Rigueur

Mathématiques – Musique – Philosophie

Thierry Paul & Michael Schmidt

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2021

Spartacus Supérieur
Nouvelles visions des sciences

Rigueur

Mathématiques – Musique – Philosophie

Thierry Paul & Michael Schmidt

2020

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Spartacus IDH

La version en ligne de l'ouvrage permet d'accéder aux illustrations en couleurs. Il est également possible de les visionner à l'adresse et au code QR suivants :

https://spartacus-idh.com/liseuse/086/images

Un code QR est également présent au début de chaque texte contenant des illustrations en couleur.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

ISBN : 978-2-36693-086-3
© Spartacus-idh, Paris 2021

Sommaire

Présentation des auteurs **1**
La rigueur commune et diverse des mathématiques, musique et philosophie **3**

I Les différents moments de la rigueur du compositeur **7**
par Geoffroy Drouin

II Le jeu difficile entre rigueur et sens **21**
par Giuseppe Longo

III La rigueur en philosophie, de l'épistémologie à l'éthique **39**
par Jean Lassègue

IV Prouver et composer : quelques analogies **47**
par Frédéric Patras

V Formalisme, Exactitude, Rigueur **59**
par Jean-Louis Giavitto

VI Ondelettes et analyse multifractale : quelques interactions entre rigueur mathématique et les autres sciences **83**
par Stéphane Jaffard

VII Science et BD, comme sauvegarder la rigueur en situations extrêmes **99**
par Roberto Natalini

VIII Rigueur, technologie et perception **107**
par Núria Giménez Comas

IX La rigueur et l'esthétique cognitive dans le raisonnement mathématique **115**
par Gerhard Heinzmann

X Réflexions sur temporalité et langage comme rigueur dans le film *Porcile* de Pier Paolo Pasolini **125**
par Michael Schmidt

XI Fragments d'un questionnement amoureux : la rigueur en musique et philosophie interrogée par un mathématicien **147**
par Thierry Paul

© Spartacus-Idh 2021
www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2021

Présentation des auteurs

Geoffroy Drouin est compositeur et philosophe de la musique. Ses œuvres ont été programmées par les plus grandes institutions musicales internationales. Son domaine de recherche interroge la logique du musical adossée à la philosophie dialectique ainsi qu'à différents modèles issus de l'épistémologie contemporaine (émergence).

Giuseppe Longo est mathématicien et épistémologue. Son activité récente porte sur les relations entre mathématiques et sciences de la nature, visant une épistémologie des nouvelles interfaces par les corrélations historiques et des alternatives à la gouvernance de l'homme et de la nature par les algorithmes et des « méthodes d'optimalité » prétendument objectives.

Jean Lassègue est philosophe. Articulant épistémologie, anthropologie et histoire, ses recherches portent sur les médiations symboliques, en particulier les systèmes d'écriture des langues et des nombres, rendant possible l'élaboration collective des connaissances, des sciences exactes aux sciences de la culture.

Frédéric Patras est mathématicien et épistémologue. Ses travaux mathématiques portent principalement sur l'algèbre combinatoire et ses différents domaines d'application, de la physique théorique aux probabilités. En philosophie, il s'intéresse prioritairement aux processus de formation de la connaissance théorique.

Jean-Louis Giavitto est un informaticien passionné par les représentations du temps et de l'espace dans les langages de programmation. Il développe depuis une dizaine d'année, avec des compositeurs, des outils permettant de définir et de synchroniser les sons électroniques avec les sons instrumentaux.

Stéphane Jaffard est mathématicien. Son domaine de recherche est l'analyse harmonique, en particulier l'analyse temps-échelle (décompositions en ondelettes, analyse multifractale) et temps-fréquence. Il s'intéresse tout particulièrement aux interactions avec la physique, et le traitement du signal et de l'image.

Roberto Natalini est mathématicien. Ses principaux intérêts concernent les équations aux dérivées partielles, et leurs applications à la biologie, la conservation des monuments, la circulation routière, la dynamique des gaz. Il a aussi une intense activité de diffusion des mathématiques et de communication de la science à l'aide de bandes dessinées.

Núria Giménez Comas est compositrice. Elle s'intéresse aux outils informatiques utilisés en musique, en particulier pour le travail sur l'espace sonore et sa relation avec la perception du temps musical, ainsi qu'au lien entre texte, image et musique.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Les recherches de **Gerhard Heinzmann** portent sur la philosophie des mathématiques. Ses sphères d'intérêts concernent également les aspects systématiques de la philosophie de la connaissance, la philosophie grecque, l'histoire des sciences, l'empirisme logique et la philosophie du langage.

Michael Schmidt est philosophe. Le domaine de ses recherches se situe entre pensée allemande et philosophie française au siècle dernier, autour de la théorie critique et de la phénoménologie ontologique. Il a en particulier étudié la relation entre savoir et vérité dans l'écriture.

Thierry Paul est mathématicien. Ses recherches concernent principalement la théorie des équations aux dérivées partielles, et plus généralement les mathématiques de la physique quantique, mais aussi les connexions disciplinaires entre mathématiques, physique, philosophie et musique.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

La rigueur commune et diverse des mathématiques, musique et philosophie

Confronter les concepts de rigueur en mathématique, musique et philosophie (par ordre alphabétique) semble une gageure a priori, tant ces trois disciplines semblent avoir des rapports diverses au fait rigoureux. Cependant, la rigueur est présente dans chacune d'elles, car chacune d'elle a son propre langage, mais sous des formes, dans des espaces, en des temps divers, et chaque fois avec un statut différent.

Drôle de chose que cette rigueur qui ne se laisse que difficilement définir mais qui fait naître aussi l'expression d'une pensée disciplinaire non disciplinée, plaquant un curseur allant du concret le plus individuel au paradigme le plus globalisant.

