a. Une représentation $\rho : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(L)$ continue, absolument irréductible est *pro-modulaire* s'il existe un niveau $K^p \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ non ramifié en dehors de S et un morphisme continu $\theta : \mathbf{T}(K^p) \to L$ tel que pour tout $l \notin S$

$$\theta(T_l) = \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Frob}_l)), \quad \theta(S_l) = l^{-1}\det(\rho(\mathrm{Frob}_l)).$$

b. On définit la notion de représentation *modulaire* $\bar{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(k_L)$ d'une manière identique, en remplaçant partout L avec k_L.

Comme le montre la série de remarques ci-dessous, les notions de pro-modularité et modularité sont tout à fait naturelles, et la plupart des représentations continues, absolument irréductibles, impaires [10] $\rho : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(L)$ sont pro-modulaires. Pour les représentations modulo p, ces trois conditions suffisent à assurer la modularité, grâce à la conjecture de Serre, démontrée par Khare et Wintenberger [KW 09a, KW 09b].

Remarque 2.14.

1. Une représentation continue, absolument irréductible $\bar{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(k_L)$ est modulaire si et seulement si elle est obtenue en réduisant modulo ϖ_L la représentation attachée à une forme modulaire nouvelle.
2. Par définition, une représentation pro-modulaire (resp. modulaire) ρ (resp. $\bar{\rho}$) induit un morphisme continu $\theta : \mathbf{T}(K^p) \to L$ (resp. $\bar{\theta} : \mathbf{T}(K^p) \to k_L$) comme ci-dessus. Un tel morphisme est unique (l'algèbre engendrée par les T_l et S_l étant dense dans $\mathbf{T}(K^p)$), donc canoniquement associée à ρ (resp. $\bar{\rho}$). De plus, θ (resp. $\bar{\theta}$) permet de retrouver la représentation ρ (resp. $\bar{\rho}$), grâce au théorème de Chebotarev (et à l'hypothèse d'irréductibilité de la représentation). Réciproquement, il découle de la théorie d'Eichler-Shimura-Deligne et des résultats de Carayol [Car 94] que tout morphisme continu $\theta : \mathbf{T}(K^p) \to L$ (resp. $\bar{\theta} : \mathbf{T}(K^p) \to k_L$) est attaché à une représentation ρ (resp. $\bar{\rho}$).
3. Grâce aux travaux de Böckle, Diamond-Flach-Guo, Khare-Wintenberger et Kisin (voir [Eme 11, th. 1.2.3]), on sait qu'une représentation continue, absolument irréductible, impaire $\rho : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(L)$ est automatiquement pro-modulaire si elle satisfait certaines conditions techniques faibles : $p > 2$, la restriction de $\bar{\rho}$ (la représentation résiduelle associée à ρ) à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ est absolument irréductible et la restriction de $\bar{\rho}$ à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ n'est pas un twist d'une extension du caractère trivial par lui-même ou du caractère cyclotomique modulo p par le caractère trivial.

Soit maintenant $\rho : \mathscr{G}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$ une représentation continue, absolument

(10) Cela signifie que le déterminant de l'image de la conjugaison complexe dans $\mathrm{GL}_2(L)$ est -1.

https://spartacus-idh.com

irréductible, et notons

$$\mathscr{M}(\rho) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}}}(\rho, \hat{H}_L).$$

Ainsi, $\mathscr{M}(\rho)$ est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–module sur lequel l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ est lisse. Si ρ est de de Rham en restriction à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, à poids de Hodge-Tate $a < b$, on note

$$\mathrm{LL}_p(\rho)^{\mathrm{alg}} = \mathrm{LL}_p(\rho) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1}(L^2) \otimes \det^{1+a}.$$

Le résultat suivant est démontré dans [Eme 06a] et dans [Eme 11, prop. 6.1.12] (c'est une conséquence relativement facile du théorème de classicité, de la compatibilité local-global classique et des relations d'Eichler-Shimura). On note χ le caractère cyclotomique.

Proposition 2.15.

a. Si $\mathscr{M}(\rho)$ est non nul, alors ρ est pro-modulaire.

b. L'espace $\mathscr{M}(\rho)^{\mathrm{alg}}$ est non nul si et seulement si $\rho \simeq V_f \otimes \chi^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$ et une forme nouvelle f définie sur L, de poids $k \geqslant 2$, dans quel cas

$$\mathscr{M}(\rho)^{\mathrm{alg}} \simeq \mathrm{LL}_p(\rho)^{\mathrm{alg}} \otimes_L \otimes'_{l \neq p} \mathrm{LL}_l(\rho).$$

Le théorème principal d'Emerton [Eme 11] est alors le résultat de compatibilité local-global p–adique suivant (dans lequel $\Pi(\rho_p)$ est la représentation de Banach de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à la restriction ρ_p de ρ à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ par la correspondance de Langlands locale p–adique). Le lecteur trouvera dans [Bre 12] une magnifique présentation des idées et ingrédients de la preuve du théorème d'Emerton (en fait d'une version plus faible, mais qui suffit pour la plupart des applications arithmétiques).

Théorème 2.16.

Soit $\rho : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(L)$ une représentation continue, absolument irréductible, pro-modulaire. Supposons que $\bar{\rho}$ est absolument irréductible et que la restriction de $\bar{\rho}$ à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ n'est pas un twist d'une extension du caractère trivial par lui-même ou d'une extension du caractère cyclotomique modulo p par 1. Alors il existe un isomorphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$–modules

$$\mathscr{M}(\rho) = \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}}]}(\rho, \hat{H}_L) \simeq (\Pi(\rho_p) \otimes \chi^{-1}) \otimes_L \otimes'_{l \neq p} \mathrm{LL}_l(\rho).$$

Remarque 2.17. Le théorème ci-dessus, combiné avec les résultats de pro-modularité cités ci-dessus, a des conséquences arithmétiques spectaculaires. La plus importante (pour l'instant) est la conjecture de Fontaine-Mazur dans la plupart des cas (une autre preuve, utilisant aussi de manière cruciale la correspondance de Langlands locale p–adique, a été fournie par Kisin [Kis 09]). Cette conjecture affirme (dans un cas particulier important) que si $\rho : \mathscr{G}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$ est une représentation continue, impaire, absolument irréductible et non ramifiée presque partout, dont la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est de de Rham, à poids de Hodge-Tate distincts, alors ρ est (à torsion par un caractère près) la représentation associée à une forme modulaire parabolique

© Spartacus-Idh 2019

propre, de poids $\geqslant 2$. Appliquée au module de Tate d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$, la conjecture de Fontaine-Mazur entraîne la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, établie dans [Wil 95, BCDT 01], et dont la conséquence la plus spectaculaire est le dernier théorème de Fermat.

6 Analyse spectrale

Nous allons faire l'analyse spectrale des deux côtés dans le théorème 2.5, en utilisant l'action de l'algèbre de Hecke en dehors de p. Cela demande d'adapter la discussion et les résultats exposés dans la section précédente à notre situation :

• le rôle des courbes modulaires sera joué dans notre cas par les variétés de Hida

$$X(K^pK_p) = \bar{B}^*\backslash\bar{B}^*(\mathbb{A}_f)/K^pK_p,$$

qui sont des ensembles finis.

• Le rôle des espaces $\hat{H}(K^p)_L$ sera joué par l'espace des fonctions continues sur $X(K^p)$. Il s'agit d'une G–représentation de Banach, admissible.

• L'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}}$ disparaît, et le rôle crucial est joué par l'action de G et de l'algèbre de Hecke complétée, analogue de l'algèbre $\mathbf{T}(K^p)$ de la section précédente.

Nous allons rendre maintenant tout ceci plus précis et, pour simplifier les notations, nous allons fixer le niveau K^p et écrire simplement X au lieu de $X(K^p)$. On a donc

$$X = \bar{B}^*\backslash\bar{B}^*(\mathbb{A}_f)/K^p,$$

ce qui fait que l'espace $C^0(X)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans L s'identifie à $C^0(\bar{B}^*\backslash\bar{B}^*(\mathbb{A}_f))^{K^p}$. Il est donc naturellement muni d'une action de l'algèbre de Hecke en dehors de p. Fixons un ensemble fini S de places de $\mathbb{Q}$ tel que $p \in S$, $\bar{B}$ est déployée en tout $l \notin S$ et la projection de K^p est le compact maximal standard $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_l)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l) \simeq \bar{B}^*(\mathbb{Q}_l)$.

Notons

$$\mathbf{T}_S = \bigotimes_{l\notin S} \mathscr{O}_L[T_l, S_l^{\pm 1}]$$

l'algèbre de Hecke sphérique en dehors de S, qui agit donc naturellement sur $C^0(X)$. Soit $\hat{\mathbf{T}}_S$ l'adhérence faible de $\mathbf{T}_S$ dans $\mathrm{End}_L^{\mathrm{cont}}(C^0(X))$. C'est *l'algèbre de Hecke complétée*, analogue de l'algèbre $\mathbf{T}(K^p)$ rencontrée dans l'étude de la tour des courbes modulaires.

Fixons une représentation modulaire $\bar{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(k_L)$. Par définition, on dispose d'un idéal maximal $\mathbf{m}$ de $\hat{\mathbf{T}}_S$ de corps résiduel [(11)] k_L tel que pour tout $l \notin S$ l'image de T_l dans k_L soit $\mathrm{tr}(\bar{\rho})(\mathrm{Frob}_l)$. Pour nous simplifier la vie (cela sera suffisant pour les applications que nous avons en vue), nous allons faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse : la restriction $\bar{\rho}_p$ de $\bar{\rho}$ à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est absolument irréductible.

Notons A le complété $\mathbf{m}$-adique de $\hat{\mathbf{T}}_S$. Les résultats de Carayol [Car 94] fournissent un relèvement $\rho^{\mathbf{m}} : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(A)$ de $\bar{\rho}$ tel que pour tout $l \notin S$

$$\mathrm{tr}(\rho^{\mathbf{m}}(\mathrm{Frob}_l)) = T_l.$$

(11) Quitte à remplacer L par une extension finie…

https://spartacus-idh.com

Cela permet de montrer que A est un anneau local noethérien complet. De plus, tout point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(A[1/p])$ induit :

- une extension finie $\kappa(\mathfrak{p}) = (A/\mathfrak{p})[1/p]$ de L.
- une représentation $\rho(\mathfrak{p}) : \mathscr{G}_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(\kappa(\mathfrak{p}))$, spécialisation de $\rho^{\mathbf{m}}$.
- une G–représentation de Banach unitaire, admissible, absolument irréductible sur $\kappa(\mathfrak{p})$

$$\Pi(\mathfrak{p}) = \Pi(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}),$$

attachée par la correspondance de Langlands locale p–adique pour G (théorème 1.27 du premier chapitre) à $\rho(\mathfrak{p})|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$. Le théorème crucial, sur lequel tout repose, est alors la version suivante du théorème de compatibilité local-global d'Emerton [Eme 11] (cette version est beaucoup plus faible que celle énoncée dans les sections précédentes, mais suffit pour les applications que nous avons en vue, et sa preuve et relativement plus simple).

Théorème 2.18.

Pour tout point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(A[1/p])$ il existe $r > 0$ tel que l'on ait un isomorphisme de G–modules topologiques

$$C^0(X)[\mathfrak{p}] \simeq \Pi(\mathfrak{p})^{\oplus r}.$$

En particulier $C^0(X)[\mathfrak{p}] \neq 0$.

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème original d'Emerton. Voir l'appendice de [DLB 17] pour un survol de la preuve dans ce contexte.

Nous allons expliquer maintenant la preuve du théorème 2.2, en utilisant ce qui précède. Rappelons que nous avons fixé une représentation supercuspidale π, de caractère central trivial. On commence par montrer l'existence d'une représentation automorphe σ pour $\bar{B}^*(\mathbb{A})$ telle que σ_∞ soit triviale, $\sigma_p \simeq \pi$ et la réduction modulo p de la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de ρ_σ (la représentation galoisienne attachée à σ) soit absolument irréductible. Nous n'allons pas expliquer l'existence d'une telle représentation σ, et nous renvoyons le lecteur à la preuve du théorème 5.5 de [DLB 17] pour l'argument (il s'agit d'une adaptation directe d'un argument utilisé par Emerton [Eme 11]).

Fixons maintenant un sous-groupe K^p suffisamment petit de telle sorte que $\sigma_f^{K^p}$ ait des invariants non-triviaux sous K^p, et fixons un ensemble fini S de places de $\mathbb{Q}$ tel que « tout soit non ramifié en dehors de S ». Soit $\mathbf{m}$ l'idéal maximal de $\hat{\mathbf{T}}_S$ attaché à la réduction modulo p de ρ_σ. L'action de $\mathbf{T}_S$ sur les invariants de σ sous $\prod_{l \notin S} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_l)$ fournit un caractère $\theta : \hat{\mathbf{T}}_S \to \mathscr{O}_L$, le système de valeurs propres de σ. Il s'étend en un morphisme $\theta : A \to \mathscr{O}_L$, d'où un idéal maximal $\mathfrak{p}_\sigma$ de $A[1/p]$.

La correspondance de Jacquet-Langlands globale permet de transférer σ en une représentation automorphe σ' pour $B^*(\mathbb{A})$. On a donc des isomorphismes $\sigma'_l \simeq \sigma_l$ pour $l \neq p, \infty$, $\sigma'_p \simeq \rho = \mathrm{JL}(\pi)$ et aussi $\sigma'_\infty \simeq \sigma_2$ (série discrète holomorphe de poids 2).

En considérant le $\mathfrak{p}_\sigma$–espace propre des deux côtés de l'isomorphisme (fourni par le théorème 2.5)

$$\Omega^1(\mathrm{Sh}_n(K^p))^\rho \simeq \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}((\Omega^1(\mathscr{M}_n)^\rho)^*, \mathrm{LA}(X(K^p)))$$

© Spartacus-Idh 2019

ainsi que le théorème de Matsushima (*i.e.* la description de $\Omega^1(\mathrm{Sh}_n)$ en termes de représentations automorphes, *cf.* le paragraphe 2 de ce chapitre) et le théorème 2.18 on obtient

$$[(\sigma'_f)^\rho]^{(1+p^n\mathcal{O}_D)Kp} \simeq \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}((\Omega^1(\mathscr{M}_n)^\rho)^*, \Pi(\rho_\sigma|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}))^{\oplus r}$$

pour un certain $r > 0$. Comme ρ est triviale sur $1 + p^n\mathcal{O}_D$, le terme de gauche s'identifie (par construction de σ') à $(\sigma_f^p)^{Kp}$, qui est non nul. En dualisant, on obtient bien

$$\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi(V)^*, \Omega^1(\mathscr{M}_n)^\rho) \neq 0,$$

avec $V = \rho_\sigma|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$. Il reste à voir que V est bien π–compatible, ce qui découle du théorème de compatibilité local-global 2.8. Cela permet de conclure.

https://spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2019

Chapitre 3

(φ,Γ)–modules et représentations localement analytiques

Si le second chapitre a eu recours à des méthodes globales pour construire une application non nulle entre les objets qui nous intéressent, les deux chapitres restants utiliseront des méthodes locales pour montrer qu'une telle application est un isomorphisme [(1)], indépendant des choix globaux faits pour le construire. C'est la partie la plus technique du travail, et elle utilise la plupart des techniques utilisées pour construire et étudier la correspondance de Langlands locale p–adique pour $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Nous allons rappeler certaines constructions et résultats dans ce troisième chapitre, et les utiliser pour démontrer un résultat technique, mais crucial pour la suite, le théorème 3.25.

Rappelons que l'on fixe une représentation supercuspidale π de G, à caractère central trivial, définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, et que l'on note ρ la représentation lisse irréductible de D^* qui lui est attachée par la correspondance de Jacquet-Langlands locale. Rappelons aussi qu'une L–représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ est dite π–compatible si V est de dimension 2, de de Rham, à poids de Hodge-Tate $0,1$ et si $\mathrm{LL}(\mathrm{WD}(V)) \simeq \pi$.

Nous avons prouvé dans le second chapitre (théorème 2.2) l'existence d'une représentation π–compatible V et d'un morphisme G–équivariant, continu et non nul

$$\varphi : (\Omega^1(\Sigma_n)^\rho)^* \to \Pi(V)^{\mathrm{an}}.$$

Définition 3.1.

On note $\Pi = \Pi(V)$ et $\Pi[0] = \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$ (rappelons que $\Pi^{\mathrm{lisse}} \simeq \pi$ car V est π–compatible).

La représentation $\Pi[0]$ est un modèle virtuel (et qui deviendra bien réel à la fin du dernier chapitre !) de $(\mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho)^*$.

On définit un morphisme

$$\psi : \Pi[0]^* \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$$

(1) Ce n'est pas tout à fait vrai, mais presque, *cf.* la discussion ci-dessous.

en prenant la composée

$$\Pi[0]^* \to (\Pi^{\mathrm{an}})^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho,$$

la première flèche étant l'inclusion évidente et la deuxième étant induite par la transposée de φ. En prenant la transposée de ψ et en se rappelant que $\Pi[0]$ est réflexif, on obtient un morphisme $\psi^* : (H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho)^* \to \Pi[0]$. Nous avons déjà vu (*cf.* proposition 2.6 du second chapitre) que le terme de gauche est une représentation lisse de G. Un exercice facile montre que $\Pi[0]$ n'a pas de vecteurs lisses non nuls. Donc $\psi^* = 0$, d'où un morphisme

$$F := \varphi^* : \Pi[0]^* \to \mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho.$$

Ce morphisme est déduit de la transposée de $\varphi : (\Pi^{\mathrm{an}})^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ et des inclusions $\Pi[0]^* \subset (\Pi^{\mathrm{an}})^*$ et $\mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho \subset \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$, via la différentielle

$$d : \mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho.$$

Lemme 3.2. Le morphisme $F : \Pi[0]^* \to \mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho$ construit ci-dessus est non nul.

Démonstration. Sinon le morphisme ψ se factorise par $\pi^* = (\Pi^{\mathrm{an}})^*/\Pi[0]^*$, d'où un morphisme non nul $\pi^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$. Cela est impossible, car π^* est tué par u^+, alors que u^+ est injectif sur $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ (cela se déduit de la compatibilité entre l'action de u^+ et la différentielle, et la nullité de $H^0_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$). □

Le but des deux chapitres restants est de démontrer que F est un isomorphisme, indépendant (à scalaire près) du choix de la représentation π–compatible V. Cela repose sur une étude fine de la représentation $\Pi[0]$, en particulier nous avons besoin du résultat suivant, dû à Colmez [Col 10b, ch. VI] :

Théorème 3.3.
La représentation $\Pi[0] = \Pi(V)^{\mathrm{an}}/\pi$ ne dépend pas du choix de la représentation π–compatible V.

Démonstration. La première preuve de Colmez est très acrobatique, cf [Col 10b, ch. VI]. Une deuxième preuve plus simple (mais loin d'être triviale !) se trouve dans [Col 15]. Le lecteur pourra aussi consulter le chapitre 8 de [DLB 17] pour une troisième preuve. Toutes ces démonstrations étant très techniques, nous n'en dirons pas plus dans ces notes. □

Dans ce troisième chapitre nous allons construire une représentation $\Pi[2]^*$ munie d'un morphisme G–équivariant, d'image fermée $d : \Pi[0]^* \to \Pi[2]^*$ et d'un morphisme G–équivariant $F : \Pi[2]^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ compatible avec la différentielle $d : \mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$. De plus, nous allons munir ces objets de structures de $\mathscr{O}(\Omega)$–modules tels que F soit $\mathscr{O}(\Omega)$-linéaire et que la structure soit compatible avec l'action de G. L'ingrédient principal sera une étude fine de l'action de $\mathfrak{gl}_2 = \mathrm{Lie}(G)$ sur Π^{an}, ce qui demande de revenir un peu aux origines, *i.e.* à la définition de Π^{an} en termes de (φ,Γ)–modules.

Fin de la preuve (φ,Γ)-modules Compatibilité local-global Conjecture de Breuil et Strauch Préface
https://spartacus-idh.com

1 Rappels sur les (φ,Γ)–modules

Nous allons fixer une fois pour toutes une suite compatible de racines primitives de l'unité $(\zeta_{p^n})_{n\geqslant 0}$ et noter

$$F_n=\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),\qquad L_n=L\otimes_{\mathbb{Q}_p}F_n,$$
$$F_\infty=\cup_n F_n,\qquad L_\infty=L\otimes_{\mathbb{Q}_p}F_\infty.$$

Nous aurons besoin de quelques anneaux de séries de Laurent :

- Le corps $\mathscr{E}$ des séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n$, où $(a_n)_n$ une suite bornée dans L, telle que $\lim\limits_{n\to-\infty}v_p(a_n)=\infty$, et le sous-anneau $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ des séries à coefficients dans $\mathscr{O}_L$.
- Le sous-corps $\mathscr{E}^\dagger$ des éléments surconvergents de $\mathscr{E}$, *i.e.* qui convergent sur une couronne $r\leqslant|T|<1$ avec $r<1$ (dépendant de l'élément).
- L'anneau $\mathscr{R}$ de Robba (à coefficients dans L), défini par

$$\mathscr{R}=\varinjlim_n\mathscr{R}_n$$

où $\mathscr{R}_n$ est l'anneau des fonctions analytiques (L–rationnelles) sur la couronne

$$|\zeta_{p^n}-1|\leqslant|T|<1.$$

Notons que $\mathscr{E}^\dagger$ s'identifie au sous-anneau de $\mathscr{R}$ formé des éléments bornés.

Remarque 3.4. On peut retrouver $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ à partir de $\mathscr{E}^\dagger$. En effet, $\mathscr{E}$ est le complété p–adique (*i.e.* pour la topologie définie par la norme de Gauss) de $\mathscr{E}^\dagger$, alors que $\mathscr{R}$ est le complété de $\mathscr{E}^\dagger$ pour la topologie limite inductive des espaces $\mathscr{E}^{\dagger,n}$ de fonctions bornées sur la couronne $|\zeta_{p^n}-1|\leqslant|T|<1$, chacun de ces espaces étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les couronnes fermées contenues dans $|\zeta_{p^n}-1|\leqslant|T|<1$.

On munit les anneaux $\mathscr{E},\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ d'une action de $\Gamma:=\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ et d'un Frobenius φ en posant

$$\gamma.f(T)=f((1+T)^{\chi(\gamma)}-1),$$
$$\varphi(f)(T)=f((1+T)^p-1),$$

où $\chi:\Gamma\to\mathbb{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique. Ce dernier induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)\simeq\mathbb{Z}_p^*$, et nous allons noter $a\mapsto\sigma_a$ son inverse. On a donc $\sigma_a(\zeta)=\zeta^a$ pour $a\in\mathbb{Z}_p^*$ et $\zeta\in\mu_{p^\infty}$, et la formule précédente devient

$$\sigma_af(T)=f((1+T)^a-1).$$

Notons que Γ laisse stable chacun des anneaux $\mathscr{R}_n$, mais $\varphi(\mathscr{R}_n)\subset\mathscr{R}_{n+1}$. Munis de ces actions, les anneaux $\mathscr{E},\mathscr{E}^\dagger,\mathscr{R}$ sont les exemples les plus simples de (φ,Γ)–modules, au sens suivant :

© Spartacus-Idh 2019

Définition 3.5.

a. Un (φ,Γ)–*module* sur $A\in\{\mathscr{E},\mathscr{E}^\dagger,\mathscr{R}\}$ est un A–module libre de type fini D muni d'un frobenius semi-linéaire φ dont la matrice est inversible (*i.e.* l'application naturelle $A\otimes_{\varphi,A}D\to D$ est un isomorphisme), et d'une action semi-linéaire continue de Γ, commutant à φ.

b. Un (φ,Γ)–module sur $\mathscr{E}$ est *étale* s'il admet une base dans laquelle la matrice de φ est dans $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_\mathscr{E})$ (où d est le rang de D). Un (φ,Γ)–module sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$ est *étale* si la matrice de φ est dans $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_\mathscr{E}^\dagger)$ pour une base convenable de D (ici $\mathscr{O}_\mathscr{E}^\dagger$ est la boule unité de $\mathscr{E}^\dagger$ pour la norme de Gauss).

Remarque 3.6. Un (φ,Γ)–module $D^\dagger$ sur $\mathscr{E}^\dagger$ est étale si et seulement si le (φ,Γ)–module $D:=D^\dagger\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathscr{E}$ est étale sur $\mathscr{E}$, et un (φ,Γ)–module D_{rig} sur $\mathscr{R}$ est étale si et seulement s'il s'obtient par changement de base à partir d'un (φ,Γ)–module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$.

Le théorème fondamental suivant est obtenu en combinant des résultats de Fontaine [Fon 90], Cherbonnier-Colmez [CC 98], Berger [Ber 02] et Kedlaya [Ked 04] :

Théorème 3.7.

Les catégories des (φ,Γ)–modules étales sur $\mathscr{E},\mathscr{E}^\dagger,\mathscr{R}$ sont toutes équivalentes à celle des L–représentations continues, de dimension finie de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

Nous allons écrire simplement

$$V\longleftrightarrow D=D(V)\longleftrightarrow D^\dagger=D^\dagger(V)\longleftrightarrow D_{\mathrm{rig}}=D_{\mathrm{rig}}(V)$$

pour désigner le fait que D (resp. $D^\dagger$, resp. D_{rig}) est le (φ,Γ)–module étale sur $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}^\dagger$, resp. $\mathscr{R}$) attaché à une L–représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Fontaine, Berger, Colmez, Cherbonnier et Kedlaya ont construit des anneaux de périodes p–adiques $\mathbb{B},\mathbb{B}^\dagger,\mathbb{B}_{\mathrm{rig}}$ tels que pour tout V on ait (par construction même)

$$D(V)=(\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})},\ D^\dagger(V)=(\mathbb{B}^\dagger\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})}$$

et

$$D_{\mathrm{rig}}(V)=(\mathbb{B}_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})}.$$

On montre aussi que si $V\longleftrightarrow D\longleftrightarrow D^\dagger\longleftrightarrow D_{\mathrm{rig}}$, alors

$$D=\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}D^\dagger,\quad D_{\mathrm{rig}}=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}D^\dagger.$$

Le module $D^\dagger$ n'a pas d'intérêt propre, mais il permet de passer de D à D_{rig} et vice-versa, comme le montre les formules ci-dessus.

On peut récupérer V de manière fonctorielle à partir de D, $D^\dagger$ et D_{rig} par

$$V=((L\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{B})\otimes_\mathscr{E}D)^{\varphi=1}=((L\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{B}^\dagger)\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}D^\dagger)^{\varphi=1}=((L\otimes_{\mathbb{Q}_p}\tilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}})\otimes_\mathscr{R}D_{\mathrm{rig}})^{\varphi=1},$$

pour un gigantesque anneau de périodes (encore un !) $\tilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}$ introduit par Berger [Ber 02].

https://spartacus-idh.com

Nous allons finir ce long paragraphe en rappelant la technique de localisation des (φ,Γ)–modules. Soit Δ un (φ,Γ)–module sur $\mathscr{R}$, et fixons une base de Δ. Soit Δ_n le sous-$\mathscr{R}_n$–module de Δ engendré par cette base. On vérifie [Ber 08] que pour n assez grand (dépendant de Δ) Δ_n ne dépend pas du choix de la base, que Δ_n est stable par Γ, $\varphi(\Delta_n)\subset\Delta_{n+1}$ et enfin que l'application naturelle $\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{R}_n}\Delta_n\to\Delta$ est un isomorphisme.

On dispose d'une **application de localisation** $\varphi^{-n}:\mathscr{R}_n\to L_n[[t]]$, définie par

$$\varphi^{-n}(f)=f(\zeta_{p^n}e^{t/p^n}-1).$$

Ceci permet de définir, pour n assez grand, des modules

$$\Delta^+_{\mathrm{dif},n}=L_n[[t]]\otimes_{\mathscr{R}_n}\Delta_n,\quad \Delta^+_{\mathrm{dif}}=\varinjlim_n\Delta^+_{\mathrm{dif},n}.$$

Ces modules sont libres sur $L_n[[t]]$, respectivement sur

$$L_\infty[[t]]:=\cup_n L_n[[t]],$$

de même rang que Δ, et sont munis d'une action de Γ qui se dérive et induit une connexion ∇ sur ces modules (encore une fois, tout ceci est vrai pour n assez grand). Le résultat suivant de Fontaine [Fon 04] établit un pont direct entre (φ,Γ)–modules et théorie de Hodge p–adique.

Théorème 3.8.

Supposons que $\Delta=D_{\mathrm{rig}}(V)$, où V est une L–représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Il existe des isomorphismes canoniques pour n assez grand

$$\Delta^+_{\mathrm{dif},n}\simeq\mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)).$$

2 Les constructions magiques de Colmez

Nous avons rappelé dans le paragraphe 5.2 du premier chapitre la construction du foncteur de Colmez, qui associe à certaines représentations de Banach unitaires admissibles de G sur L des représentations galoisiennes. Pour des questions plus fines, il est très utile d'utiliser une construction dans l'autre sens, due encore à Colmez [Col 10b], et dont nous allons rappeler maintenant les principales propriétés.

Considérons une L–représentation V, de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, absolument irréductible et notons $D=D(V)$, $D^\dagger=D^\dagger(V)$ et $D_{\mathrm{rig}}=D_{\mathrm{rig}}(V)$ les (φ,Γ)–modules étales qui lui correspondent par le théorème 3.7. Grâce au caractère étale de $\Delta\in\{D,D_{\mathrm{rig}}\}$, tout élément z de Δ s'écrit de manière unique sous la forme

$$z=\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(z_i),$$

© Spartacus-Idh 2019

avec $z_i \in \Delta$. Cela permet de définir un opérateur continu ψ sur Δ, en posant

$$\psi(z) = z_0.$$

Il s'agit d'un inverse à gauche ψ de φ, qui commute à l'action de Γ.

On peut utiliser les opérateurs φ, ψ, ainsi que l'action de Γ et la structure de $\mathscr{O}_L[[T]]$–module de Δ pour définir une action du monoïde $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_p - \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur Δ, en posant

$$\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = (1+T)^b \cdot \varphi^k(\sigma_a(z))$$

pour $z \in \Delta$ et $k \geqslant 0$, $a \in \mathbb{Z}_p^*$, $b \in \mathbb{Z}_p$. Le monoïde P^+ agit aussi sur $\mathbb{Z}_p$, par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x = ax + b$. Une première construction fondamentale de Colmez [Col 10a] est la suivante :

Proposition 3.9.

Il existe un faisceau P^+–équivariant $U \to \Delta \boxtimes U$ sur $\mathbb{Z}_p$, dont les sections sur $a + p^n\mathbb{Z}_p$ sont

$$\Delta \boxtimes (a + p^n\mathbb{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \Delta = (1+T)^a \cdot \varphi^n(\Delta) \subset \Delta$$

(en particulier $\Delta \boxtimes \mathbb{Z}_p = \Delta$) et la restriction

$$\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbb{Z}_p} : \Delta = \Delta \boxtimes \mathbb{Z}_p \to \Delta \boxtimes (a + p^n\mathbb{Z}_p)$$

est

$$\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbb{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^n \circ \psi^n \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Le groupe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z = \frac{az+b}{cz+d}$. Un des résultats fondamentaux de Colmez est le fait que le faisceau précédent sur $\mathbb{Z}_p$ s'étend en un faisceau G–équivariant sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Plus précisément, on dispose du théorème suivant [Col 10b].

Théorème 3.10.

Soit $\delta = \chi^{-1} \cdot \det V$, vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^*$ par la théorie locale du corps de classes[(a)]. Le faisceau précédent s'étend canoniquement en un faisceau G–équivariant sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ tel que l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ soit donnée par $\delta(a)$ pour $a \in \mathbb{Q}_p^*$.

(a) Donc χ, vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^*$ est $x \to x \cdot |x|_p$, où $|\cdot|_p$ est la valeur absolue p–adique.

Les formules pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sont nettement plus compliquées que celles ci-dessus, mais sont en fait inutiles pour les applications. Nous allons les donner tout de même. Soit w la restriction à $\Delta \boxtimes \mathbb{Z}_p^*$ de l'action de l'involution $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ est obtenu par recollement à partir de $\mathbb{Z}_p$ et $w \cdot \mathbb{Z}_p$ le long de $\mathbb{Z}_p^*$, l'espace des sections globales du faisceau attaché à Δ est

$$\Delta \boxtimes \mathbb{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in \Delta \times \Delta | \quad \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^*}(z_2) = w(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^*}(z_1))\}.$$

https://spartacus-idh.com

L'application de prolongement par zéro $i_{\mathbb{Z}_p} : \Delta \to \Delta \boxtimes \mathbb{P}^1$ définie par

$$i_{\mathbb{Z}_p}(z) = (z, w(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^*}(z)))$$

permet d'identifier Δ à un sous-module de $\Delta \boxtimes \mathbb{P}^1$, ce que l'on fera sans plus de commentaire. Tout élément z de $\Delta \boxtimes \mathbb{P}^1$ peut alors s'écrire $z = z_1 + w \cdot z_2$ avec $z_1, z_2 \in \Delta$. L'action de G est alors donnée par les formules suivantes (dans lesquelles $z \in \Delta$) :

a. $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) z = \delta(a)z$ et $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = \varphi(z)$.

b. Si $a \in \mathbb{Z}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = \sigma_a(z)$.

c. Pour tout $b \in p\mathbb{Z}_p$ on a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = (1+T)^b \cdot z$ et

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) z = w\left((1+T)^b \cdot w\left(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^*}(z)\right)\right) + u_b\left(\mathrm{Res}_{p\mathbb{Z}_p}(z)\right),$$

avec, pour $x \in \varphi(\Delta)$,

$$u_b(x) = \delta^{-1}(1-b)(1+T)^{\frac{1}{b-1}} w[(1+T)^{b(1-b)} \sigma_{(1-b)^2}(w((1+T)x))].$$

Nous allons essayer d'expliquer l'origine de ces formules un peu monstrueuses. Elles sont inspirées de celles obtenues en faisant agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur l'espace des mesures (ou distributions) sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Le théorème de Mahler (resp. Amice) identifie l'espace des mesures (resp. distributions) μ sur $\mathbb{Z}_p$, à valeurs dans L à $L \otimes_{O_L} O_L[[T]]$ (resp. $\mathscr{R}^+ = \mathscr{R} \cap L[[T]]$), via la transformée d'Amice

$$\mu \to \mathscr{A}_\mu = \sum_{n \geqslant 0} \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} \mu \cdot T^n = \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu.$$

Le monoïde P^+ agit sur l'espace de ces mesures (resp. distributions) par

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) g \cdot \mu = \int_{\mathbb{Z}_p} \phi(ax+b)\mu$$

si $\phi : \mathbb{Z}_p \to L$ est continue (resp. localement analytique) et $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Au niveau des transformées d'Amice, l'action de P^+ sur l'espace des mesures (resp. distributions) peut aussi s'écrire

$$\mathscr{A}_{\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mu} = (1+T)^b \cdot \varphi^k(\sigma_a(\mathscr{A}_\mu)),$$

formule qui a un sens pour n'importe quel (φ, Γ)–module et qui a été utilisée pour définir l'action de P^+ sur Δ. En traduisant les formules décrivant la transformée d'Amice de la restriction d'une mesure (resp. distribution) à un ouvert compact de $\mathbb{Z}_p$ (en particulier à $a + p^n\mathbb{Z}_p$), on retombe sur les formules utilisées pour décrire les applications de restriction dans la proposition 3.9.