Curseur dont la place dans les trois champs que nous considérons ici ne sera pas forcément là où on l'attendrait... Car si la rigueur est au cœur de la mathématique, elle ne la définit pas, ni ne la circonscrit. « [En mathématiques,] ce qui limite le vrai, ce n'est pas le faux, c'est l'insignifiant. » (1) Inversement, la musique, quelle que soit l'inspiration qui la motive, produit elle-même un discours, un discours rigoureux puisque transmissible, et d'ailleurs nécessitant de l'être, à un autre qui en connaît les règles : l'interprète. Quant à la philosophie, ne connaît-elle pas la rigueur que comme une sorte de dérive, à partir d'un sentiment de problématique, d'un frottement entre la pensée et le monde (textuel) ? On le voit, rigueur(s) il y a dans notre trinité, mais rigueur qui apparaît à chaque fois dans une dynamique face à quelque chose qui semble être sa négation, ou son « anti » : le sens mathématique est souvent dans une dynamique d'anti-rigueur, de même que la rigueur semble une anti-inspiration musicale, sans parler du frottement philosophique qui se situe entre une pensée rigoureuse et un monde qui ne l'est pas. Il s'agit donc d'une dynamique dialectique qui se résout toujours pour créer cette potentialité si forte que partagent nos trois disciplines.

Deleuze nous dit (2) : « la philosophie crée des concepts [...] et dès qu'on crée on résiste. ». Qu'on l'appelle concept (terme semble-t-il strictement réservé à la philosophie) ou non, la rigueur en mathématique, musique et philosophie ne serait-elle pas un acte de résistance ? Résistance de la science face à l'obscurantisme, résistance à l'abus trivial du matériau musical, résistance philosophique à la médiocrité de la parole publique.

Acte de résistance ou pas, la rigueur dans nos trois disciplines apparaît bien comme une source de puissance. Puissance du raisonnement logique, puissance de la forme en musique, puissance de l'interrogation en philosophie. Ce ne sont là que quelques exemples de l'intrusion de la rigueur dans le processus de création en mathématiques, musique et philosophie.

(1) René Thom, « Prédire n'est pas expliquer », Eshel 1991
(2) Abécédaire, R comme Résistance (et non, hélas, comme Rigueur).

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Si l'est une occurrence de la rigueur peu conventionnelle et souvent considérée à contresens, c'est bien celle qui la place face à l'esthétique. Le débat tourne alors court, se pétrifiant en une fausse image convoquant le formel versus le beau. Mais une telle débâcle ignore qu'il y a une vraie esthétique de la rigueur en mathématiques [3], une rigueur dans la façon d'honorer un matériau musical [4] et une rigueur de la réflexion philosophique. [5]

À l'opposé se trouve la distinction entre rigueur et formel, trop souvent identifiés. Les dégâts de cette identification en mathématiques furent, et sont encore considérables [6], la rigueur réduite au formel ayant perdu tout le sens qui fait sa beauté. Nul besoin d'insister sur le désastre formel, académique en musique, engendré par des définitions a posteriori de styles prétendument classiques et autres formes sonates. Sans parler des philosophies qui vont avec.

Mais alors, entre le formel et le beau, où, quand et en quelles circonstances se situe la rigueur dans nos trois disciplines ? Cela fait trois questions, qui n'ont aucune raison d'avoir la même réponse pour les trois domaines. Si maintenant on considère que ce questionnement est en fait un triplet de questions, alors les solutions vont de pair et l'on voit se profiler un triplet de réponses. Mais, tel certaines colonnes du cloitre de la romaine San Paolo fuori le Mura où se trouve la tête à trois visage qui orne la couverture de ce volume, c'est un triplet qui subit une torsion par rapport au triplet interrogatif : on interroge le temps et on répond l'espace, et vice versa. Où ? Toujours... Quand ? Partout... Comment ? Parce que partout et toujours..., en quelque sorte.

Quand ?

Rigueur et temporalité : Girogio Agamben montre [7] que le traitement du temps dans la culture monastique médiévale créé, à partir de la règle, une gestion du temps extrêmement rigoureuse qui n'a rien à envier à son pendant fordiste. Rigueur et temps sont donc depuis toujours liés par une relation de conditionnement réciproque. Temps de la preuve [8] logique mais aussi temps lors du processus de création en mathématiques [9] tout comme en musique mais dans un lieu temporel différent [10] Et dans une lecture philosophique du film *Porcile* de Pasolini peut-on voir comment le traitement rigoureux de la simultanéité de deux temps historiques distincts fait apparaître une troisième réalité les conditionnant en retour tous les deux [11].

(3) « Fragments d'un questionnement amoureux : la rigueur en musique et philosophie interrogée par un mathématicien », « La rigueur et l'esthétique cognitive dans le raisonnement mathématique », dans ce volume.

(4) « Les deux moments de la rigueur du compositeur », « Formalisme, Exactitude, Rigueur », dans ce volume.

(5) « Réflexions sur temporalité et langage comme rigueur dans le film *Porcile* de Pier Paolo Pasolini », « La rigueur en philosophie, de l'épistémologie à l'éthique », dans ce volume.

(6) « Le jeu difficile entre rigueur et sens », dans ce volume.

(7) Giorgio Agamben, « De la très haute pauvreté, Règles et forme de vie », Rivages, 2013.

(8) « Prouver et composer : quelques analogies », dans ce volume.

(9) « Ondelettes et analyse multifractale : quelques interactions entre les mathématiques et les autres sciences », « Fragments d'un questionnement amoureux : la rigueur en musique et philosophie interrogée par un mathématicien », *ibidem*.

(10) « Les deux moments de la rigueur du compositeur », « Fragments d'un questionnement amoureux : la rigueur en musique et philosophie interrogée par un mathématicien », *ibidem*.

(11) « Réflexions sur temporalité et langage comme rigueur dans le film *Porcile* de Pier Paolo Pasolini », *ibidem*.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Où ?

Dans *Porcile*, cette troisième réalité est philosophiquement un troisième lieu habitant un espace créé par la rigueur. Voilà bien la puissance de la rigueur en sa capacité, dans nos trois disciplines, à transformer des espaces (d´énoncés purement logiques, de notes seulement acoustiques, de concepts trop abstraites) en lieux, en leur permettant d'être habités de sens. Tout comme la rigueur de la construction de la (fausse) perspective chez Piero della Francesca habite bien plus l'espace que les personnages, qui semblent peints « après coup », si l'on peut dire.

Comment ?

Reste à situer en quelles circonstances apparaît la rigueur dans les trois domaines qui nous intéressent. Elle est au cœur des trois, sans l'épuiser bien sûr, par le seul fait, déjà, qu'ils ont en commun d'avoir tous leurs propres langages, empreints de règles, contraintes et syntaxes rigoureuses qui assurent la puissance de leurs discours. Mais, si en mathématiques comme en musique, mais aussi dans une moindre mesure en philosophie la transmission se fait, dans une première étape, entre pairs (exposés mathématiques (souvent trop) techniques, passage du compositeur à l'interprète, écoles de pensée philosophiques), la rigueur s'exporte néanmoins au niveau mathématique vers d'autres sciences [(12)] et d'autres publics [(13)], tout comme elle concerne aussi la perception musicale [(14)] par l'auditeur et interroge philosophiquement la connaissance [(15)].