Le faisceau construit dans le théorème 3.10 est l'analogue de l'espace des mesures sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, muni de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ définie par

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \phi(x) g \cdot \mu = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \delta_D(cx+d) \phi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \mu$$

© Spartacus-Idh 2019

pour $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ et $\phi : \mathbb{Z}_p \to L$ continue. L'espace $\Delta \boxtimes \mathbb{Z}_p^* = \Delta^{\psi=0}$ correspond à l'espace des mesures à support dans $\mathbb{Z}_p^*$ et l'involution w de $\Delta \boxtimes \mathbb{Z}_p^*$ correspond au niveau des mesures à la transformée $\mu \to w \cdot \mu$ définie par

$$\mathscr{A}_{w\cdot\mu} = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \delta(x)(1+T)^{\frac{1}{x}}\mu.$$

En approximant l'intégrale par des sommes de Riemann et développement de Taylor à l'ordre 1, on obtient une formule qui ne fait intervenir que l'action de φ, ψ et Γ sur $\mathscr{A}_\mu$. Cette formule a un sens pour tout (φ,Γ)–module et est donnée par

$$w(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} \delta(i)(1+T)^{\frac{1}{i}} \sigma_{-\frac{1}{i^2}} \varphi^n \psi^n((1+T)^{-i} z)$$

pour un z vérifiant $\psi(z) = 0$. Il y a par contre une subtilité : la limite existe et la formule précédente définit une involution continue de $D^{\psi=0}$ (ce n'est pas du tout trivial, *cf.* le chapitre V de [Col 10a]), mais cette formule n'est pas utilisable pour $\Delta = D^\dagger$ ou $\Delta = D_{\mathrm{rig}}$, car la série définissant $w(z)$ ne converge pas dans $D^\dagger$ ou D_{rig}. C'est un résultat hautement nontrivial ([Col 10b], lemme V.2.4 et proposition V.2.9) que w préserve $D^{\dagger,\psi=0}$ et se prolonge en une involution continue de $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=0}$, ce qui permet de faire les mêmes constructions pour D_{rig}.

Rappelons que V est une L–représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, absolument irréductible, et que $\delta = \chi^{-1}\det V$, vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^*$ en utilisant la théorie locale du corps des classes.

Définition 3.11.

Soit $D^\natural \boxtimes \mathbb{P}^1$ l'espace des sections $z \in D \boxtimes \mathbb{P}^1$ telles que Gz soit borné[(a)] dans $D \boxtimes \mathbb{P}^1$.

(a) En tant que L–espace topologique $D \boxtimes \mathbb{P}^1$ s'identifie à $\mathscr{E}^4$, donc est naturellement muni d'une topologie, induite par la topologie naturelle de $\mathscr{E}$.

Un des résultats les plus délicats de la théorie est le théorème suivant de Colmez [Col 10b] :

Théorème 3.12.

Avec les hypothèses ci-dessus, G préserve $D^\natural \boxtimes \mathbb{P}^1$ et l'espace

$$\Pi(V) := D \boxtimes \mathbb{P}^1 / D^\natural \boxtimes \mathbb{P}^1$$

est une représentation de Banach unitaire, admissible, absolument irréductible de G. De plus, on a des suites exactes canoniques de G–modules topologiques

$$0 \to \Pi(V)^* \otimes \delta \circ \det \to D \boxtimes \mathbb{P}^1 \to \Pi(V) \to 0$$

et

$$0 \to (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \otimes \delta \circ \det \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1 \to \Pi(V)^{\mathrm{an}} \to 0.$$

https://spartacus-idh.com

Remarque 3.13. Si π est une L–représentation supercuspidale de G, à caractère central trivial, et si V est π-admissible, alors $\det(V)=\chi$ et donc $\delta=1$. Les suites exactes précédentes sont alors induites par des accouplements parfaits

$$\{\ ,\ \}: D\boxtimes\mathbb{P}^1\times D\boxtimes\mathbb{P}^1\to L,\quad D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{P}^1\times D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{P}^1\to L.$$

Nous allons finir ce paragraphe en expliquant le lien entre les constructions ci-dessus et le foncteur de Colmez (paragraphe 5.2 du premier chapitre). Il convient de se placer dans un cadre plus général que la présentation minimaliste (mais suffisante pour nos besoins) ci-dessus.

Si $\delta:\mathbb{Q}_p^*\to\mathscr{O}_L^*$ est un caractère unitaire, on note $\mathrm{Rep}_L(\delta)$ la catégorie des L–représentations de Banach de G qui sont unitaires, à caractère central δ et résiduellement de longueur finie (une telle représentation est automatiquement de longueur finie et admissible). On peut décrire cette catégorie, modulo les représentations de dimension finie, en utilisant les (φ,Γ)–modules étales, comme suit (voir [Col 10b, chap. II, III, IV], [Col 10a] et [CD 14, chap. III] pour les détails, malheureusement très longs et techniques).

Pour tout (φ,Γ)–module étale D sur $\mathscr{E}$ et tout caractère unitaire δ, on dispose encore d'un faisceau G–équivariant $U\mapsto D\boxtimes_\delta U$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ attaché à (D,δ). Par construction, l'espace des sections globales $D\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1$ de ce faisceau est un G–module topologique, dont le caractère central est δ, et l'espace des sections sur $\mathbb{Z}_p$ est D. En tant que L–espace vectoriel topologique (sans action de G), $D\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1$ est une extension d'un L-banach par le dual faible d'un L-banach. On dit que la paire (D,δ) est G–*compatible* si on peut trouver une telle extension

$$0\to\Pi_1^*\to D\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1\to\Pi_2\to 0$$

avec Π_1,Π_2 des L-banach stables par l'action de G. Il se trouve que l'on peut alors trouver de tels Π_1,Π_2 qui soient fonctoriels en D.

Plus précisément, soit D_0 un réseau stable par φ et Γ dans D, et soit $D_0^\natural$ le plus petit sous $\mathscr{O}_L[[T]]$–module compact de D_0 qui engendre D et est stable par l'opérateur ψ (l'existence de $D_0^\natural$ est un résultat nontrivial qui remonte à la thèse de Herr [Her 98]). On note $D^\natural=D_0^\natural[1/p]$, qui ne dépend pas du choix de D_0. Soit $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1$ le sous-espace des $z\in D\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1$ tels que $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)z\right)\in D^\natural$ pour tout $n\geqslant 0$. On montre que (D,δ) est G–compatible si et seulement si $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1$ est stable par G, dans quel cas on pose

$$\Pi_\delta(D)=D\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1/D^\natural\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1.$$

On montre alors [CD 14, chap. III] (en utilisant pleinement les résultats de [Col 10a, Col 10b]) la série de résultats suivants :

• Si (D,δ) est G–compatible, alors $(D(\eta),\delta\eta^2)$ l'est aussi pour tout caractère unitaire η, et

$$\Pi_{\delta\eta^2}(D(\eta))\simeq\Pi_\delta(D)\otimes(\eta\circ\det).$$

• Si D est de rang 1, alors (D,δ) est G–compatible pour tout δ, et on a

$$\Pi_{\delta_1\delta_2/\chi}(\mathscr{E}(\delta_1))\simeq\mathrm{Ind}(\delta_2\otimes\delta_1\chi^{-1})^{\mathrm{cont}}$$

© Spartacus-Idh 2019

pour tous les caractères unitaires δ_1,δ_2 (où $\mathscr{E}(\delta_1)$ est le (φ,Γ)–module étale attaché au caractère δ_1).

• Soit $\check{D}$ le dual de Cartier de D : si D correspond à la représentation V par l'équivalence de catégories de Fontaine, alors $\check{D}$ correspond à $V^*\otimes\chi$. Il existe un accouplement G–équivariant parfait entre $\check{D}\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{P}^1$ et $D\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1$. Si (D,δ) est G–compatible, alors $\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{P}^1$ s'identifie à l'orthogonal de $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1$ dans $\check{D}\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{P}^1$. On en déduit que $(\check{D},\delta^{-1})$ est G–compatible aussi, et on a un isomorphisme canonique

$$\Pi_\delta(D)^*\simeq\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{P}^1,$$

ainsi qu'une suite exacte

$$0\to\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^*\to D\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1\to\Pi_\delta(D)\to 0.$$

On a donc une décomposition fonctorielle de $D\boxtimes_\delta\mathbb{P}^1$ comme extension du $L[G]$–Banach $\Pi_\delta(D)$ par le dual du $L[G]$–Banach $\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})$. On montre aussi que $\Pi_\delta(D)\in\mathrm{Rep}_L(\delta)$ et $\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})\in\mathrm{Rep}_L(\delta^{-1})$.

• Si D est de dimension 2 et si on prend $\delta_D=\chi^{-1}\det D$, alors (D,δ_D) est G–compatible (quand D est irréductible, il s'agit du théorème 3.12). Si D est absolument irréductible de dimension 2, alors le caractère précédent est l'unique caractère δ pour lequel (D,δ) est G–compatible (il s'agit d'un des résultats les plus délicats de [CDP 14] ; ce résultat a été démontré avant par Paškūnas [Paš 13] pour $p\geqslant 5$)), et si D est absolument irréductible de dimension >2, alors (D,δ) n'est jamais G–compatible (ce résultat fort délicat a été démontré pour $p\geqslant 5$ dans [Paš 13] et en toute généralité dans [CDP 14]).

• Soit $0\to D_1\to D\to D_2\to 0$ une suite exacte de (φ,Γ)–modules étales sur $\mathscr{E}$. Si (D,δ) est G–compatible, alors (D_1,δ) et (D_2,δ) le sont aussi, et les groupes de cohomologie du complexe $0\to\Pi_\delta(D_1)\to\Pi_\delta(D)\to\Pi_\delta(D_2)\to 0$ sont de dimension finie sur L (ils sont même nuls si D n'a pas de composante de Jordan-Hölder du type $\mathscr{E}(\eta)$, avec $\eta^2\in\{\delta,\delta\chi^2\}$).

• Si $\Pi_\delta(D)$ est irréductible, alors D l'est aussi. La réciproque est vraie si D est de rang au moins 2.

• Soit $\Pi\in\mathrm{Rep}_L(\delta)$ et soit $D=D(\Pi)$ l'image de Π par le foncteur de Colmez. Alors (D,δ^{-1}) est G–compatible et il existe un morphisme G–équivariant canonique $\Pi_\delta(\check{D})\to\Pi/\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)}$ dont le noyau et le conoyau sont de dimension finie sur L (et $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)}$ est aussi de dimension finie). Si de plus Π est supersingulière, alors D est de dimension 2, $\delta=\chi^{-1}\det\check{D}$ (on peut donc retrouver le caractère central de Π à partir du (φ,Γ)–module attaché à Π, qui n'utilise que la restriction de Π au mirabolique !) et on a des isomorphismes canoniques

$$\Pi^*\simeq D^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{P}^1,\quad \Pi\simeq\Pi_\delta(\check{D}).$$

• La construction $(D,\delta)\to\Pi_\delta(D)$ est compatible avec la réduction modulo p, au sens suivant. Si (D,δ) est G–compatible et si $\check{D}\simeq D\otimes\delta^{-1}$ ou si $\bar{D}^{\mathrm{ss}}$ n'a pas de facteur de Jordan-Hölder isomorphe à $k_{\mathscr{E}}(\eta)$ avec $\eta^2\in\{\overline{\delta},\overline{\delta}\chi^2\}$, alors

$$\overline{\Pi_\delta(D)}^{\mathrm{ss}}\simeq\Pi_\delta(\overline{D}^{\mathrm{ss}}).$$

https://spartacus-idh.com

Si D est de rang 2, alors la première hypothèse est satisfaite avec $\delta = \chi^{-1}\det D$. De plus, quitte à remplacer L par son extension quadratique non ramifiée, on est dans une des situations suivantes : $\bar{D}^{\mathrm{ss}}$ est irréductible et alors $\overline{\Pi_\delta(D)}^{\mathrm{ss}}$ est irréductible (et supersinguliére), ou bien $\bar{D}^{\mathrm{ss}} \simeq k_{\mathscr{E}}(\delta_1)\oplus k_{\mathscr{E}}(\delta_2)$ et alors

$$\overline{\Pi_\delta(D)}^{\mathrm{ss}} = \mathrm{Ind}(\delta_1\otimes\chi^{-1}\delta_2)^{\mathrm{ss}}\oplus\mathrm{Ind}(\delta_2\otimes\chi^{-1}\delta_1)^{\mathrm{ss}},$$

cette dernière représentation étant de longueur 2 sauf si $\delta_1/\delta_2 = \chi^{\pm 1}$, dans quel cas elle est de longueur 3 pour $p \geqslant 5$ et de longueur 4 si $p = 2,3$.

Ainsi les foncteurs $\Pi \to D(\Pi)$ et $D \to \Pi_\delta(\check{D})$ induisent des anti-équivalences exactes, quasi-inverses entre le quotient de $\mathrm{Rep}_L(\delta)$ par la sous-catégorie des représentations de dimension finie et la catégorie des (φ,Γ)–modules étales D tels que (D,δ^{-1}) soit G–compatible.

3 L'action infinitésimale de G sur $\Pi(V)$

Si $m \geqslant 2$ le groupe $K_m = 1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)$ est un groupe de Lie p–adique compact, et on note $\mathscr{D}(K_m)$ l'algèbre des distributions sur K_m (voir [ST 02b], [ST 03]), dual fort de l'algèbre $C^{\mathrm{an}}(K_m,L)$ des fonctions localement analytiques sur K_m, à valeurs dans L. L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{gl}_2)$ de l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ se plonge dans $\mathscr{D}(K_m,L)$, en voyant les éléments de $U(\mathfrak{gl}_2)$ comme des opérateurs différentiels sur $C^{\mathrm{an}}(K_m,L)$ et en évaluant en $1\in K_m$. Le résultat délicat suivant est démontré dans le chapitre V de [Col 10b] (voir aussi [CD 14] pour un argument plus simple).

Proposition 3.14.

L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{P}^1$ en fait un module sur $\mathscr{D}(K_m)$.

On montre facilement que si $H\subset\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ un sous-groupe ouvert compact qui stabilise l'ouvert compact $U\subset\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, alors $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes U\subset D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{P}^1$ est stable par $\mathscr{D}(H)$ et on a $\mathrm{Res}_U(\lambda\cdot z) = \lambda\cdot\mathrm{Res}_U(z)$ pour tout $z\in D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{P}^1$ et tout $\lambda\in\mathscr{D}(H)$. En particulier, on obtient une action de $\mathfrak{gl}_2$ sur $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{Z}_p = D_{\mathrm{rig}}$, telle que

$$\mathrm{Res}_U(X\cdot z) = X\cdot\mathrm{Res}_U(z)$$

pour $z\in D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{P}^1$, $X\in\mathfrak{gl}_2$ et $U\subset\mathbb{Z}_p$ ouvert compact.

Considérons la base

$$I_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\quad h = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\quad u^+ = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\quad u^- = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$$

de $\mathfrak{gl}_2$. **L'élément de Casimir**

$$C = u^+u^- + u^-u^+ + \frac{1}{2}h^2$$

engendre le centre de $U(\mathfrak{sl}_2)$. D'après la discussion ci-dessus, on peut voir C comme endomorphisme L-linéaire continu de $D_{\mathrm{rig}} = D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{Z}_p$. Le théorème principal de [Dos 12], qui jouera un rôle important par la suite, est alors le suivant :

© Spartacus-Idh 2019

Théorème 3.15.