On voit bien là la torsion déjà mentionnée : le temporel de la rigueur crée le spatial par le jeu des circonstances. Ne pourrait-on pas convoquer le vers atemporel d'Horace [(16)] pour évoquer la distance nécessaire que prennent nos trois disciplines par rapport au temps : on voit bien les circonstances se faire et refaire dans ce seuil entre rigueur et non-rigueur, ce moment et cet espace mystérieux où la non-pensée se transforme en pensée ?

Regarder la rigueur agir en mathématiques, musique et philosophie ne cesse de nous étonner et interroge sérieusement nos trois domaines quant à leurs rapports, divers mais toujours riches, avec leurs disciplines contraignantes propres. Contraintes qui assurent, par et grâce à une limitation du jeu des possibles, une formidable dynamique créative à l'opposé d'un académisme que la rigueur pourrait faussement laisser présager.

Rigueur partout, formel nulle part !

Thierry Paul, Michael Schmidt

(12) « Ondelettes et analyse multifractale : quelques interactions entre les mathématiques et les autres sciences », dans ce volume.
(13) « Science et BD, comme sauvegarder la rigueur en situations extrêmes », dans ce volume.
(14) « Rigueur, technologie et perception », dans ce volume.
(15) « La rigueur en philosophie, de l'épistémologie à l'éthique », *ibidem*.
(16) « Carpe diem, quam minimum credula postero", Horace, *Odes*, I, 11.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2021

Les différents moments de la rigueur du compositeur

Geoffroy Drouin

Résumé

Interroger le lieu de la rigueur dans l'acte de composition, tel sera le projet de notre parcours. Pour ce faire, nous partirons d'un fait admis ici comme ailleurs : la découverte précède la recherche ou, articulé en termes musicaux, le son *entendu* précède la note *écrite*. Ces deux activités disent bien les modalités respectives de leur donation : passive et reçue dans la première (autrement dit je reçois ma découverte, l'idée musicale qui fait office de détonateur pour mobiliser mon désir de composer), active dans la seconde (le processus de composition lui-même qui m'engage à prendre la mesure de mon matériau). Nous soutiendrons alors que le lieu de la rigueur pour un compositeur est bien dans ce rapport de la recherche à la découverte, du son entendu comme image sonore qui constitue la découverte initiale, à la note écrite, travail d'écriture et de composition lui-même. Ainsi composer avec rigueur, c'est honorer la découverte qui m'a été donnée de faire, comme de faire jouer les différents et multiple rapports catégoriels qu'elle a permis de mettre à jour, et dont les différents mouvements de recherche disent l'histoire de l'œuvre et au final son unité. Cette œuvre s'incarnera pour nous dans *Crispy Grain*, une œuvre personnelle pour trompette et électronique créée à l'Ircam dont nous déploierons la genèse pour confirmer notre propos.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 1. — Découverte et recherche.

« *La délibération volontaire est toujours truquée.* [...] *Motifs et mobiles n'ont que le poids que mon projet leur confère. Quand je délibère, les jeux sont faits. Et si je dois en venir à délibérer, c'est simplement parce qu'il entre dans mon projet originel de me rendre compte des mobiles par la délibération plutôt que par telle ou telle autre forme de découverte. Il y a donc un choix de la délibération comme procédé.* [...] *Quand la volonté intervient, la décision est prise et elle n'a d'autre valeur que celle d'une annonciatrice.* »

J.-P. Sartre, *L'être et le néant*, Paris, Gallimard, 1976, p. 527.

Ces mots de *l'Être et Néant* de Sartre disent bien le renversement à considérer dans l'acte créateur : la découverte précède la recherche, le mobile le motif, autrement dit pour un musicien, l'acte de composition volontaire n'a valeur que de m'annoncer à moi-même (et postérieurement aux autres) la décision ou découverte musicale initiale. S'expliquer à soi-même ce qui nous a musicalement mobilisé, c'est là le geste de composition. Dans un article précédent, nous avons eu l'occasion de nous arrêter plus longuement sur ces temps de la découverte et de la recherche, qui présentent une modalité, un lieu et une temporalité différentes [1]. Quand la recherche est volontaire, à la table de travail, et dans le labeur d'un temps long et étendu, la découverte initiale est passive parce que donnée, instantanée, fugace, et dans un ailleurs improbable. Le premier lieu de la rigueur est donc pour nous dans ce passage de ce couple irréductible et essentiel à tout projet de composition : découverte puis recherche. Interrogeons maintenant ces deux temps.

1.1 — Connaissance phénoménologique

Le premier, nous le thématiserons par *l'écoute*. Si cette découverte initiale est devenue le mobile de l'œuvre à venir, c'est que tout mon être y est mobilisé, à tel point que j'ai la sensation d'être pris par cette découverte, plus que c'est moi qui ne la prend. Ainsi donc, dès le départ, le mobile de composition se donne pour être reçu, préalable à son éventuel saisi que le second temps qu'est celui de la composition viendra incarner. Il me faut donc avant toute chose « faire connaissance » avec ma découverte, rentrer dans son intimité, m'y ajuster intentionnellement, par un mouvement d'empathie radical, créant les conditions de sa réception. Celle-ci a son lieu dans l'écoute, à entendre dans un sens élargi : écoute qui convoque certes la perception auditive (qu'elle soit externe ou interne), mais écoute *phénoménologique* qui tente aussi de pénétrer dans la chose donnée et d'en saisir la conscience personnelle la plus aboutie, préalable à toute connaissance intime. « Retourner aux choses elles-mêmes » [2], la réduction phénoménologique d'Husserl nous dit bien quelque chose de ce qui se passe ici pour le compositeur, dans ce premier contact qui lui fait découvrir sa découverte. Saisir l'essence de l'objet musical trouvé et donné, c'est bien le premier temps de rigueur auquel fait appel en lui-même le compositeur. Écouter dans l'intuition donatrice de l'objet jusqu'à l'avoir épuisé et consommé en totalité, c'est paradoxalement lui donner toute sa plénitude d'être, le faire tenir à égalité devant moi, dans un rapport d'être à être. Écoute silencieuse, parce qu'épurée de tout superflu, elle dit bien la puissance focale et la concentration empathique de la conscience qui cherche l'essence même de l'objet désiré. Parce qu'il a alors au terme de cette écoute acquis sa plénitude d'être, j'ai alors la possibilité de le connaître avec certitude. C'est ce que nous nommons le premier moment d'écoute, dont la rigueur tient à la *connaissance phénoménologique* que j'ai de l'objet musical.

(1) G. Drouin, « Trouver d'abord, chercher ensuite », in Alliage, *L'imaginaire dans la découverte* (70), Nice, juillet 2012, p. 85–94.

(2) E. Husserl, *Recherches Logiques*, t. 2, *Recherches pour la phénoménologie et la théorie de la connaissance*, trad. H. Elie, A. L. Kelkel & R. Scherer, Paris, PUF, coll. Épiméthée, 4e éd., 2002, *Introduction*, § 2, p. 6.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

1.2 — Connaissance analytique

Second temps, le travail de composition en lui-même. Parce que l'objet musical s'est donné à moi, en exhibant toute sa valeur, il s'agit maintenant d'en dérouler les différentes déterminations musicales, par un travail d'interprétation et de décomposition analytique. Décomposer en extrayant par paramètres musicaux les déterminations de mon objet, voilà enclenché le second temps qu'est la recherche. S'il s'agissait dans le premier de connaître phénoménologiquement l'objet dans l'intimité et le silence de ma conscience, c'est d'une connaissance analytique dont il question maintenant, où le mot vient apporter son soutien. Verbaliser en catégorisant musicalement l'objet, mettre des mots sur sa réalité musicale, c'est pouvoir l'interpréter en lui donnant sens. C'est aussi se donner la capacité de s'en saisir, pour le manipuler à loisir. Une fois posées toutes les composantes catégorielles de mon son, la combinatoire qui me permettra de le faire dériver et d'en créer des avatars m'est ainsi offerte. Décomposer, recomposer, le modèle d'analyse-synthèse rend bien compte de ce temps de la composition : il est ponctué par des allers-retours incessants entre l'unité de l'objet lui-même et ses différentes parties. C'est à proprement parler le temps du développement musical : rendre compte de ce parcours de recherche au sein de la partition, unifier ses différents moments dans un même projet, c'est raconter l'histoire de l'œuvre, la déployer et en laisser toute la trace à l'auditeur qui viendra la visiter.

Alors si comme l'écrit Roland Barthes, « le récit est une grande phrase, comme toute phrase constative est, d'une autre manière, l'ébauche d'un petit récit » (3), l'œuvre musicale achevée par sa double barre finale est cette grande phrase qui raconte ce temps de recherche et nous tient dans l'unité de ses différents moments. Analyser au plus près l'objet dans ses différentes parties, faire jouer leur association au sein de nouveaux, l'unité du projet musical tiendra à la rigueur mobilisée dans cette introspection analytique, tout autant que dans la recomposition qui en dérive.

1.3 — La rigueur du rapport

Si l'opération précédente de décomposition analytique relève en elle-même d'un temps discret, ponctué de moments qui exhibent les parties de mon mobile, l'ensemble du projet de composition s'inscrit quant à lui dans une dynamique, un flux continu qui ne cesse de mettre en rapport les différentes déterminations musicales mises à jour. Vieille leçon dialectique qui se rappelle à notre bon souvenir en exhibant sa réalité incontournable, les parties comme le tout ne sauraient s'appréhender isolément, mais nécessairement en rapport les unes à l'autre et vice versa : parties d'un tout, tout des parties, dès lors que le compositeur tient son mobile et les différentes déterminations musicales qui le composent, il n'aura de cesse d'opérer des allers-retours entre les différents niveaux d'organisation de son projet. Chacun de ces niveaux se laisse saisir selon ses propres catégories, et là encore, la verbalisation qui permet de tenir l'objet musical que l'on manipule à un certain niveau catégoriel est déterminante, et convoque à son tour un nouveau temps de rigueur. Plus cette

(3) R. Barthes, « Introduction à l'analyse structurale de récits », in *Poétique du récit*, Paris, Éd. du Seuil, 1977, p. 12.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

verbalisation catégorielle sera ténue et affinée, plus l'objet musical sera manipulé et travaillé avec finesse. Plus les relations d'un objet à un autre seront mises à jour et appréhendées rigoureusement, plus le projet de composition dans son ensemble se tiendra dans l'unité du dédale de la complexité de ses multiples relations et déterminations.

Nous le voyons clairement ici, les rapports qui se présentent au compositeur sont tout autant à l'intérieur de l'objet lui-même, qu'à l'extérieur, dans les relations et interactions qu'il entretient avec d'autres que lui.

> « *Producteur autant qu'il est produit, le rapport s'intègre dans un vaste réseau qui l'expose à un développement historique continu, sa réalité n'étant alors qu'un* moment, *qu'une forme stable momentanée dans un procès continu* »
>
> G. Drouin, *Émergence et dialectique en musique. Une approche transdisciplinaire de l'écriture musicale*, Sampzon, Delatour, 2017, p. 400.

Rapport interne — Ainsi la connaissance analytique évoquée plus haut relève-t-elle de ce premier niveau interne du rapport. Mettre à jour les différentes déterminations qui constituent de l'intérieur mon mobile, c'est bien travailler à l'intérieur de mon objet, déterminé comme un espace musical fermé et clôt sur lui-même. Le changement d'échelle opéré par l'école spectrale est à ce titre révélateur : « l'objet sonore n'est qu'un processus contracté, le processus n'est qu'un objet sonore dilaté » (4), citation qui rejoint singulièrement une autre de la tradition dialectique allemande : « le monde ne doit pas être considéré comme un complexe de choses achevées, mais comme un complexe de processus » (5). Un objet sonore appréhendé dans l'unité de son identité est en réalité le lieu interne d'un vaste réseau d'interactions sous-catégorielles dont il va falloir prendre la mesure en les mettant à jour. Ainsi un timbre est-il en réalité le théâtre interne d'interactions spectrales dynamiques, quand un geste musical à un autre niveau de complexité catégorielle est le lieu de plusieurs interactions paramétriques (timbre, mode de production de ce timbre comme les catégories classiques de hauteur, intensités et rythme).