Soient a, b les poids de Hodge-Tate généralisés de V. Alors pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$ on a

$$u^-(z) = -\frac{(\nabla - a)(\nabla - b)(z)}{t} \quad \text{et} \quad C(z) = \frac{(a-b)^2 - 1}{2} \cdot z.$$

Démonstration. Nous allons procéder en plusieurs étapes.
Notons $k = a + b$. Nous allons montrer d'abord que pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$ on a

$$I_2(z) = (k-1)z, \quad u^+(z) = tz, \quad h(z) = (1-k)z + 2\nabla z,$$

où $t = \log(1+T) \in \mathscr{R}$. En effet, comme $\delta = \chi^{-1} \det V$, on a $\delta'(1) = k-1$, et le caractère central de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1$ étant δ, cela montre la première formule. La seconde est évidente, puisque $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = (1+T)^b z$ pour $z \in D_{\mathrm{rig}}$ et $b \in p\mathbb{Z}_p$, donc

$$u^+(z) = \lim_{b \to 0} \frac{(1+T)^b - 1}{b} z = tz$$

pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$. Enfin, on a

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) z = \delta^{-1}(a)\sigma_{a^2}(z),$$

donc

$$h(z) = \lim_{a \to 1} \frac{\delta^{-1}(a)\sigma_{a^2} z - z}{a-1} = (1-k)z + 2\nabla z,$$

puisque $\delta'(1) = k-1$.
Nous montrons ensuite que C est un opérateur scalaire sur D_{rig}. Comme C commute à l'action adjointe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, les formules donnant l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1$ montrent que l'opérateur C commute à φ et Γ et vérifie $C(f(T)z) = f(T)C(z)$ pour tous $f \in L(T)$ et $z \in D_{\mathrm{rig}}$. Puisque $L(T)$ est dense dans $\mathscr{R}$ (en effet, tout $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot T^n \in \mathscr{R}$ est la limite dans $\mathscr{R}$ de la suite $\sum_{|n| \leqslant N} a_n \cdot T^n$), C est $\mathscr{R}$-linéaire et donc $C \in \mathrm{End}_{\varphi,\Gamma,\mathscr{R}}(D_{\mathrm{rig}})$. Comme $\mathrm{End}_{\varphi,\Gamma,\mathscr{R}}(D_{\mathrm{rig}}) = \mathrm{End}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V)$ et V est absolument irréductible, C est bien scalaire par le lemme de Schur.
Il nous reste à trouver le scalaire par lequel C agit (c'est la seule partie astucieuse de l'argument). Un calcul immédiat basé sur les résultats obtenus dans la première étape montre que

$$\frac{1}{2}h^2 - h = \frac{(2\nabla - k)^2 - 1}{2} = 2(\nabla - a)(\nabla - b) + \frac{(a-b)^2 - 1}{2}.$$

En utilisant la relation $C = 2u^+u^- + \frac{1}{2}h^2 - h$ (déduite de $u^+u^- - u^-u^+ = h$), on obtient une égalité d'opérateurs sur D_{rig}

$$C = 2tu^- + 2(\nabla - a)(\nabla - b) + \frac{(a-b)^2 - 1}{2}.$$

En utilisant les techniques de localisation et la théorie de Sen, on montre que

$$(\nabla - a)(\nabla - b)D_{\mathrm{rig}} \subset t \cdot D_{\mathrm{rig}}.$$

https://spartacus-idh.com

Ainsi $C-\frac{(a-b)^2-1}{2}$ est un opérateur scalaire qui envoie D_{rig} dans $t\cdot D_{\mathrm{rig}}$, d'où $C=\frac{(a-b)^2-1}{2}$. La formule pour u^- suit alors de la relation

$$C=2tu^-+2(\nabla-a)(\nabla-b)+\frac{(a-b)^2-1}{2}$$

établie ci-dessus. □

Le résultat suivant est une simple reformulation du théorème précédent, mais il sera utilisé systématiquement dans la suite.

Théorème 3.16.

Soit V une représentation π-admissible et notons $\Pi=\Pi(V)$ et $D_{\mathrm{rig}}=D_{\mathrm{rig}}(V)$.

a. L'opérateur C agit par 0 sur $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbb{P}^1$ et donc aussi sur Π^{an} et $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$.

b. Pour tout $z\in D_{\mathrm{rig}}$ on a

$$u^-(z)=-t\partial^2(z)=-\frac{\nabla(\nabla-1)z}{t}.$$

4 Équations différentielles p-adiques

Nous avons besoin d'un ingrédient supplémentaire avant d'attaquer la preuve du résultat principal de ce chapitre. Il s'agit d'une construction fondamentale introduite par Berger [Ber 02], qui lui a permis de démontrer la conjecture de monodromie p–adique de Fontaine.

Soit Δ un (φ,Γ)–module sur $\mathscr{R}$, pas forcément étale. Berger [Ber 02] a montré que l'action de Γ sur Δ est dérivable, ce qui fournit une connexion ∇ sur Δ. Explicitement, on a

$$\nabla(z)=\lim_{a\to 1}\frac{\sigma_a(z)-1}{a-1}.$$

Si $t=\log(1+T)\in\mathscr{R}$, on a $\nabla(t)=t$, ce qui permet de prolonger ∇ en une connexion sur $\Delta[1/t]$. Par exemple, si $\Delta=\mathscr{R}$ avec sa structure naturelle de (φ,Γ)–module, alors

$$\nabla=t\partial,\quad \text{où}\quad \partial(f)=(1+T)f'(T).$$

Le résultat de Berger [Ber 02] s'énonce alors comme suit :

Théorème 3.17.

Soit V une L–représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et soit $\Delta=D_{\mathrm{rig}}(V)$.

a. Il existe un unique (φ,Γ)–module $N_{\mathrm{rig}}(V)$ sur $\mathscr{R}$ tel que

$$N_{\mathrm{rig}}(V)\subset\Delta[1/t],\quad N_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]=\Delta[1/t],\quad \nabla(N_{\mathrm{rig}}(V))\subset tN_{\mathrm{rig}}(V).$$

b. $N_{\mathrm{rig}}(V)$ ne dépend que de $D_{\mathrm{pst}}(V)$ en tant que $(\varphi,\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$–module, *i.e.* sans la filtration de Hodge.

© Spartacus-Idh 2019

Remarque 3.18.

a. On appelle $N_{\mathrm{rig}}(V)$ **l'équation différentielle attachée à** V. On définit alors une connexion $\partial = t^{-1}\nabla$ sur $N_{\mathrm{rig}}(V)$, qui va jouer un rôle fondamental dans ce cours.

b. En particulier toutes les représentations que l'on considère dans ce cours, *i.e.* celles π-admissibles, ont la même équation différentielle, que l'on notera $N(\pi)$ dans la suite.

Supposons que $\Delta = D_{\mathrm{rig}}(V)$, où V est une L–représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, et notons $N = N_{\mathrm{rig}}(V)$. Berger [Ber 02] a montré que via l'isomorphisme construit par Fontaine (théorème 3.8) on peut décrire les localisés de N

$$N^{+}_{\mathrm{dif,n}} \simeq L_n[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V),$$

ainsi que N tout entier :

$$N = \{z \in \Delta[1/t] \,|\, \varphi^{-n}(z) \in L_n[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V),\ \forall n >> 0\}.$$

Le lecteur pourra d'ailleurs prendre cette formule comme une définition de N (il n'est cependant pas du tout clair sur cette définition que N ne dépend que du $(\varphi, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$–module $D_{\mathrm{pst}}(V)$, sans sa filtration de Hodge. Ceci a été démontré par Berger dans [Ber 08], voir aussi la discussion suivant l'exemple 6.5 de [DLB 17] pour un survol rapide de ses résultats).

5 L'opérateur ∂

Nous allons expliquer maintenant la preuve du théorème suivant, qui a été inspiré par l'article [Col 15] de Colmez (le lecteur y trouvera une autre démonstration de ce résultat).

Théorème 3.19.

Il existe un unique endomorphisme continu ∂ de $\Pi[0]^*$ (en tant que L-Fréchet) tel que $a^+ - 1 = u^+ \circ \partial$. De plus, pour tout $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ l'opérateur $a - c\partial$ est inversible sur $\Pi[0]^*$ et on a une égalité

$$g\partial g^{-1} = (d\partial - b)(a - c\partial)^{-1}.$$

Le point crucial dans la preuve est le résultat suivant :

Théorème 3.20.

a. L'opérateur u^+ sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée.

b. Le même énoncé est vrai avec $\Pi[0]^*$ à la place de $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$.

Démonstration. La deuxième partie découle facilement de la première. Pour montrer la première, on commence par montrer l'injectivité de u^+ sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1$, qui entraîne celle sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1$. Cette injectivité se ramène à celle de u^+ sur D_{rig} (qui est claire car

https://spartacus-idh.com

$u^+ = t$ sur D_{rig}) et à celle de u^- sur D_{rig}. Grâce au théorème 3.16, il suffit de vérifier que ∇ et $\nabla - 1$ sont injectifs sur D_{rig}. On vérifie que $\mathrm{Frac}(\mathscr{R})^{\nabla=0} = L$, ce qui permet de montrer que pour tout $x \in L$ le morphisme naturel $D_{\mathrm{rig}}^{\nabla=x} \otimes_L \mathscr{R} \to D_{\mathrm{rig}}$ est injectif, et donc $D_{\mathrm{rig}}^{\nabla=x}$ est de dimension finie sur L. S'il était non nul, comme il est stable par φ, on en déduirait que φ a des vecteurs propres sur D_{rig} (après avoir remplacé L par une extension finie), et on montre que cela est impossible (*i.e.* que la représentation V n'est pas trianguline) sans difficulté.

Pour conclure, il reste à montrer que l'image de u^+ est fermée (le reste étant une conséquence de résultats standard d'analyse fonctionnelle). Le point crucial est que ∂ est bijectif sur $N(\pi)$ (c'est un résultat de Colmez [Col 15]), donc un homéomorphisme car $N(\pi)$ est un espace LF. Supposons donc que $l_n \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$ satisfont $\lim_{n\to\infty} u^+(l_n) = l$ et montrons que $l \in u^+(\Pi^{\mathrm{an}})^*$. Notons

$$x_n = \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(l_n), y_n = \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(wl_n) \in D_{\mathrm{rig}}$$

et $x = \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(l), y = \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(wl)$. Le théorème 3.16 montre que

$$u^+ l_n = (tx_n, -t\partial^2(y_n)),$$

donc $tx_n \to x$ et $-t\partial^2(y_n) \to y$ dans D_{rig}. Écrivons $D_{\mathrm{rig}} = \cup_n D_n$, avec D_n un $\mathscr{R}_n$–module libre de type fini, stable par Γ et tel que $\varphi(D_n) \subset D_{n+1}$ (on suppose que n est assez grand). Un argument utilisant le théorème de Baire montre qu'il existe k tel que $x_n, y_n, x, y \in D_k$ pour tout n. La multiplication par t dans D_k est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée (alors que tD_{rig} est dense dans D_{rig} !), donc on peut écrire $x = t\bar{x}$ avec $\bar{x} \in D_k$ (puisque $tx_n \to x$ dans D_k). On déduit de même l'existence de $\bar{y} \in N(\pi)$ tel que $y = -t\bar{y}$ et tel que $\partial^2(y_n) \to \bar{y}$ dans $N(\pi)$. Puisque $\partial : N(\pi) \to N(\pi)$ est un homéomorphisme, on peut écrire $\bar{y} = \partial^2(\tilde{y})$ avec $\tilde{y} \in N(\pi)$ et $y_n \to \tilde{y}$ dans $N(\pi)$. Quitte à augmenter k, on peut supposer que $y_n \to \tilde{y}$ dans $N(\pi)_k$ (défini comme D_k à partir de $N(\pi)$ au lieu de D_{rig}). Comme $y_n \in D_k$ et D_k est fermé dans $N(\pi)_k$, on a $\tilde{y} \in D_k$. En passant à la limite on obtient $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^*}(\tilde{y}) = w(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^*}(\bar{x}))$, ce qui montre que la paire $(\bar{x}, \tilde{y})$ définit un élément $(\hat{x}, \hat{y})$ de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1$, tel que $(x, y) = u^+(\hat{x}, \hat{y})$ dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1$. En utilisant un argument d'orthogonalité, on montre que $(\hat{x}, \hat{y}) \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$, ce qui montre que $l = u^+(\hat{x}, \hat{y}) \in u^+(\Pi^{\mathrm{an}})^*$, comme voulu. □

Passons maintenant à la preuve du théorème 3.19. Pour montrer l'existence de ∂, il suffit (compte tenu de ce qui précède) de montrer que

$$l_1 := a^+ l - l \in u^+ \Pi[0]^*$$

pour tout $l \in \Pi[0]^*$. Puisque $\Pi[0]^*/u^+\Pi[0]^*$ est naturellement isomorphe à $(\Pi[0]^{u^+=0})^*$, il suffit de montrer que l_1 est nulle sur $\Pi[0]^{u^+=0}$. En écrivant $\Pi[0]$ comme quotient de Π^{an} par π, on vérifie facilement qu'il suffit de démontrer le résultat suivant : si $\hat{v} \in \Pi^{\mathrm{an}}$ est d'image v dans $\Pi[0]$ et si $v \in \Pi[0]^{u^+=0}$, alors

$$\hat{v}_1 := (a^+ + 1)\hat{v} \in \pi.$$

Pour cela, on montre (en utilisant le fait que le Casimir agit par 0) que $\hat{v}_1$ est tué par a^+ et par u^+. On conclut en utilisant le résultat délicat suivant, dont la preuve se trouve dans [DLB 17] (voir aussi le dernier paragraphe du dernier chapitre pour un survol de la preuve).

© Spartacus-Idh 2019

Théorème 3.21.
Tout vecteur de Π^{an} tué par a^+ et u^+ est lisse.

Il nous reste enfin à montrer l'égalité

$$g\partial g^{-1} = (d\partial - b)(a - c\partial)^{-1}.$$

Nous laissons cela en exercice au lecteur : commencer par établir les relations

$$a^+ = \partial u^+, \quad \partial u^+ - u^+\partial = 1, \quad u^- = -\partial a^+ = -\partial^2 u^+$$

sur $\Pi[0]^*$, les utiliser pour en déduire des relations

$$g u^+ g^{-1} = \det(g^{-1})(a - c\partial)^2 u^+, \quad g a^+ g^{-1} = \det(g^{-1})(a - c\partial)(d\partial - b)u^+$$

et conclure par des manipulations formelles.

6 La représentation $\Pi[2]$

Notons que le G–module $\Omega^1(\Sigma_n)$ s'obtient facilement à partir du G–module $\mathscr{O}(\Sigma_n)$: on a $\Omega^1(\Sigma_n) = \mathscr{O}(\Sigma_n)dz$ et l'action de G est obtenue en tordant celle sur $\mathscr{O}(\Sigma_n)$ par le cocycle $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G \mapsto \det(g)\cdot(a - cz)^{-2}$. La construction ci-dessous n'est donc pas très surprenante.

Définition 3.22.
Considérons une variable formelle dz et définissons

$$\Pi[2]^* = \Pi[0]^* dz.$$

Pour $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ et $l \in \Pi[0]^*$ on pose

$$g(l\,dz) = (\det(g)\cdot(a - c\partial)^{-2}(g.l))\,dz.$$

La formule précédente a bien un sens grâce au théorème 3.19, qui permet aussi de montrer le résultat suivant :

Proposition 3.23.
La définition ci-dessus munit $\Pi[2]^*$ d'une structure de G–module et l'application

$$d : \Pi[0]^* \to \Pi[2]^*,\ d(l) = -u^+(l)\,dz$$

est G–équivariante et d'image fermée.

7 La structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module

L'espace $\mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho$ a une structure évidente de $\mathscr{O}(\Omega)$–module. Dans ce paragraphe nous allons munir $\Pi[0]^*$ d'une structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module qui sera cruciale dans la

https://spartacus-idh.com

preuve de nos résultats principaux. Comme l'opérateur ∂ sur $\Pi[0]^*$ est un modèle de l'opérateur de multiplication par z sur $\mathscr{O}(\Sigma_n)^{\rho}$, il est naturel d'imposer

$$\left(\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \frac{1}{z-x}\mu(x)\right)\cdot l = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} (\partial - x)^{-1}(l)\mu(x)$$

comme structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module sur $\Pi[0]^*$. C'est effectivement le cas, mais donner un sens à cette formule et vérifier qu'elle a les bonnes propriétés demande un certain nombre d'estimées, pas totalement triviales (le problème vient du fait que l'opérateur $(\partial - x)^{-1}$ est un peu difficile à contrôler).

On note $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement canonique entre $\Pi[0]^*$ et $\Pi[0]$.

Proposition 3.24.

Pour tout $v \in \Pi[0]$ et $l \in \Pi[0]^*$ l'application

$$f_{l,v} : \mathbb{Q}_p \to L, \quad x \mapsto l((\partial - x)^{-1}v)$$

s'étend en une fonction localement analytique sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, nulle à l'infini.