Rapport externe — Mais parce que ce même objet en tant que rapport interne est nécessairement en rapport avec d'autres que lui qui, en retour, le déterminent en une certaine orientation, c'est, à autre niveau, une nouvelle saisie qui est appelée : « par nature, le rapport ne peut être conçu comme isolé : *tout rapport est rapport avec d'autres rapports*, formant avec eux un tout organique plus vaste et plus complexe » (6).

1.4 — Un réseau catégoriel

Apparaît donc ici la réalité de l'espace de composition dans lequel évolue le compositeur : un vaste réseau catégoriel qui dans ses différents nœuds

(4) G. Grisey, « Tempus Ex Machina », [1re éd. 1987], in *I Quaderni della Civica Scuola di Misoca* (27), giuno 2000, p. 44.

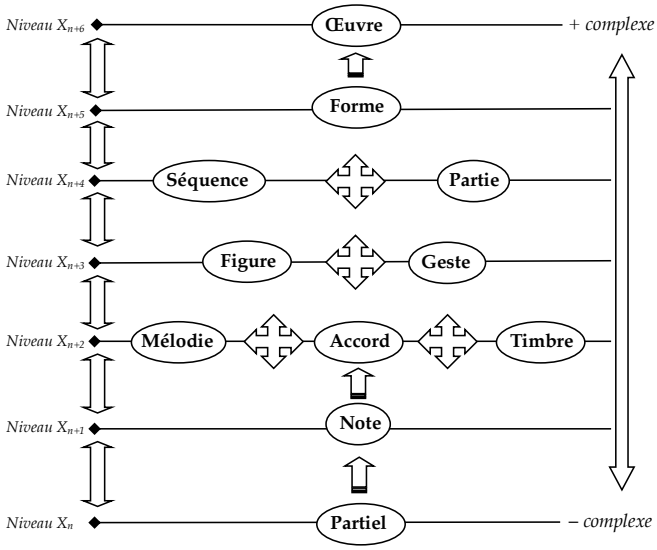
(5) K. Marx & F. Engels, *Études philosophiques*, anthologies, Paris, Éd. Sociales, (coll. Terrains), 1974, p. 211.

(6) L. Sève, *Une introduction à la philosophie marxiste*, Paris, Éd. Sociales, (coll. Terrains), 1980, p. 71.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

génèrent des formes et unités musicales à la fois autonomes en tant que constituées comme telles, tout autant qu'en interaction avec leurs plus proches. Le compositeur évolue dans ce dédale qu'il s'est construit lui-même, et c'est bien à lui de tenir et serrer au plus près ce vaste réseau morphologique, dont la plasticité permet de sauter d'une catégorie à une autre, d'un objet musical à un autre. Ainsi avons-nous proposé ailleurs un modèle qui permet tenir les niveaux structurels micro comme macro d'une œuvre musicale, dans ses dimensions verticales comme horizontales [7]. Signalons que ce découpage catégoriel est une proposition parmi d'autres, le réseau catégoriel musical étant marqué avant tout par une plasticité morphologique qui permet de nombreux niveaux intermédiaires.

Figure I.1. Une proposition musicale de réseau catégoriel [8].



1.5 — *Saut qualitatif*, *devenir* : la réalité dialectique de la logique du musical...

Élaboré sur un paradigme dialectique, ce réseau permet ainsi de rendre compte des interactions entre différents niveaux catégoriels comme à l'intérieur d'une même catégorie, ainsi que des sauts qualitatifs qui s'opèrent par la rencontre et le frottement contradictoire des différentes catégories entre elles. « À la fois *nié*, *conservé* et *élevé* à un plus haut degré de signification » [9], l'opération médiatrice que réalise la figure hégélienne de la *sursomption* permet de rendre compte du déplacement et de la progression au sein de ce réseau, quand celle du *devenir* s'affirme comme la trace de l'histoire d'une œuvre qui traverse ce réseau catégoriel dans la singularité des différents moments de son déploiement. Combinant tout autant continuité entre le passage d'une catégorie à une autre, que discontinuité dans la nouvelle catégorie qui s'affirme, ces sauts qualitatifs

(7) *Cf.* G. Drouin, *op. cit.*, p. 405.
(8) *Ibid.*, p. 405.
(9) G. Jarczyk, *Science de la logique Hegel*, Paris, Éd. Ellipses, (coll. Philo-œuvres), 1998, p. 35.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

permanents entre différentes échelles de composition peuvent prendre dans leur version la plus radicale la forme de l'*émergence*, exhibant alors des objets aux qualités sonores insoupçonnées et non prévues par le compositeur. Ainsi la rencontre de deux timbres dans certaines conditions de réalisation peut-elle conduire la perception à entendre un nouveau timbre dépassant en propriétés et qualités la simple addition des deux précédents, ainsi un flot polyphonique de hauteurs peut-il engendrer des figures thématiques non prévues (10). Mais l'important pour le compositeur est que tout se tienne dans l'unité d'un projet qui s'affiche tout autant dans la localité de ses différents moments que dans l'unité contradictoire qui les voit s'unifier globalement. Évoquer la Cinquième de Beethoven, c'est tout autant parler d'un objet musical qui s'affirme dans l'identité catégorielle d'une œuvre se tenant par elle-même, que d'évoquer à un niveau plus élémentaire les différents mouvements qui la composent, comme d'avoir en arrière fond l'intervalle de tierce qui traverse tout son développement thématique. Tous ces niveaux se tiennent et interagissent ensemble, et l'œuvre est bien en soi l'unité contradictoire de tous ces éléments, comme le moment local et instantané qui la traverse à travers l'écoute continue de la partition.

1.6 — ...confirmée par la perception

Si l'écoute de l'auditeur s'avère linéaire en apparence, elle saute en réalité elle aussi de niveau à niveau, et de temps à temps : *passé* dans la mémoire-matériau qu'elle se constitue, *présent* dans l'évaluation du matériau écouté par rapport à celui mémorisé, *futur* dans l'horizon d'attente quelle suscite à partir de cette dernière évaluation. Les modèles de perception témoignent ainsi de ces permanents retours de la perception entre les matériaux musicaux stockés en mémoire associés et comparés aux évènements musicaux présents, suscitant alors un horizon d'attente satisfait ou non suivant la stratégie du compositeur (11). Le compositeur comme l'auditeur qui vient à sa rencontre convoquent ainsi les mêmes couples contradictoires et antagoniques qui font et traversent l'écriture musicale : *permanence* et *variation*, *reconnaissance* et *distinction*, *identité* et *différence*, et c'est bien au cœur de ces rencontres contradictoires que se jouent l'intervention et le choix du compositeur. Ce mot d'Adorno vient alors confirmer notre proposition : « Toute musique articulée suppose ce retour extrêmement formel du Même ; l'identité dans la non-identité est son principe vital. » (12)

1.7 — Un nouveau régime de vérité

> « *J'entends par « musique informelle » une musique qui se serait affranchie de toutes les formes abstraites et figées qui lui étaient imposées du dehors, mais qui, tout en n'étant soumise à aucune loi extérieure à sa propre logique, se constituerait avec une nécessité objective dans le phénomène lui-même.* »
>
> T. W. Adorno, « Vers une musique informelle », in Quasi una fantasia, Paris, Gallimard.

(10) *Cf.* S. McAdams, « L'image auditive, une métaphore pour la recherche musicale et psychologique sur l'organisation auditive », *Rapports de recherche* (37), Ircam/Centre Georges Pompidou, 1985.
(11) *Cf.* J.-M. Chouvel, *Analyse musicale : Sémiologie et cognition des formes temporelles*, Paris, L'Harmattan, 2006.
(12) T. W. Adorno, « Vers une musique informelle », in *Quasi una fantasia*, Paris, Gallimard, 1982 pour la trad. française, p. 305.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

L'axiome musical à propos de ce qu'Adorno appelait « musique informelle » dit bien la nécessité du paradigme dialectique posé ici : parce que tout matériau musical contient en lui-même un système catégoriel en interaction, comme il entretient à l'extérieur un réseau de connexions relationnelles, ces rencontres et frottements produisent d'eux-mêmes les différents possibles de l'écriture musicale, en sont le moteur même tout comme le cœur de son engendrement et déploiement. Au compositeur d'unifier et de donner un sens à toutes ces potentialités qui s'offrent dans ces rencontres et déterminations musicales, et ce à différents niveaux de complexité catégorielle comme le montre notre proposition précédente. Ainsi la notion d'accident n'a-t-elle pas de raison d'être convoquée ici. Parce que ce réseau catégoriel est ouvert en-soi et contient tous les possibles, l'accident en constitue un parmi d'autres dans la progression catégorielle du mouvement du compositeur ; tout au plus est-il réductible à l'imprévisible, à un possible qui surgit et qui n'avait peut-être pas été jusque là intégré à la chaîne des déterminations successives. Il ne contredit en rien le régime de vérité de cette approche définie par la nécessaire médiation d'une rencontre contradictoire dont il faut bien sortir par telle ou telle détermination nouvelle, telle ou telle figure musicale nouvelle, tel ou tel objet sonore différent de sa précédente expression, ne serait-ce que par sa nouvelle position temporelle dans la partition. Si erreur il y a, celle-ci est de l'ordre du *manque* et de *l'absence* : manque de saisie de la réalité musicale d'un matériau sur lequel le compositeur s'engage, absence de saisie des liens et des potentielles relations qu'il peut déployer avec d'autres que lui, absence d'unité d'un projet par manque de ce geste qui tient et rassemble en lui-même tous les différents moments de son histoire, soit donc précisément... absence de rigueur.

S'il l'a sans doute incarné avec le plus d'excès, le compositeur Brian Ferneyhough est une figure symptomatique de cette approche compositionnelle qui peut être qualifiée de *spéculative*, au sens où la tension des rencontres contradictoires qui s'y opèrent en sont le moteur de production et de déploiement :

> « *Le télos de la dialectique consistant à engendrer l'unité sans escamoter les contradictions, les éléments divergents et disparates, se réalise dans toutes les dimensions : dans le style, dans la transition d'une œuvre à l'autre, dans le matériau précompositionnel et les principes structurants, dans la transposition de ces derniers, et enfin dans l'œuvre ; à l'intérieur de celle-ci dans les rapports entre moyens et finalité, entre matériau brut et matériau composé, entre ce qui est exposé et ce qui est développé.* »
>
> C.-S. Mahnkopf, « Vers une musique figurelle ? », in *Brian Ferneyhough*, *Contrechamps* (8), Paris/Lausanne, Éd. l'Âge d'Homme, févr. 1988, p. 57.

Si totalité il y a dans cette volonté de saisir l'ensemble de ce qui s'offre au compositeur par les tensions et forces qu'il fait jaillir dans l'espace compositionnel, celle-ci ne saurait être écrasante et prédéterminée. Tout au contraire, elle s'affirme elle aussi à un ultime niveau catégoriel comme un *moment*, dont l'identité est spontanément établie par toutes les forces qu'elle fait jouer aux niveaux catégoriels intermédiaires. C'est de là qu'un projet musical tire sa nécessité tout comme sa conviction musicale.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Connaissance *phénoménologique* pour prendre la mesure personnelle du désir de création à partir d'un mobile musicale donné, connaissance *analytique* pour en extraire les déterminations musicales et en proposer de nouvelles associations à travers l'écriture d'un projet musical, la rigueur mobilisée tient dans cet investissement et cette volonté de double connaissance. Le temps de la composition comme mise en rapport des déterminations mises à jour par le compositeur le fait entrer alors dans un second temps de rigueur : celui de serrer au plus près les rapports internes et externes de ses différents objets musicaux, au sein d'un vaste réseau catégoriel. Se dévoile ainsi la logique de progression qui parcourt et traverse ce réseau : celle de la dialectique, dans les rencontres contradictoires qu'il fait jouer, comme les sauts qualitatifs qu'il engendre.

Parcourons maintenant un témoignage personnel de ce dévoilement dans une œuvre pour trompette et électronique : *Crispy grain*.

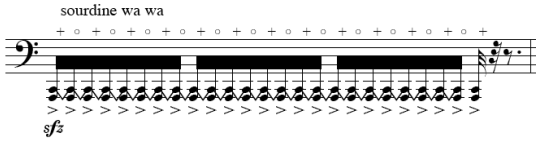
§ 2. — *Crispy grain* pour trompette et électronique (2004).