Démonstration. Donnons les grandes lignes de la preuve et renvoyons le lecteur à la proposition 9.10 de [DLB 17] pour les détails. Posons $f_{l,v}(\infty) = 0$. On commence par montrer la relation

$$f_{l,v}(gx) = \frac{cx+d}{\det g} f_{(c\partial+d)g^{-1}l, g^{-1}v}(x),$$

valable pour tous $l \in \Pi[0]^*$, $v \in \Pi[0]$, $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ et $g \in G$. Il s'agit d'un calcul purement formel utilisant le théorème 3.19, que nous laissons au lecteur. Cela nous ramène à démontrer le caractère analytique de $f_{l,v}$ au voisinage de 0. Un point important est l'identité

$$f_{l,v}(x) = \langle l, \left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\partial^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v\rangle,$$

qui découle encore du théorème 3.19. On peut écrire

$$\Pi[0] = \cup_{h\geqslant 1}\Pi[0]^{(h)},$$

comme une réunion croissante d'espaces de Banach stables par $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, mais *pas* par ∂ ou ∂^{-1}. Si h est choisi de telle sorte que $v \in \Pi[0]^{(h)}$, on peut écrire pour $x \in p^N\mathbb{Z}_p$ (N assez grand, ne dépendant que de v)

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v = \sum_{n\geqslant 0} x^n v_n$$

avec $v_n \in \Pi[0]^{(h)}$ tels que $\lim_{n\to\infty} p^{nN}v_n = 0$ dans $\Pi[0]^{(h)}$. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} p^{nN}\partial^{-1}(v_n) = 0$$

dans $\Pi[0]$, car ∂ est un homéomorphisme de $\Pi[0]$. Les vecteurs $v'_n = p^{nN}\partial^{-1}(v_n)$ tendent vers 0 dans $\Pi[0]^{(h')}$ pour un $h' \geqslant h$, et on a

$$f_{l,v}(x) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{x}{p^N}\right)^n l\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v'_n\right)$$

pour tout $x \in p^N\mathbb{Z}_p$. On conclut alors facilement. □

© Spartacus-Idh 2019

Théorème 3.25.

L'espace $\Pi[0]^*$ admet une unique structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module compatible avec sa structure de L–espace vectoriel et telle que $z.l = \partial(l)$ pour tout $l \in \Pi[0]^*$.

Démonstration. Soit S l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\frac{1}{z-x}$ avec $x \in \mathbb{Q}_p$. Alors S est dense dans $\mathscr{O}(\Omega)$ et pour $f = \sum_x \frac{a_x}{z-x} \in S$ notons

$$T_f = \sum_x a_x(\partial - x)^{-1} : \Pi[0]^* \to \Pi[0]^*.$$

Si

$$\mu_f = \sum_x a_x \delta_x - (\sum_x a_x)\delta_\infty \in (\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*$$

est la distribution attachée à f, on vérifie par un calcul direct que l'on a

$$\langle T_f(l), v\rangle = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} f_{l,v}(x)\mu_f(x),$$

ce qui a un sens d'après la proposition précédente. On vérifie alors, en utilisant la dualité de Morita, que si $f_n \in S$ et f_n converge dans $\mathscr{O}(\Omega)$ vers f, alors les opérateurs T_{f_n} convergent faiblement vers un opérateur continu T_f. En passant à la limite, on obtient aussi la relation

$$\langle T_f(l), v\rangle = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p} f_{l,v}(x)\mu_f(x)$$

pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. Cela permet de démontrer que si $f_n \to f$ dans $\mathscr{O}(\Omega)$, alors T_{f_n} converge faiblement vers T_f en tant qu'opérateurs sur $\Pi[0]^*$. Pour conclure, on pose $f.l = T_f(l)$ et on vérifie que cela définit bien une structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module. Le seul point délicat est de vérifier que $(fg).l = f.(g.l)$ pour tous $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ et $l \in \Pi[0]^*$. Par des arguments de densité et continuité, on se ramène au cas $f = \frac{1}{z-x}$ et $g = \frac{1}{z-y}$, avec $x \neq y \in \mathbb{Q}_p$. Dans ce cas

$$fg = \frac{1}{x-y} \cdot \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y}\right) \in \mathscr{S},$$

et le résultat voulu découle de l'identité

$$(\partial - x)^{-1} \circ (\partial - y)^{-1} = \frac{1}{x-y}((\partial - x)^{-1} - (\partial - y)^{-1})$$

valable sur $\Pi[0]^*$. □

https://spartacus-idh.com

Chapitre 4

Fin de la preuve

Le but de ce dernier chapitre est d'expliquer la fin de la preuve du théorème 1.32 énoncé dans le premier chapitre. Pour le confort du lecteur, nous rappelons cet énoncé et les notations sous-jacentes.

Théorème 4.1.

Pour tout $V \in \mathscr{V}(\rho)$ il existe un unique (à scalaire près) isomorphisme de G–modules de Fréchet

$$\mathscr{O}(\Sigma_n)^{\rho} \xrightarrow{\sim} \left(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}\right)^*.$$

Rappelons que ρ est la représentation lisse irréductible de D^* correspondant à une représentation supercuspidale π de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, à caractère central trivial, et que $V \in \mathscr{V}(\rho)$ signifie que V est une représentation de de Rham π–compatible, *i.e.* $\Pi^{\mathrm{lisse}} \simeq \pi$, où $\Pi = \Pi(V)$ est la L–représentation de Banach associée à V par la correspondance de Langlands locale p–adique.

Notons simplement $\Pi[0] = \Pi^{\mathrm{an}}/\pi$. Dans le deuxième et troisième chapitre nous avons construit un opérateur $\partial : \Pi[0]^* \to \Pi[0]^*$, qui nous a permis :

- de construire un G–module $\Pi[2]^* = \Pi[0]^* dz$, l'action de G étant donnée par

$$g(l\,dz) = (\det g(a - c\partial)^{-2} g l)dz.$$

- de construire une injection G–équivariante, d'image fermée

$$d : \Pi[0]^* \to \Pi[2]^*, \quad l \mapsto -u^+(l)dz.$$

- de munir $\Pi[0]^*$ d'une structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module en utilisant la recette

$$\left(\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \frac{1}{z-x}\mu(x)\right) \cdot l = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} (\partial - x)^{-1} l\,\mu(x).$$

L'opérateur ∂ est uniquement caractérisé par l'égalité $a^+ - 1 = u^+ \circ \partial$.

© Spartacus-Idh 2019

Enfin, on a construit dans le second chapitre un morphisme G–équivariant non nul

$$F : \Pi[0]^* \to \mathscr{O}(\Sigma_n)^{\rho},$$

qui dépend à priori d'un certain V π–compatible. Le but de ce dernier chapitre est de montrer que F est un isomorphisme, indépendant des choix (à scalaire près).

Proposition 4.2.

L'application F est $\mathscr{O}(\Omega)$-linéaire et induit donc un morphisme $\mathscr{O}(\Omega)[G]$-linéaire $F : \Pi[2]^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^{\rho}$, ainsi qu'un morphisme G–équivariant

$$F : \Pi[2]^*/d(\Pi[0]^*) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^{\rho}.$$

Démonstration. Puisque les fonctions $\frac{1}{z-x}$ engendrent un sous-espace dense de $\mathscr{O}(\Omega)$, il suffit de montrer que $F(\partial l) = zF(l)$ pour $l \in \Pi[0]^*$. Comme F commute à l'action de $\mathfrak{gl}_2$, on a d'une part

$$F(a^+ l - l) = F(u^+ \partial l) = u^+ F(\partial l)$$

et d'autre part

$$F(a^+ l - l) = a^+ F(l) - F(l) = u^+(zF(l)).$$

On conclut en utilisant l'injectivité de u^+ sur $\Omega^1(\Sigma_n)^{\rho}$. □

Nous allons commencer par montrer la surjectivité de $F : \Pi[0]^* \to \mathscr{O}(\Sigma_n)^{\rho}$, ce qui demande un certain nombre de préliminaires (la preuve qui suit doit beaucoup à des conversions avec Colmez et Fargues). Nous allons utiliser les résultats de Kohlhaase [Koh 11] sur le transfert de (certains) fibrés vectoriels équivariants entre les tours de Drinfeld et de Lubin-Tate.

1 Fibrés de Drinfeld et de Lubin-Tate

Notons $K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $H = \mathscr{O}_D^*$, $K_n = 1 + p^n M_2(\mathbb{Z}_p)$ et $H_n = 1 + p^n \mathscr{O}_D$ pour $n \geqslant 1$. Rappelons que $\mathscr{M}_n$ est l'espace de Rapoport-Zink sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$ donnant naissance (quand n varie) à la tour de Drinfeld. Chacun des espaces $\mathscr{M}_n$ est une réunion disjointe infinie d'espaces, et on note $\mathscr{D}_n$ la « composante centrale » de $\mathscr{M}_n$, lieu où la quasi-isogénie universelle est de hauteur 0. Par exemple $\mathscr{D}_0 = \Omega \otimes \breve{\mathbb{Q}}_p$.

En déformant par quasi-isogénies un groupe formel de dimension 1 et de hauteur 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (un tel objet est unique à isomorphisme près) on obtient un autre espace de Rapoport-Zink sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$, celui de Lubin-Tate, noté $\mathscr{LT}_0$. En tant qu'espace rigide analytique sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$, $\mathscr{LT}_0$ est une réunion disjointe infinie de copies d'un disque ouvert de dimension 1. En ajoutant encore des structures de niveau, on définit une tour de revêtements étales galoisiens $(\mathscr{LT}_n)_{n\geqslant 1}$ de l'espace $\mathscr{LT}_0$. Chacun des espaces $\mathscr{LT}_n$ est une réunion disjointe infinie d'espaces, et on note $\mathscr{L}_n$ la « composante centrale » de $\mathscr{LT}_n$, lieu où la quasi-isogénie universelle est de hauteur 0. Ainsi $\mathscr{L}_0$ est simplement un disque ouvert de dimension 1, et $\mathscr{L}_n$ un revêtement de ce disque.

Rappelons la notion suivante, introduite par Fontaine et qui est à la base de nombreuses constructions en théorie de Hodge p–adique :

https://spartacus-idh.com

Définition 4.3.

Soit G un groupe agissant sur un anneau intègre B, de telle sorte que l'anneau des points fixes B^G soit un corps. Soit F un sous-corps de B^G. On dit que l'anneau B est (F,G)–**régulier** si $(\mathrm{Frac}(B))^G = B^G$ et si tout élément $f \in B$ tel que $Ff \subset B$ soit G-stable est inversible.

Le groupe $K \times H$ agit sur les espaces $\mathscr{L}_n$ et $\mathscr{D}_n$, donc aussi sur $\mathscr{O}(\mathscr{L}_n)$ et $\mathscr{O}(\mathscr{D}_n)$. Le résultat suivant (comme tous ceux de cette section) est dû à Kohlhaase [Koh 11].

Proposition 4.4.

Soit $F_n = \breve{\mathbb{Q}}_p(\zeta_{p^n})$.

a. On a $\mathscr{O}(\mathscr{L}_n)^{H_n} = F_n$ et $\mathscr{O}(\mathscr{D}_n)^{K_n} = F_n$.

b. L'anneau $\mathscr{O}(\mathscr{L}_n)$ est (F_n, H_n)–régulier et l'anneau $\mathscr{O}(\mathscr{D}_n)$ est (F_n, K_n)–régulier.

Remarque 4.5. Soit $Z_n = \mathscr{L}_n \times_{F_n} \mathscr{D}_n$. Alors Z_n a une action de $K \times H$ et on montre que $\mathscr{O}(Z_n)^K \simeq \mathscr{O}(\mathscr{L}_0)$ et $\mathscr{O}(Z_n)^H \simeq \mathscr{O}(\mathscr{D}_0)$.

Si un groupe G agit sur un espace rigide X, on note $\mathrm{Bun}_G(X)$ l'ensemble des fibrés G–équivariants (de type fini) sur X. Si X est un espace Stein, alors $\mathrm{Bun}_G(X)$ s'identifie, via le foncteur sections globales, à l'ensemble des $\mathscr{O}(X)$–modules projectifs de type fini avec une action semi-linéaire de G. On se permettra dans ce cas l'abus d'identifier un fibré avec ses sections globales.

La proposition ci-dessus permet de construire des foncteurs « à la Fontaine » : pour $N \in \mathrm{Bun}_H(\mathscr{L}_0)$ on note

$$W_n(N) = (\mathscr{O}(\mathscr{L}_n) \otimes_{\mathscr{O}(\mathscr{L}_0)} N)^{H_n},$$

un F_n–espace vectoriel de dimension finie avec action semi-linéaire de H/H_n. De plus, la proposition précédente permet de montrer l'injectivité de l'application naturelle

$$\mathscr{O}(\mathscr{L}_n) \otimes_{F_n} W_n(N) \to \mathscr{O}(\mathscr{L}_n) \otimes_{\mathscr{O}(\mathscr{L}_0)} N.$$

Définition 4.6.

On dit que $N \in \mathrm{Bun}_H(\mathscr{L}_0)$ est un **fibré de Drinfeld** si l'application ci-dessus est un isomorphisme pour un certain n. On définit de même la notion de fibré de Lubin-Tate.

Proposition 4.7.

Si l'application ci-dessus est un isomorphisme pour un n_0, elle l'est aussi pour tout $n \geqslant n_0$ et l'espace

$$D_{\mathrm{Dr}}(N) := (\mathscr{O}(\mathscr{D}_n) \otimes_{F_n} W_n(N))^H$$

est indépendant de $n \geqslant n_0$.

© Spartacus-Idh 2019

Remarque 4.8. Par descente étale on obtient un isomorphisme

$$\mathscr{O}(\mathscr{D}_n)\otimes_{\mathscr{O}(\mathscr{D}_0)} D_{\mathrm{Dr}}(N)\simeq \mathscr{O}(\mathscr{D}_n)\otimes_{F_n} W_n(N).$$

On montre alors que $D_{\mathrm{Dr}}(N)\simeq(\mathscr{O}(Z_n)\otimes_{\mathscr{O}(\mathscr{L}_0)}N)^H$, et que N est de Drinfeld si et seulement si l'application

$$\mathscr{O}(Z_n)\otimes_{\mathscr{O}(\mathscr{D}_0)}(\mathscr{O}(Z_n)\otimes_{\mathscr{O}(\mathscr{L}_0)}N)^H\to\mathscr{O}(Z_n)\otimes_{\mathscr{O}(\mathscr{L}_0)}N$$

est un isomorphisme pour un certain n. Bien sûr, on a des énoncés analogues pour les fibrés de Lubin-Tate.

Notons $\mathrm{Bun}_H^{\mathrm{Dr}}(\mathscr{L}_0)$ la catégorie des fibrés H–équivariants de Drinfeld sur $\mathscr{L}_0$. On définit de la même manière la catégorie $\mathrm{Bun}_K^{\mathrm{LT}}(\mathscr{D}_0)$ des fibrés K–équivariants de Lubin-Tate sur $\mathscr{D}_0$. Le résultat suivant est dû à Kohlhaase [Koh 11] :

Théorème 4.9.

a. La catégorie des fibrés de Drinfeld (resp. de Lubin-Tate) est une catégorie abélienne, stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual à l'intérieur de la catégorie $\mathrm{Bun}_H(\mathscr{L}_0)$ (resp. $\mathrm{Bun}_K(\mathscr{D}_0)$).

b. Les foncteurs D_{Dr} et D_{LT} sont exactes et induisent des équivalences quasi-inverses

$$\mathrm{Bun}_H^{\mathrm{Dr}}(\mathscr{L}_0)\simeq\mathrm{Bun}_K^{\mathrm{LT}}(\mathscr{D}_0).$$

Donnons un exemple important de fibré de Drinfeld. Soit ρ une représentation de dimension finie de H/H_n sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$ et considérons le fibré $N=\rho\otimes\mathscr{O}(\mathscr{L}_0)$. Alors

$$W_n(N)=(\mathscr{O}(\mathscr{L}_n)\otimes\rho)^{H_n}=\mathscr{O}(\mathscr{L}_n)^{H_n}\otimes\rho=F_n\otimes\rho$$

et

$$D_{\mathrm{Dr}}(N)=(\mathscr{O}(\mathscr{D}_n)\otimes\rho)^H=\mathrm{Hom}_H(\rho^*,\mathscr{O}(\mathscr{D}_n)).$$

2 Descente sur l'espace des périodes

L'espace $\mathscr{L}_0$ est muni d'une application de périodes (de Gross-Hopkins)

$$\pi_{\mathrm{GH}}:\mathscr{L}_0\to\breve{\mathbb{P}}^1=\mathbb{P}^1\otimes\breve{\mathbb{Q}}_p.$$

Soit $\mathrm{Bun}_{D^*}^{\mathrm{Dr}}(\breve{\mathbb{P}}^1)$ la catégorie des fibrés $\mathscr{F}\in\mathrm{Bun}_{D^*}(\breve{\mathbb{P}}^1)$ tels que le fibré $\pi_{\mathrm{GH}}^*(\mathscr{F})$ (vu seulement comme fibré H–équivariant) soit dans $\mathrm{Bun}_H^{\mathrm{Dr}}(\mathscr{L}_0)$. On définit de même la catégorie $\mathrm{Bun}_G^{\mathrm{LT}}(\breve{\Omega})$ (dans ce cas l'analogue de l'application des périodes π_{GH} est simplement l'identité). Kohlhaase raffine le théorème précédent comme suit :

https://spartacus-idh.com

Théorème 4.10.