2.1 — La découverte et le mobile de l'œuvre

C'est un geste musical particulier qui s'est imposé comme mobile de cette œuvre. Après avoir passé une après-midi à enregistrer différents sons de trompette avec le musicien qui devait assurer la création de la pièce, la réécoute de l'ensemble de la session d'enregistrement m'a orienté sur un son singulier qui a particulièrement retenu mon écoute. Intrigué puis fasciné par la complexité qu'il recelait et avide d'en saisir le contenu (c'est donc bien lui qui initialement m'a saisi), c'est une écoute répétée jusqu'à en devenir parfaitement familier qui m'a alors permis d'en prendre connaissance. Lui donnant toute la mesure d'écoute qu'il en réclamait, je me suis ainsi ajusté à sa réalité musicale pour l'assimiler et lui donné toute sa plénitude musicale. « Connaissance phénoménologique » comme l'acte de « saisir l'essence de l'objet musical trouvé et donné » avons-nous dit un peu plus haut pour caractériser ce premier moment de rigueur. C'est bien ainsi que le chemin de prise de connaissance de l'objet musical découvert s'est déployé : la rigueur convoquée a bien été ainsi à hauteur de la familiarité que j'ai acquis avec cet objet. Si ce premier moment a comme lieu l'écoute, tentons néanmoins une description : il est dans un registre particulièrement grave (ce que l'on nomme les notes pédales, fondamentales de l'instrument) et inhabituel pour la trompette, en combinant à la fois l'ouverture et la fermeture rapides de la sourdine « wawa » (sourdine qui permet l'ouverture ou la fermeture du pavillon avec la main), avec un jeu aléatoire des trois pistons dans un flot continu de notes répétées, par la technique instrumentale du double détaché. L'ensemble sonne comme un continuum sonore nasillard et pulsé dans un registre très grave, une sorte de « didgeridoo » qui fait définitivement oublier le son de la trompette.

Voici son inscription solfégique dans la partition :

Figure I.2. Le mobile de l'œuvre.



Cette succincte description nous fait alors rentrer dans un nouveau lieu : celui de l'analyse.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

2.2 — La recherche

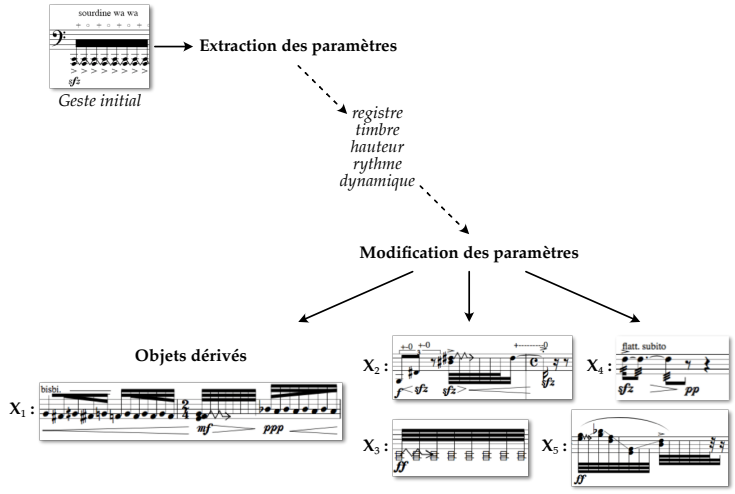
Le mobile de l'œuvre et sa décomposition analytique. Nous l'avons vu, ce geste qui constitue le mobile initial de l'œuvre est caractérisé par une association de plusieurs modes de jeu, dont chacun renvoie à un paramètre musical différent. Ainsi l'utilisation constante des notes pédales dans l'extrême grave de la trompette correspond au paramètre du *registre*. La succession rapide des ouvertures et fermetures de la sourdine « wawa » va agir sur le paramètre du *timbre*. Le jeu aléatoire sur les trois pistons de l'instrument affecte celui de la *hauteur*. Le mode de jeu en notes répétées (technique du « tktkt ») concerne le paramètre du *rythme*, quand les accents et l'indication *sfz* se rapportent à la *nuance*. Voici donc synthétisé ce geste musicale à travers ses différents modes de jeu et paramètres respectifs :

Figure I.3. La décomposition analytique du mobile.

Modes des jeu	**Paramètres**
Notes pédales	*Registre*
Ouverture/fermeture sourdine	*Timbre*
Jeu aléatoire des pistons	*Hauteur*
Notes répétées	*Rythme*
Accents/*sfz*	*Dynamiques*

Le temps de la composition. Une fois cette décomposition analytique réalisée, il est alors possible de récréer l'objet musical initial en modifiant au gré du projet de composition certains paramètres. Nous reconnaissons ici un modèle classique d'analyse/synthèse, qui à partir de la décomposition analytique d'un objet en ses différents paramètres permet une resynthèse de ce dernier avec la possibilité de créer toute une famille d'objets dérivés par une modification quelconque d'un ou plusieurs de ses paramètres :

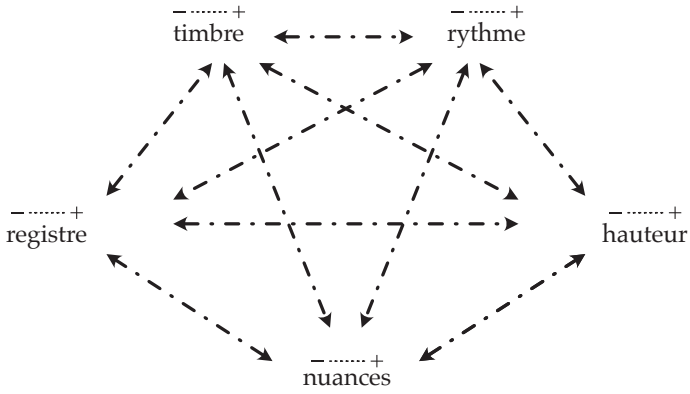
Figure I.4. Un modèle d'analyse/synthèse.



© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

C'est ici que rentre alors la phase de composition à proprement parler, et qui précisément donnera sens et cohérence à l'œuvre. La rigueur convoquée ici tient à la capacité du compositeur à serrer au plus près l'analyse de ses différents objets manipulés et d'en exhiber le lien dans un déploiement temporel cohérent. À cette fin, nous avons créé un algorithme procédural sur un modèle opérateur/contrôleur qui permet d'agir sur chaque paramètre en modifiant sa valeur (sur une échelle de $-$ à $+$) tout en mettant en relation chacun d'entre eux. On imagine alors le potentiel combinatoire qu'un tel objet peut offrir, restant à charge du compositeur de lui donner sens dans le déploiement temporel de la partition :

Figure I.5. L'algorithme procédural sur un modèle opérateur/contrôleur.