Il existe des équivalences exactes quasi-inverses de catégories abéliennes

$$\mathrm{Bun}_{D^*}^{\mathrm{Dr}}(\check{\mathbb{P}}^1) \to \mathrm{Bun}_G^{\mathrm{LT}}(\check{\Omega})$$

compatibles avec l'équivalence fournie par le théorème précédent. De plus, si ρ est une représentation lisse de D^*, de dimension finie sur $\check{\mathbb{Q}}_p$, alors

$$\rho \otimes \mathscr{O}_{\check{\mathbb{P}}^1} \in \mathrm{Bun}_{D^*}^{\mathrm{Dr}}(\check{\mathbb{P}}^1)$$

et

$$D_{\mathrm{Dr}}(\rho \otimes \mathscr{O}_{\check{\mathbb{P}}^1}) = \mathrm{Hom}_{D^*}(\rho^*, \mathscr{O}(\mathscr{M}_n)) = \mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^{\rho^*}$$

si ρ est triviale sur H_n (ce qui arrive si n est assez grand).

Ainsi, $\mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^{\rho}$ est de Lubin-Tate et

$$D_{\mathrm{LT}}(\mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^{\rho}) = \rho^* \otimes \mathscr{O}_{\check{\mathbb{P}}^1}.$$

3 Surjectivité de F

Nous allons commencer par quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Nous renvoyons le lecteur à l'article fondamental [ST 03] de Schneider et Teitelbaum pour de plus amples détails. Considérons une L–algèbre de Fréchet A (associative et unitaire, mais pas forcément commutative), dont la topologie est définie par une suite croissante $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots$ de semi-normes continues de L–algèbres (on demande donc que la multiplication de A soit continue pour chaque q_n). Soit A_n la complétion de $A/\ker(q_n)$ pour la topologie induite par q_n. Alors $(A_n)_n$ est un système projectif de L–algèbres de Banach et le morphisme naturel $A \to \varprojlim_n A_n$ est un isomorphisme de L–algèbres de Fréchet. On dit que A est une L–**algèbre de Fréchet-Stein** si on peut choisir les q_n telles que A_n soit noethérien à gauche et A_n soit un A_{n+1}–module plat à droite.

Soit $A = \varprojlim A_n$ une L–algèbre de Fréchet-Stein comme ci-dessus. Un A–module à gauche M est dit **coadmissible** s'il existe une famille $(M_n)_n$ de A_n–modules de type fini M_n, ainsi que des isomorphismes $A_n \otimes_{A_{n+1}} M_{n+1} \simeq M_n$, tels que

$$M \simeq \varprojlim_n M_n.$$

Les A–modules coadmissibles forment une sous-catégorie pleine $\mathrm{Coad}(A)$ de la catégorie des A–modules (unitaires) à gauche, qui ne dépend pas du choix de la suite de semi-normes (q_n) (tant qu'elle satisfait les conditions imposées ci-dessus). Schneider et Teitelbaum ont montré [ST 03] que $\mathrm{Coad}(A)$ a les propriétés suivantes :

- Tout module M dans $\mathrm{Coad}(A)$ est canoniquement muni d'une structure de L–espace de Fréchet. En écrivant $M = \varprojlim_n M_n$ pour une suite compatible (M_n) de A_n–modules de type fini, chaque M_n a une topologie canonique de

© Spartacus-Idh 2019

L–espace de Banach, et M est muni de la topologie limite projective. De plus, on récupère chaque M_n à partir de M, car l'application naturelle $A_n \otimes_A M \to M_n$ est un isomorphisme. Enfin, l'image de M est dense dans chaque M_n et on a $R^1 \lim M_n = 0$ (il s'agit d'un analogue des théorèmes A et B de Cartan).

- Tout morphisme A-linéaire entre deux objets de $\mathrm{Coad}(A)$ est automatiquement continu (il est même strict), et son noyau (resp. image, conoyau, coimage) est encore dans $\mathrm{Coad}(A)$. Cependant, $\mathrm{Coad}(A)$ n'est pas stable par sous-modules ou modules quotient. En fait, si N est un sous-A–module de $M \in \mathrm{Coad}(A)$, alors N est coadmissible si et seulement si N est fermé dans M, si et seulement si M/N est coadmissible.
- $\mathrm{Coad}(A)$ est une sous-catégorie abélienne de la catégorie des A–modules à gauche, contenant les A–modules de présentation finie (mais en général elle ne contient pas les A–modules de type fini, car A n'est pas un anneau noethérien en général).
- Tous sous-module de type fini d'un module coadmissible M est coadmissible, et donc fermé dans M.

Par exemple, si X est un espace Stein sur L, alors $A = \mathscr{O}(X)$ est une L–algèbre de Fréchet-Stein, et $\mathrm{Coad}(A)$ s'identifie à la catégorie des $\mathscr{O}_X$–modules cohérents (via le foncteur sections globales).

Munis de ces résultats, ainsi que de ceux de la section précédente, nous pouvons enfin donner la preuve du théorème suivant :

Théorème 4.11.

Soit V un espace de Fréchet avec une action continue de G et une structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module. Alors toute application $\mathscr{O}(\Omega)[G]$-linéaire, continue, non nulle $F : V \to \mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho$ est surjective.

Démonstration. Nous allons faire la preuve en deux étapes, en montrant d'abord que l'image de F est dense. Soit $\check{V} = V \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \check{\mathbb{Q}}_p$ et

$$\check{F} : \check{V} \to \mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \check{\mathbb{Q}}_p = \mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^\rho$$

l'application déduite de F par extension des scalaires. Un petit exercice montre qu'il suffit de prouver que l'image de $\check{F}$ est dense. Soit M l'adhérence de cette image dans $\mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^\rho$. Soit $A = \mathscr{O}(\check{\Omega})$, une algèbre de Fréchet-Stein. Le A–module $\mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^\rho$ est coadmissible, car de présentation finie sur A. Il s'ensuit que M est coadmissible et donc il définit un faisceau cohérent M sur $\check{\Omega}$. Ce faisceau est G–équivariant car M est stable par G, et il est alors facile de vérifier que ce faisceau n'a pas de torsion et donc est un fibré G–équivariant sur $\check{\Omega}$ (ne pas oublier qu'on est en dimension 1 !). Soit N définit par la suite exacte

$$0 \to M \to \mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^\rho \to N \to 0.$$

En utilisant encore la G-structure sur N, on vérifie que $N \in \mathrm{Bun}_G(\check{\Omega})$. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, on a $\mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^\rho \in \mathrm{Bun}_G^{\mathrm{LT}}(\check{\Omega})$ et $D_{\mathrm{LT}}(\mathscr{O}(\mathscr{M}_n)^\rho) = \rho^* \otimes \mathscr{O}_{\check{\mathbb{P}}^1}$. On obtient ainsi une suite exacte de fibrés D^*–équivariants sur $\check{\mathbb{P}}^1$

$$0 \to D_{\mathrm{LT}}(M) \to \rho^* \otimes \mathscr{O}_{\check{\mathbb{P}}^1} \to D_{\mathrm{LT}}(N) \to 0.$$

https://spartacus-idh.com

Il suffit de montrer que $D_{\mathrm{LT}}(N)=0$. Supposons que ce n'est pas le cas et notons $X=D_{\mathrm{LT}}(M)$, $Y=D_{\mathrm{LT}}(N)$, de telle sorte qu'on ait une suite exacte

$$0\to X\to \rho^*\otimes\mathscr{O}_{\check{\mathbb{P}}^1}\to Y\to 0.$$

Soit λ la plus petite pente de X, donc $\lambda\leqslant 0$. La suite exacte précédente en induit une autre

$$0\to X(-\lambda)\to \rho^*\otimes\mathscr{O}_{\check{\mathbb{P}}^1}(-\lambda)\to Y(-\lambda)\to 0.$$

En passant aux sections globales (en utilisant le fait que $H^1(\check{\mathbb{P}}^1,X(-\lambda))=0$) on obtient

$$0\to H^0(\check{\mathbb{P}}^1,X(-\lambda))\to \mathrm{Sym}^{-\lambda}(\check{\mathbb{Q}}_p^2)\otimes\rho^*\to H^0(\check{\mathbb{P}}^1,Y(-\lambda))\to 0.$$

Le terme au milieu étant irréductible et $H^0(\check{\mathbb{P}}^1,X(-\lambda))$ étant non nul, on obtient

$$H^0(\check{\mathbb{P}}^1,Y(-\lambda))=0.$$

Les pentes de $Y(-\lambda)$ étant positives, on obtient $Y(-\lambda)=0$, une contradiction. Nous venons de montrer que l'image de F est dense. Comme $\mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho$ est un module projectif de type fini sur $\mathscr{O}(\Omega)$, il suffit d'utiliser la proposition ci-dessous pour conclure. □

Proposition 4.12.

Soit V un espace de Fréchet avec une structure de $\mathscr{O}(\Omega)$–module et soit N un $\mathscr{O}(\Omega)$–module projectif de type fini (en particulier N est un Fréchet nucléaire). Alors toute application continue, $\mathscr{O}(\Omega)$-linéaire, d'image dense $F:V\to N$ est surjective.

Démonstration. On peut supposer que N est libre de type fini, et ensuite que $N=\mathscr{O}(\Omega)$. Ainsi $I=F(V)$ est un idéal dense de $\mathscr{O}(\Omega)$. Soit $f\in I$ non nulle et soient $x_1,x_2,\dots$ ses zéros dans Ω (à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$–conjugaison près). Notons

$$\varphi_n(z)=\prod_{k=1}^{n}N_{\kappa(x_k)/\mathbb{Q}_p}(z-x_k)\in\mathscr{O}(\Omega).$$

Puisque I est dense, on peut trouver pour tout n un vecteur $v_n\in V$ tel que $F(v_n)$ ne s'annule pas en x_n. On construit alors $c_2,c_3,\dots\in\mathbb{Q}_p$ tels que

$$v:=v_1+c_2\varphi_1v_2+c_3\varphi_1\varphi_2v_3+\cdots$$

converge dans V et tel que $F(v_1)+c_2\varphi_1F(v_2)+\cdots+c_n\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}F(v_n)$ ne s'annule pas en x_n, pour tout n. Alors $g:=F(v)\in I$ ne s'annule en aucun x_n et donc l'idéal $J=(f,g)\subset I$ est dense. Comme il est de type fini, il est fermé, et donc $J=\mathscr{O}(\Omega)$ et $I=\mathscr{O}(\Omega)$, comme voulu. □

Corollaire 4.13. Le morphisme $F:\Pi[0]^*\to\mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho$ est surjectif. En particulier, $\mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho$ est coadmissible en tant que $D(K)$–module.

© Spartacus-Idh 2019

4 Injectivité du morphisme

Les morphismes $F : \Pi[0]^* \to \mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho$ et $F : \Pi[2]^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ induisent un morphisme

$$F : \Pi[2]^*/d\Pi[0]^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho/d\mathscr{O}(\Sigma_n)^\rho = H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho,$$

qui est surjectif d'après le corollaire 4.13. Le terme $\Pi[2]^*/d\Pi[0]^*$ s'identifie à $(\Pi[2]^{u^+=0})^*$, d'où (par dualité) une immersion fermée

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*} \to \Pi[2]^{u^+=0}.$$

Nous allons analyser cette application, ce qui demande encore quelques préliminaires.

Proposition 4.14.

L'espace $\Pi[2]^{u^+=0}$ est un G–module lisse.

Démonstration. Si on savait que $\Pi[2]^{u^+=0}$ est une G–représentation localement analytique, on pourrait conclure en utilisant les mêmes formules que celles utilisées pour démontrer la lissité de $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*}$ (*cf.* chapitre 2), *i.e.* celles permettant d'exprimer l'action de $\mathfrak{gl}_2$ en termes de u^+ et ∂ (elles montreraient que $\Pi[2]^{u^+=0}$ s'identifie à $\Pi[2]^{\mathfrak{gl}_2=0}$). Pour montrer ce caractère localement analytique, remarquons d'abord qu'en tant que B–module $\Pi[2]$ est simplement une tordue de $\Pi[0]$ par un caractère, donc localement analytique. On en déduit que tout vecteur v de $\Pi[2]^{u^+=0}$ est fixé par $\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et par $\left(\begin{smallmatrix}1+p^n\mathbb{Z}_p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ pour n assez grand. En appliquant cela à wv on obtient aussi que v est fixé par $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ p^n\mathbb{Z}_p & 1\end{smallmatrix}\right)$ pour n assez grand. On en déduit facilement que v est fixé par $1+p^nM_2(\mathbb{Z}_p)$ pour n assez grand, ce qui permet de conclure. □

Nous avons prouvé dans le deuxième chapitre que $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*}$ est un G–module lisse qui se surjecte sur $\pi\oplus\pi$. En utilisant le fait que π est un objet injectif et projectif dans la catégorie des G–modules lisses à caractère central fixé, on en déduit que l'on peut écrire

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*} = \pi\oplus\pi\oplus\sigma$$

pour un G–module σ. Nous allons montrer que $\sigma = 0$, mais l'argument sera très indirect (un argument plus simple, mais très loin d'être une trivialité, se trouve dans [CDN 17] ; il s'étend à $\mathrm{GL}_2(F)$ pour toute extension finie F de $\mathbb{Q}_p$, ce qui n'est pas le cas de l'argument ci-dessous).

Définition 4.15.

Soit LC l'espace des fonctions $\phi : \mathbb{Q}_p^* \to L\otimes\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ localement constantes, à support compact dans $\mathbb{Q}_p$ et telles que $\phi(ax) = \sigma_a(\phi(x))$ pour $x\in\mathbb{Q}_p^*$ et $a\in\mathbb{Z}_p^*$ (rappelons que $\sigma_a\in\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}_p)$ vérifie $\chi(\sigma_a) = a$).

Le **groupe mirabolique** $P = \left(\begin{smallmatrix}\mathbb{Q}_p^* & \mathbb{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ agit sur LC par

$$\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\phi(x) = \varepsilon(bx)\phi(ax)$$

où $\varepsilon : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ envoie x sur $\zeta_{p^n}^{p^nx}$ pour n assez grand.

https://spartacus-idh.com

Le sous-espace LC_c de LC formé des fonctions ϕ nulles sur un voisinage de 0 est stable sous l'action de P et irréductible en tant que P–module (c'est un résultat standard).

Proposition 4.16.

Il existe un plongement P–équivariant

$$\Pi[2]^{u^+=0} \to \mathrm{LC} \otimes D_{\mathrm{dR}},$$

où $D_{\mathrm{dR}} = D_{\mathrm{dR}}(V)$ pour n'importe quelle représentation π–compatible V.

Nous allons expliquer la preuve de la proposition ci-dessus dans le paragraphe ci-dessous, admettons donc pour l'instant ce résultat et continuons la preuve de la nullité de σ.

Soit ι la composée des applications suivantes

$$\pi \oplus \pi \to \pi \oplus \pi \oplus \sigma \simeq H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*} \to \Pi[2]^{u^+=0} \to \mathrm{LC} \otimes D_{\mathrm{dR}}.$$

D'après ce qui précède, toutes les flèches sont injectives. Si $u \in U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors $(1-u)\mathrm{LC} \subset \mathrm{LC}_c$. En combinant cette observation avec le fait que π est supercuspidale (donc tout vecteur de π est une combinaison linéaire de vecteurs de la forme $(1-u)v$), on voit que $\mathrm{Im}(\iota) \subset \mathrm{LC}_c \otimes D_{\mathrm{dR}}$. La théorie classique du modèle de Kirillov [JL 06] montre que π est isomorphe à LC_c en tant que P–module. On en déduit que ι induit un isomorphisme $\pi \oplus \pi \simeq \mathrm{LC}_c \otimes D_{\mathrm{dR}}$. Mais alors σ se plonge dans σ^U, qui se plonge dans $\mathrm{LC}^U \otimes D_{\mathrm{dR}}$. On voit facilement que $\mathrm{LC}^U = 0$, ce qui permet de conclure que $\sigma = 0$ et donc on a bien un isomorphisme

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*} \simeq \pi \oplus \pi.$$

Ensuite, comme $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^*} \simeq \pi \oplus \pi$ se plonge dans $\Pi[2]^{u^+=0}$, on peut écrire $\Pi[2]^{u^+=0} = \pi \oplus \pi \oplus \sigma'$ pour un G–module σ'. En reprenant l'argument du paragraphe précédent, on obtient $\sigma' = 0$ et donc $\Pi[2]^{u^+=0} \simeq \pi \oplus \pi$.

On déduit de ce qui précède que F induit un isomorphisme

$$\Pi[2]^* / d\Pi[0]^* \simeq \Omega^1(\Sigma_n)^{\rho} / d\mathcal{O}(\Sigma_n)^{\rho}.$$

En particulier, si $l \in \Pi[0]^*$ et $F(l\,dz) = 0$, alors $l\,dz \in d\mathcal{O}(\Sigma_n)^{\rho}$ et donc $l \in u^+(\Pi[0]^*)$. Comme u^+ est injectif sur $\Omega^1(\Sigma_n)^{\rho}$, on obtient ainsi une inclusion

$$\ker(F) \subset \left(\bigcap_{n \geqslant 1} (u^+)^n \Pi[0]^* \right) dz \subset \Pi[2]^*.$$

Enfin, considérons un vecteur $x \in \cap_{n \geqslant 1} (u^+)^n \Pi[0]^*$ et prenons une représentation π–compatible V. En écrivant $\Pi^{\mathrm{an}} = \Pi(V)^{\mathrm{an}}$ et $D_{\mathrm{rig}} = D_{\mathrm{rig}}(V)$, on obtient

$$x \in \cap_{n \geqslant 1} (u^+)^n (\Pi^{\mathrm{an}})^* \subset \cap_{n \geqslant 1} (u^+)^n (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1).$$

© Spartacus-Idh 2019

En regardant la restriction à $\mathbb{Z}_p$, on obtient $t^n \mid \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(x)$ pour tout $n \geqslant 1$, donc $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(x) = 0$. On voit donc que

$$\ker(F) \subset \{x \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbb{P}^1 \,|\, \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(x) = 0\}.$$

Comme $\ker(F)$ est stable par w, l'inclusion ci-dessus force $\ker(F) = 0$. Cela finit la preuve de l'injectivité de F et du théorème principal.

5 Le modèle de Kirillov de Colmez

Il nous reste donc à expliquer la preuve de la proposition 4.16. Nous allons simplement énoncer les résultats, les preuves étant très techniques (voir la section 5 du chapitre VI de [Col 10b], ainsi que [DLB 17] pour les détails).

Soit V une L–représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, absolument irréductible (dans les applications V sera une représentation π–compatible). Notons pour simplifier $\Pi = \Pi(V)$ et rappelons que $P = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q}_p^* & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Définition 4.17.

a. Soit $\Pi^{P-\mathrm{fini}}$ l'espace des **vecteurs P-finis** de Π, *i.e.* les vecteurs $v \in \Pi$ vérifiant

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k v = 0$$

pour certains $n, k \geqslant 1$, et tels que $L\left[\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right] v$ soit de dimension finie sur L.

b. Soit $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}} \subset \Pi^{P-\mathrm{fini}}$ le sous-espace des **vecteurs de pente infinie**, *i.e.* satisfaisant aussi une relation

$$\left(\sum_{i=0}^{p^n-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)^k \circ \left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v = 0$$

pour certains $n, k \geqslant 1$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Remarque 4.18. Soit $v \in \Pi^{P-\mathrm{fini}}$ et soient n, k comme dans la définition ci-dessus. On vérifie sans difficulté que

$$(1-u)^k v \in \Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}, \ \forall\, u \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Définition 4.19.

Posons $L_\infty[[t]] = \cup_{n \geqslant 1} L_n[[t]]$. Si X est un $L_\infty[[t]]$–module avec une action semi-linéaire de Γ, on note

- $\mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, X)^\Gamma$ l'espace des fonctions $\phi : \mathbb{Q}_p^* \to X$ à support compact dans $\mathbb{Q}_p$ et satisfaisant $\phi(ax) = \sigma_a(\phi(x))$ pour tous $x \in \mathbb{Q}_p^*$ et $a \in \mathbb{Z}_p^*$.
- $\mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, X)^\Gamma$ le sous-espace de $\mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, X)^\Gamma$ formé des fonctions nulles au voisinage de 0.

https://spartacus-idh.com

Remarque 4.20.

a. L'application $\phi \to (\phi(p^i))_{i\in\mathbb{Z}}$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, X)^\Gamma \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} X.$$

b. On munit les espaces $\mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, X)^\Gamma$ et $\mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, X)^\Gamma$ d'une action de P, définie par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\phi\right)(x) = \varepsilon(bx)e^{tbx}\phi(ax).$$

Rappelons que $\varepsilon : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ envoie x sur $\zeta_{p^n}^{p^n x}$ pour n assez grand.

Notons

$$D_{\mathrm{dif}}^-(V) = \varinjlim_n D_{\mathrm{dif},n}^+(V)[1/t]/D_{\mathrm{dif},n}^+(V).$$

La proposition suivante découle des résultats de Colmez [Col 10b, ch. VI] (voir la preuve de la proposition 7.6 de [DLB 17] pour les détails).

Proposition 4.21.

a. Les sous-espaces $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ et $\Pi^{P-\mathrm{fini}}$ sont stables sous l'action de P.

b. Il existe une injection P–équivariante canonique

$$\Pi^{P-\mathrm{fini}} \to \mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma,$$

induisant un isomorphisme

$$\Pi_c^{P-\mathrm{fini}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma.$$

En particulier on dispose d'un isomorphisme de L–espaces vectoriels

$$\Pi_c^{P-\mathrm{fini}} \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} D_{\mathrm{dif}}^-(V).$$

Un résultat beaucoup plus délicat est le théorème suivant de Colmez [Col 10b, ch. VI] :

Théorème 4.22.

Tout vecteur P-fini, de pente infinie est localement analytique, *i.e.*

$$\Pi_c^{P-\mathrm{fini}} \subset \Pi^{\mathrm{an}}.$$

Nous renvoyons le lecteur au théorème 7.11 de [DLB 17] pour les détails de la preuve du résultat ci-dessous.

© Spartacus-Idh 2019

Théorème 4.23.

Supposons que V est π–compatible.

a. Un vecteur $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$ est dans $\Pi^{\mathrm{lisse}} \simeq \pi$ si et seulement si $u^+v = a^+v = 0$.

b. L'inclusion $\Pi^{\mathrm{lisse}} \subset \Pi^{P-\mathrm{fini}}$ combinée avec l'isomorphisme fourni par la proposition 4.21 induisent un isomorphisme

$$\pi \simeq \Pi^{\mathrm{lisse}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma.$$

Démonstration. Nous allons simplement donner les grandes lignes de la preuve. Soit $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$ tel que $u^+v = a^+v = 0$. Un calcul montre que pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$ le vecteur $v_x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)v - v$ est encore tué par u^+ et a^+. On en déduit (en utilisant la remarque 4.18 que v_x est dans l'espace

$$\Pi_c^{P-\mathrm{lisse}} := \{v \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}} \mid u^+v = a^+v = 0\}.$$

Or, on montre [Dos 12, Col 10b] que $\Pi_c^{P-\mathrm{lisse}} \subset \Pi^{\mathrm{lisse}}$ et que l'isomorphisme

$$\Pi_c^{P-\mathrm{fini}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma$$

induit un isomorphisme de P–modules

$$\Pi_c^{P-\mathrm{lisse}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma.$$

Ainsi, $u^-v_x = 0$ pour tout x. Un autre calcul montre que cela force

$$((\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1)u^-v = 0$$

pour tout x. D'autre part, on vérifie facilement que le seul vecteur de Π invariant par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est 0, donc $u^-v = 0$ et v est lisse. Le reste s'en déduit facilement. □

Remarque 4.24.

a. La preuve du théorème précédent a l'air élémentaire, mais elle repose de manière cruciale sur l'inclusion $\Pi_c^{P-\mathrm{lisse}} \subset \Pi^{\mathrm{lisse}}$, qui est un résultat hautement nontrivial. En effet, il est un des ingrédients cruciaux de la preuve du fait que $\Pi^{\mathrm{lisse}} \neq 0$, ce qui n'est pas du tout évident en utilisant la construction de Π en termes de (φ,Γ)–modules. Il s'agit d'un des plus délicats résultats démontrés dans le chapitre VI de l'article de Colmez [Col 10b]. Une preuve plus simple se trouve dans [Dos 12].

b. Puisque

$$N_{\mathrm{dif}}^+(V) = L_\infty[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V) \quad \text{et}$$
$$D_{\mathrm{dif}}^+(V) = tN_{\mathrm{dif}}^+(V) + L_\infty[[t]] \otimes_L \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V)),$$

on obtient un isomorphisme Γ–équivariant

$$N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V) \simeq L_\infty \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V)).$$

Le théorème de Hilbert 90 fournit en outre un isomorphisme

$$\mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, Z)^\Gamma \otimes_L L_\infty \simeq \mathrm{LC}_c(\mathbb{Q}_p^*, Z),$$

avec $Z = L_\infty \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V))$. Enfin, le terme de droite est simplement le modèle de Kirillov usuel de $\pi \otimes_L L_\infty$.

https://spartacus-idh.com

Nous pouvons enfin expliquer la preuve de la proposition 4.16, qui avait joué un rôle crucial dans le paragraphe précédent. En effet, il suffit de travailler avec $\Pi[0]^{u^+=0}$ à la place (pour passer à $\Pi[2]^{u^+=0}$, il suffit de tordre par un caractère convenable du Borel). Le théorème 4.23 fournit une identification

$$\Pi[0]^{u^+=0} = (\Pi^{\mathrm{an}}/\pi)^{u^+=0} = (\Pi^{\mathrm{an}})^{a^+u^+=(u^+)^2=0}/\pi.$$

En utilisant le plongement $\Pi^{P-\mathrm{fini}} \subset \mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma$ fourni par la proposition 4.21, on obtient une inclusion

$$(\Pi^{\mathrm{an}})^{a^+u^+=(u^+)^2=0} \subset \mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, (t^{-2}D_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V)^{\nabla t=0})^\Gamma$$

$$\simeq \mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma,$$

le dernier isomorphisme étant une conséquence de l'égalité

$$(t^{-2}D_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V)^{\nabla t=0} = t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V),$$

qui se démontre en utilisant les expressions explicites de $N_{\mathrm{dif}}^+(V)$ et $D_{\mathrm{dif}}^+(V)$ en fonction de $D_{\mathrm{dR}}(V)$ et sa filtration (*cf.* la remarque ci-dessus). On obtient ainsi un plongement

$$(\Pi^{\mathrm{an}})^{a^+u^+=(u^+)^2=0} \subset \mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma.$$

En utilisant encore une fois le théorème 4.23, on obtient facilement le résultat voulu.

© Spartacus-Idh 2019

Bibliographie

[And 02] **Y. André**. Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p–adique. *Inventiones mathematicae*, vol. 148, n° 2, p. 285–317, 2002.

[BL 94] **L. Barthel et R. Livne**. Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. *Duke Mathematical Journal*, vol. 75, n° 2, p. 261–292, 1994.

[BL 95] **L. Barthel et R. Livne**. Modular Representations of GL 2 of a Local-Field : The Ordinary, Unramified Case. *Journal of Number Theory*, vol. 55, n° 1, p. 1–27, 1995.

[Ber 02] **L. Berger**. Représentations p-adiques et équations différentielles. *Inventiones mathematicae*, vol. 148, n° 2, p. 219–284, 2002.

[Ber 08] **L. Berger**. Équations differentielles p–adiques et (ϕ, N)–modules filtrés. *Astérisque*, vol. 319, p. 13–38, 2008.

[Ber 11] **L. Berger**. La correspondance de Langlands locale p–adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. *Astérisque*, vol. 339, p. 157–180, 2011. *Séminaire Bourbaki* 1017.

[BB 10] **L. Berger et C. Breuil**. Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. *Astérisque*, vol. 330, p. 155–211, 2010.

[BC 91] **J.-F. Boutot et H. Carayol**. Uniformisation p–adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Čerednik et de Drinfeld. *Astérisque*, n° 196-97, p. 45–158, 1991.

[BZ 95] **J.-F. Boutot et T. Zink**. The p–adic Uniformization of Shimura Curves. *Preprint*, 1995. https://www.math.uni-bielefeld.de/?zink/p-adicuni.ps.

[Bre 03a] **C. Breuil**. Sur quelques représentations modulaires et p–adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ II. *Journal de l'Institut mathématiques de Jussieu*, vol. 2, n° 1, p. 23–58, 2003.

[Bre 03b] **C. Breuil**. Sur quelques représentations modulaires et p–adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ I. *Compositio Mathematica*, vol. 138, n° 2, p. 165–188, 2003.

[Bre 04] **C. Breuil**. Invariant L et série spéciale p–adique. In : *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, p. 559–610, Elsevier, 2004.

[Bre 08] **C. Breuil**. Introduction générale. *Astérisque*, vol. 319, n° 1, p. 12, 2008.

[Bre 10a] **C. Breuil**. The emerging p-adic Langlands programme. In : *Proceedings of the I.C.M.*, p. 203–230, 2010.

© Spartacus-Idh 2019

[Bre 10b] **C. Breuil**. Série spéciale p–adique et cohomologie étale complétée. *Astérisque*, n° 331, p. 65–115, 2010.

[Bre 12] **C. Breuil**. Correspondance de Langlands p–adique, compatibilité local-global et applications. *Astérisque*, n° 348, p. 119–147, 2012. *Séminaire Bourbaki* 1031.

[BCDT 01] **C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor**. On the modularity of elliptic curves over **Q** : wild 3-adic exercises. *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 14, n° 4, p. 843–939, 2001.

[BE 10] **C. Breuil et M. Emerton**. Représentations p–adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global. *Astérisque*, n° 331, p. 255–315, 2010.

[BS 07] **C. Breuil et P. Schneider**. First steps towards p–adic Langlands functoriality. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, n° 610, p. 149–180, 2007.

[BS 04] **C. Breuil et M. Strauch**. Sur quelques représentations p–adiques supercuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Non publié*, 2004.

[BH 06] **C. J. Bushnell et G. Henniart**. *The local Langlands conjecture for* GL_2. vol. 335, Springer, 2006.

[Car 90] **H. Carayol**. Non-abelian Lubin-Tate theory. *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, vol. 2, p. 15–39, 1990.

[Car 86] **H. Carayol**. Sur les représentations l–adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, vol. 19, n° 4, p. 409–468, 1986.

[Car 94] **H. Carayol**. Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet. *Contemporary Mathematics*, vol. 165, p. 213–213, 1994.

[CC 98] **F. Cherbonnier et P. Colmez**. Représentations p–adiques surconvergentes. *Inventiones mathematicae*, vol. 133, n° 3, p. 581–611, 1998.

[Che 76] **I. V. Cherednik**. Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of $\mathrm{PGL}_2(k_w)$ with compact quotients. *Matematicheskii Sbornik*, vol. 142, n° 1, p. 59–88, 1976.

[Col 98] **P. Colmez**. Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local. *Annals of Mathematics*, p. 485–571, 1998.

[Col 02] **P. Colmez**. Espaces de Banach de dimension finie. *Journal de l'Institut mathématiques de Jussieu*, vol. 1, n° 3, p. 331–439, 2002.

[Col 03] **P. Colmez**. Les conjectures de monodromie p-adiques. *Astérisque*, vol. 290, p. 53–102, 2003. Séminaire Bourbaki 897.

[Col 08a] **P. Colmez**. Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham. *Astérisque*, vol. 319, p. 117–186, 2008.

[Col 08b] **P. Colmez**. Représentations triangulines de dimension 2. *Astérisque*, vol. 319, p. 213–258, 2008.

[Col 10a] **P. Colmez**. (ϕ, Γ)–modules et représentations du mirabolique. *Astérisque*, vol. 330, p. 61–153, 2010.

[Col 10b] **P. Colmez**. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (ϕ, Γ)–modules. *Astérisque*, vol. 330, p. 281–509, 2010.

https://spartacus-idh.com

[Col 10c] **P. Colmez**. La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Astérisque*, vol. 330, p. 213–262, 2010.

[Col 15] **P. Colmez**. Correspondance de Langlands locale p–adique et changement de poids. *EMS, à paraître*, 2015.

[CD 14] **P. Colmez et G. Dospinescu**. Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Algebra & Number Theory*, vol. 8, n° 6, p. 1447–1519, 2014.

[CDN 17] **P. Colmez, G. Dospinescu et W. Nizioł**. Cohomologie p–adique de la tour de Drinfeld : le cas de la dimension 1. *Preprint arXiv :1704.08928*, 2017.

[CDP 14] **P. Colmez, G. Dospinescu et V. Paškūnas**. The p–adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Cambridge Journal of Mathematics*, vol. 2, n° 1, p. 1–47, 2014.

[CF 00] **P. Colmez et J.-M. Fontaine**. Construction des représentations p-adiques semi-stables. *Inventiones mathematicae*, vol. 140, n° 1, p. 1–43, 2000.

[Dat 06] **J. F. Dat**. Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. In : *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, p. 1–74, Elsevier, 2006.

[Del 69] **P. Deligne**. Formes modulaires et représentations l–adiques. *Séminaire Bourbaki*, vol. 11, n° 335, 1968–1969.

[Del 73] **P. Deligne**. Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L. In : *Modular functions of one variable II*, p. 501–597, Springer, 1973.

[Dos 11] **G. Dospinescu**. Équations différentielles p–adiques et modules de Jacquet analytiques. *Automorphic Forms and Galois Representations*, vol. 1, p. 359–374, 2011.

[Dos 12] **G. Dospinescu**. Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p–adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Mathematische Annalen*, vol. 354, n° 2, p. 627–657, 2012.

[Dos 15] **G. Dospinescu**. Extensions de représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques. *Compositio Mathematica*, vol. 151, n° 8, p. 1462–1498, 2015.

[Dos 12] **G. Dospinescu**. Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p–adique. *Thèse de l'École Polytechnique*, juin 2012. https://tel.archives-ouvertes.fr/pastel-00725370/document.

[DLB 17] **G. Dospinescu et A.-C. Le Bras**. Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands p–adique. *Annals of Mathematics*, n° 186, p. 321–411, 2017.

[Dri 76] **V. G. Drinfeld**. Drinfeld, Coverings of p–adic symmetric domains. *Functional Analysis and its Applications*, vol. 10, n° 2, p. 107–115, 1976.

[Elk 73] **R. Elkik**. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien. In : *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, p. 553–603, Elsevier, 1973.

[Eme 06a] **M. Emerton**. A local-global compatibility conjecture in the p–adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbf{Q}$. *Pure and Applied Math. Quarterly*, vol. 2, p. 279–393, 2006.

[Eme 06b] **M. Emerton**. On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms. *Inventiones mathematicae*, vol. 164, n° 1, p. 1–84, 2006.

© Spartacus-Idh 2019

[Eme 11] **M. Emerton**. Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbf{Q}$. *Preprint*, 2011. http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html.

[Eme 17] **M. Emerton**. Locally analytic vectors in representations of locally p–adic analytic groups. *To appear in Memoirs of the AMS*, 2017. http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html.

[Fal 02a] **G. Faltings**. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. *Algebraic number theory and algebraic geometry, Contemp. Math.*, vol. 300, p. 115–129, 2002.

[Fal 02b] **G. Faltings**. Almost étale extensions. *Astérisque*, n° 279, p. 185–270, 2002.

[FF 17] **L. Fargues et J.-M. Fontaine**. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p–adique. *Astérisque (à paraître)*, 2017.

[FGL 08] **L. Fargues, A. Genestier et V. Lafforgue**. *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*. vol. 262 in *Progress in Mathematics*, Springer, 2008.

[Fon 82] **J.-M. Fontaine**. Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Annals of Mathematics*, vol. 115, n° 3, p. 529–577, 1982.

[Fon 90] **J.-M. Fontaine**. Représentations p–adiques des corps locaux (1re partie). In : *The Grothendieck Festschrift*, p. 249–309, Springer, 1990.

[Fon 94a] **J.-M. Fontaine**. Le corps des périodes p–adiques, Périodes p–adiques, exp. II. *Astérisque*, vol. 223, p. 59–102, 1994.

[Fon 94b] **J.-M. Fontaine**. Représentations l–adiques semi-stables, Périodes p–adiques. *Astérisque*, vol. 223, p. 321–347, 1994.

[Fon 94c] **J.-M. Fontaine**. Représentations p–adiques semi-stables, Périodes p–adiques. *Astérisque*, vol. 223, p. 113–184, 1994.

[Fon 04] **J.-M. Fontaine**. Arithmétique des représentations galoisiennes p–adiques, Cohomologies p–adiques et applications arithmétiques III. *Astérisque*, vol. 295, p. 1–115, 2004.

[FM 95] **J.-M. Fontaine et B. Mazur**. Geometric Galois representations. *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Ser. Number Theory, I*, p. 41–78, 1995.

[Fro 03] **H. Frommer**. The locally analytic principal series of split reductive groups. *Preprint*, 2003.

[GK 00] **E. Grosse-Klönne**. Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf. *J. reine angew. Math*, vol. 519, p. 73–95, 2000.

[GK 04] **E. Grosse-Klönne**. De Rham cohomology of rigid spaces. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 247, n° 2, p. 223–240, 2004.

[GK 05] **E. Grosse-Klönne**. Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfeld's symmetric space. *Journal of Algebraic Geometry*, vol. 14, n° 3, p. 391–437, 2005.

[Har 97] **M. Harris**. Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces ; elaboration of Carayol's program. *Inventiones mathematicae*, vol. 129, n° 1, p. 75–119, 1997.

https://spartacus-idh.com

[HT 01] **M. Harris et R. Taylor**. *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties*. vol. 151, Princeton university press, 2001.

[Hen 00] **G. Henniart**. Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL_n sur un corps p–adique. *Inventiones mathematicae*, vol. 139, n° 2, p. 439–455, 2000.

[Hen 02] **G. Henniart**. Sur l'unicité des types pour GL_2. Appendice à : C. Breuil et A. Mézard, Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ en $\ell = p$. *Duke Mathematical Journal*, vol. 115, n° 2, p. 205–310, 2002.

[Her 98] **L. Herr**. Sur la cohomologie galoisienne des corps p–adiques. *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 126, n° 4, p. 563–600, 1998.

[HG 94] **M. J. Hopkins et B. H. Gross**. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. *Contemporary Mathematics*, vol. 158, p. 23–23, 1994.

[JL 06] **H. Jacquet et R. P. Langlands**. *Automorphic forms on* GL(2). vol. 114 in *Lecture Notes in Math.*, Springer, 2006.

[KPX 14] **K. Kedlaya, J. Pottharst et L. Xiao**. Cohomology of arithmetic families of (ϕ, Γ)–modules. *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 27, n° 4, p. 1043–1115, 2014.

[Ked 04] **K. S. Kedlaya**. A p–adic local monodromy theorem. *Annals of Mathematics*, p. 93–184, 2004.

[Ked 10] **K. S. Kedlaya**. *p-adic Differential Equations*. vol. 125, Cambridge University Press, 2010.

[KW 09a] **C. Khare et J.-P. Wintenberger**. Serre's modularity conjecture (I). *Inventiones mathematicae*, vol. 178, n° 3, p. 485–504, 2009.

[KW 09b] **C. Khare et J.-P. Wintenberger**. Serre's modularity conjecture (II). *Inventiones mathematicae*, vol. 178, n° 3, p. 505–586, 2009.

[Kie 67] **R. Kiehl**. Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. *Inventiones mathematicae*, vol. 2, n° 4, p. 256–273, 1967.

[Kis 09] **M. Kisin**. The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2. *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 22, n° 3, p. 641–690, 2009.

[Kis 10] **M. Kisin**. Deformations of $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-representations. *Astérisque*, vol. 330, p. 511–528, 2010.

[Koh 11] **J. Kohlhaase**. Lubin-Tate and Drinfeld bundles. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, vol. 63, n° 2, p. 217–254, 2011.

[Kut 80] **P. Kutzko**. The Langlands conjecture for GL_2 of a local field. *Annals of Mathematics*, p. 381–412, 1980.

[LXZ 12] **R. Liu, B. Xie et Y. Zhang**. Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. In : *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, p. 167–190, Elsevier, 2012.

[LT 66] **J. Lubin et J. Tate**. Formal moduli for one-parameter formal Lie groups. *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 94, p. 49–59, 1966.

[Mar 04] **A. Marmora**. Irrégularité et conducteur de Swan p–adiques. *Doc. Math*, vol. 9, p. 413–433, 2004.

© Spartacus-Idh 2019

[Meb 02] **Z. Mebkhout**. Analogue p–adique du théoreme de Turrittin et le théoreme de la monodromie p–adique. *Inventiones mathematicae*, vol. 148, n° 2, p. 319–351, 2002.

[Mor 81] **Y. Morita**. A p–adic theory of hyperfunctions, I. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 17, n° 1, p. 1–24, 1981.

[Niz 08] **W. Nizioł**. Semistable conjecture via K–theory. *Duke Mathematical Journal*, vol. 141, n° 1, p. 151–178, 2008.

[Orl 15] **S. Orlik**. The de Rham cohomology of Drinfeld's upper half space. *Münster J. Math*, vol. 8, p. 169–179, 2015.

[Pan 17] **L. Pan**. First covering of the Drinfel'd upper half-plane and Banach representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Algebra & Number Theory*, vol. 11, n° 2, p. 405–503, 2017.

[Paš 13] **V. Paškūnas**. The image of Colmez's Montréal functor. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, vol. 118, n° 1, p. 1–191, 2013.

[PSS 17] **D. Patel, T. Schmidt et M. Strauch**. Locally analytic representations of $\mathrm{GL}(2, L)$ via semistable models of $\mathbf{P}^1$. *Journal de l'Institut mathématique de Jussieu (à paraître)*, 2017.

[RZ 96] **M. Rapoport et T. Zink**. Period spaces for p–divisible groups. *Ann. of Math. Stud.*, vol. 141, 1996.

[Sai 97] **T. Saito**. Modular forms and p–adic Hodge theory. *Inventiones mathematicae*, vol. 129, n° 3, p. 607–620, 1997.

[SS 91] **P. Schneider et U. Stuhler**. The cohomology of p–adic symmetric spaces. *Inventiones mathematicae*, vol. 105, n° 1, p. 47–122, 1991.

[ST 02a] **P. Schneider et J. Teitelbaum**. Banach space representations and Iwasawa theory. *Israel journal of mathematics*, vol. 127, n° 1, p. 359–380, 2002.

[ST 02b] **P. Schneider et J. Teitelbaum**. Locally analytic distributions and p–adic representation theory, with applications to GL_2. *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 15, n° 2, p. 443–468, 2002.

[ST 03] **P. Schneider et J. Teitelbaum**. Algebras of p–adic distributions and admissible representations. *Inventiones mathematicae*, vol. 153, n° 1, p. 145–196, 2003.

[Sch 13] **P. Scholze**. The local Langlands correspondence for GLn over p-adic fields. *Inventiones mathematicae*, vol. 192, n° 3, p. 663–715, 2013.

[Str 08] **M. Strauch**. Geometrically connected components of deformation spaces of one-dimensional formal modules. *Pure Appl. Math. Quarterly*, vol. 4, p. 1–18, 2008. *(Special issue in honor of Jean-Pierre Serre).*

[Tsu 99] **T. Tsuji**. p–adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Inventiones mathematicae*, vol. 137, n° 2, p. 233–411, 1999.

[Tun 81] **J. Tunnell**. Artin's conjecture for representations of octahedral type. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 5, n° 2, p. 173–175, 1981.

[Wil 95] **A. Wiles**. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Annals of mathematics*, vol. 141, n° 3, p. 443–551, 1995.

https://spartacus-idh.com

Index

A

algèbre
de Hecke complétée 48
de Hecke de H 23
application de localisation 59

C

caractère 23
coadmissible 77
cohomologie complétée de niveau K^p 48
conjecture de Breuil et Strauch 15
correspondance
de Jacquet-Langlands 22
de Langlands locale « classique » 22
courbe modulaire « ouverte » de niveau K_f 45

D

Drinfeld 15
demi-plan de — 17
tour de — 17

E

élément de Casimir 65
équation différentielle attachée à V . 68
espace de Stein 18
étale 31

F

faiblement admissible 27
(F,G)–régulier 75
fibré de Drinfeld 75
Frobenius-semisimple 20

G

groupe
de Weil 20
mirabolique 80

L

L–algèbre de Fréchet-Stein 77
L–représentation
de Banach 29
localement analytique 29
lisse 21
lisse admissible 21

M

module
$(\varphi,N,\mathscr{G}_K)$ 26
$(\varphi,N,\mathrm{Gal}(K'/K))$ 26
$(\varphi,\mathscr{G}_K)$ 26
$(\varphi,\mathrm{Gal}(K'/K))$ 26
(φ,Γ) 31
module filtré
$(\varphi,N,\mathscr{G}_K)$ 26
$(\varphi,N,\mathrm{Gal}(K'/K))$ 26
Morita 19
morphisme des périodes 17

© Spartacus-Idh 2019

O

$\mathcal{O}_D$–module formel spécial X 16

P

π–compatible 38

R

représentation
- de Steinberg 19
- de Weil-Deligne 20
- pro-modulaire 49

résiduellement de longueur finie 31

S

série
- discrète 22
- principale 22
- spéciale 22
- supercuspidales 22

supersingulière 33

T

théorème
- d'uniformization de Cerednik-Drinfeld 41
- de monodromie l–adique de Grothendieck 20
- de monodromie p–adique 26

U

unitaire admissible 29

V

vecteurs
- P-finis 82
- de pente infinie 82

https://spartacus-idh.com

Index des notations

$\mathrm{Ban}(G)$ catégorie des L–représentations de Banach unitaires admissibles de G 30

$\mathrm{Ban}(G)^{\mathrm{lf}}$ objets résiduellement de longueur finie de $\mathrm{Ban}(G)$ 31

$\mathrm{Bun}_G(X)$ ensemble des fibrés G–équivariants sur X 75

$\mathrm{Coad}(A)$ catégorie des A–modules coadmissibles 77

$\mathbb{C}_p = \hat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ 15

D algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}_p$ 15

$D(H)$ algèbre des distributions sur H 29

$D^\dagger = D^\dagger(V)$ (φ,Γ)–module surconvergent attaché à V 58

$D_{\mathrm{rig}} = D_{\mathrm{rig}}(V)$ (φ,Γ)–module sur l'anneau de Robba attaché à V . 58

$\mathscr{E}$ corps des fractions de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ . . . 31

$\mathscr{E}^\dagger$ corps des éléments surconvergents de $\mathscr{E}$ 57

F_∞ $\cup_n F_n$ 57

F_n $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ 57

G $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 16

Γ $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}_p)$ 31

$\mathscr{G}_K$ groupe de Galois absolu de K 20

$\mathscr{H}(H)$ algèbre de Hecke de H 23

$\mathrm{JL}(\rho)$ image de ρ par la correspondance de Jacquet-Langlands locale 23

LC *cf.* définition 4.15 (chap. 4) . . 80

$\mathrm{LL}(\pi)$ image de π par la correspondance de Langlands locale . . 22

$\mathrm{LP}(\mathbb{Q}_p^*, X)^\Gamma$ *cf.* définition 4.19 (chap.4) 82

$\mathrm{LP}_c(\mathbb{Q}_p^*, X)^\Gamma$ *cf.* définition 4.19 (chap.4) 82

$\mathscr{LT}_n$ n-ième étage de la tour de Lubin-Tate 74

M_{dR} $\left(M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \overline{\mathbb{Q}_p}\right)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$ 36

$\mathscr{M}_n$ n-ième étage de la tour de Drinfeld 17

$N_{\mathrm{rig}}(V)$ équation différentielle attachée à V 67

$\mathscr{O}_D$ unique ordre maximal de D 15

$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ complété p–adique de $\mathscr{O}_L[[T]][1/T]$ 31

Ω demi-plan de Drinfeld 17

P groupe mirabolique $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q}_p^* & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 80

∂ *cf.* théorème 3.19 (chap. 3) . . 68

$\Pi[0]$ *cf.* définition 3.1 (chap. 3) . . . 55

© Spartacus-Idh 2019

$\Pi[2]^*$ *cf.* définition 3.22 (chap. 3)..70

Π^{an} vecteurs localement analytiques de Π.....30

ϖ_D uniformisante de D.....15

$\Pi^{P-\mathrm{fini}}$ *cf.* définition 4.17 (chap. 4)..82

$\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ *cf.* définition 4.17 (chap. 4)..82

$\overline{\mathbb{Q}}_p$ clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ ... 15

$\breve{\mathbb{Q}}_p$ complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ ... 15

$\mathscr{R}$ anneau de Robba.....57

ρ représentation lisse irréductible de D^*.....23

$\mathrm{Sh}_n(K^p)$ courbe de Shimura de niveau $(1+p^n\mathscr{O}_D)K^p$.....41

Σ_n modèle $\mathbb{Q}_p$–rationnel de $p^{\mathbb{Z}}\backslash\mathscr{M}_n$.....17

St représentation de Steinberg lisse19

$\mathrm{St}^{\mathrm{an}}$ représentation de Steinberg localement analytique.....18

$\mathbf{T}(K^p)$ algèbre de Hecke complétée de niveau K^p.....48

V_f représentation galoisienne attachée à une forme modulaire f 46

$V(\Pi)$ image de Π par le foncteur de Colmez.....32

$\mathscr{V}(\rho)$ *cf.* définition 1.30 (chap. 1)..35

$\mathrm{WD}(V)$ représentation de Weil-Deligne attachée par Fontaine à V.....29

W_K groupe de Weil de K.....20

$\overline{X}$ unique $\mathscr{O}_D$–module formel spécial $\overline{X}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.....16

$X(K^p)$ variété de Hida de niveau K^p41

X^ρ $\mathrm{Hom}_{D^*}(\rho, X)$.....35

$\breve{\mathbb{Q}}_p$ anneau d'entiers de $\breve{\mathbb{Q}}_p$.....15

https://spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2019

Collection Les cours Peccot

dirigée par Pierre Cartier

Déjà parus

- *Approche duale des représentations du groupe symétrique.*
  Valentin Féray, janvier-février 2013.
  Préface de Pierre Cartier.

- *Théorèmes de de Finetti, limites de champ moyen et condensation de Bose-Einstein.*
  Nicolas Rougerie, février-mars 2014.

- *Graphical representations of lattice spin models.*
  Hugo Duminil-Copin, janvier-février 2015.

- *Autour de la correspondance de Langlands locale p–adique pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$
  Gabriel Dospinescu, mai 2015.
  Préface de Pierre Colmez.

À paraître

- *Quelques propriétés du mouvement brownien et de ses points multiples.*
  Jean-François Le Gall, 1989.

https://spartacus-idh.com

N° d'édition : mrm2-p-8
Dépôt Légal : décembre 2017
Achevé d'imprimer : décembre 2017

Imprimé en France par

AQUIPRINT

33520 Bruges
www.impression-edition-gironde.com