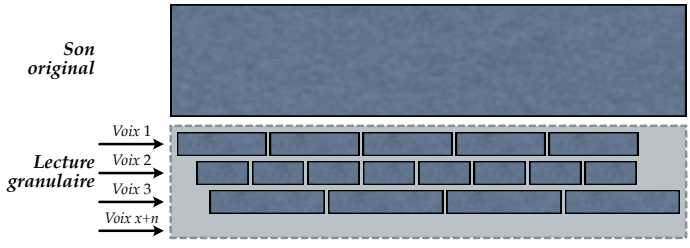


C'est au sein de cet algorithme que les rencontres des multiples figures musicales vont s'entrechoquer pour en mettre à jour de nouvelles, comme sauts qualitatifs d'un frottement qui appelle une résolution. Toutes ces rencontres contradictoires, toutes les nouvelles figures mises à jour vont constituer ainsi les différents moments de l'œuvre, et la partition finale en incarne alors l'histoire et la trace de leur engendrement.

L'électronique. La partie électronique s'est vu investie du même travail. Deux objets principaux vont ainsi constituer le traitement électronique : un granulateur et un travail de modulation de fréquence.

Arrêtons-nous pour commencer sur le premier. Un granulateur est une méthode de lecture par synthèse qui décompose un son en très petites unités (quelques millisecondes) sur plusieurs voix, chaque voix de grains différents étant superposée l'une sur l'autre, l'oreille recomposant alors la globalité du son.

Figure I.6. Le granulateur.

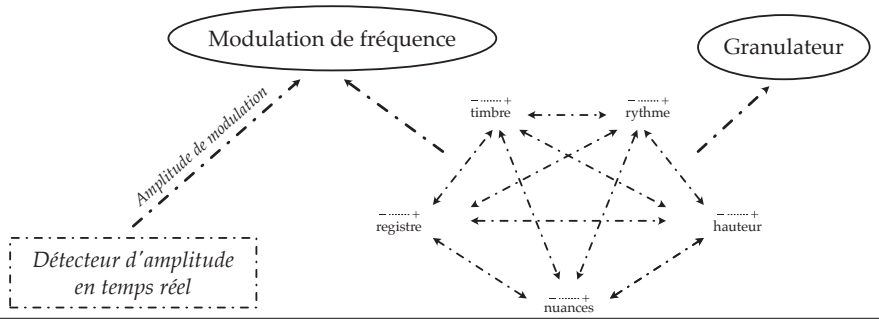


© Spartacus-Idh 2021
www.spartacus-idh.com

Le choix du granulateur a été motivé par le fait qu'il renforce les caractéristiques de notre son original, en mettant particulièrement en valeur son aspect pulsé ainsi que sa complexité sonore. Par ailleurs, l'algorithme procédural décrit plus haut a pu lui être appliqué au sein d'un interface informatique, l'ensemble de ses paramètres étant facilement contrôlables sur le granulateur. C'est ainsi qu'à l'instar de la partie de trompette, toute une gamme de sons électroniques dérivés du son initial a pu être générée, prolongeant et amplifiant le jeu de l'instrumentiste.

Second principal objet de la transformation électronique, la modulation de fréquence permet de synthétiser facilement un son de trompette. Elle a été utilisée ici à cette fin, mais amplifiée et démultipliée pour créer des nappes harmoniques qui constituent ainsi l'orchestration harmonique du jeu du trompettiste. Par ailleurs, pour affiner un peu plus l'interaction entre l'électronique et le musicien, la valeur d'amplitude du jeu du trompettiste est récupérée en temps réel et en continu pour constituer l'indice de modulation de la partie électronique. Au final, l'électronique réagit comme une caisse de résonnance particulièrement fine et réactive au jeu du trompettiste qui le contrôle par son interprétation personnelle. Enfin, l'algorithme procédural décrit plus est là aussi venu se greffer sur le travail de modulation d'amplitude pour créer toute une grammaire de sons telle qu'elle a pu être élaborée dans la partition du trompettiste.

Figure I.7. Le traitement électronique.



Si l'électronique assume ici clairement la fonction d'orchestration d'une partition soliste incarnée par le jeu du trompettiste, il participe également de son écriture, rejoignant ainsi le dédale des rencontres des différents objets musicaux mis à jour dans l'écriture de la partition. Sans doute plus spontanément que l'écriture purement instrumentale, par la richesse et la puissance de traitement qu'il convoque, l'électronique est parfois le lieu de phénomènes d'émergence dans ces différentes rencontres : des timbres inédits et non prévus initialement par le compositeur se dévoilent alors, à charge pour le compositeur de les identifier et de créer les conditions de leur reproduction [(13)].

(13) *Cf.* G. Drouin, *Émergence et dialectique en musique op. cit.*

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ — Conclusion.

Composer avec rigueur, c'est donc honorer autour du mobile de mon œuvre ces deux temps qui convoquent deux modalités différentes mais complémentaires : le temps initial de la prise de connaissance du mobile de mon œuvre à venir et le temps de l'analyse qui le décompose pour mieux recomposer. Le premier a son lieu dans l'écoute du mobile, écoute intérieure comme extérieure, dont la répétition à satiété atteint son objectif une fois la familiarité avec ce dernier définitivement installée, une fois sa réalité musicale phénoménologique définitivement acquise. Peut alors commencer le second temps, celui de l'analyse qui lui a son lieu dans la raison. Catégoriser la réalité musicale de mon objet en posant verbalement ses différentes déterminations musicales, c'est alors tout un travail de recherche qui se déploie et offre en même temps un répertoire de nouvelles réalités musicales dont la recomposition et l'unité formeront le chemin et la forme de l'œuvre finale. Connaissance phénoménologique puis connaissance analytique, c'est en serrant au plus près les multiples rapports de mes différents objets musicaux que la rigueur de mon projet en assurera l'unité et la force de conviction musicale.

§ — Bibliographie.

Adorno T. (1982). « Vers une musique informelle » dans *Quasi una fantasia*. Paris, Gallimard, 1982 pour la trad. française, p. 288–340.

Barthes R. (1977). « Introduction à l'analyse structurale de récits », in *Poétique du récit*. Éd. du Seuil, Paris.

Chouvel J.-M. (2006). *Analyse musicale : Sémiologie et cognition des formes temporelles*. L'Harmattan, Paris.

Drouin G. (2012). « Trouver d'abord, chercher ensuite », in Alliage, *L'imaginaire dans la découverte* (70), p. 85–94.

Drouin G. (2017). *Émergence et dialectique en musique. Une approche transdisciplinaire de l'écriture musicale.* Sampzon, Delatour.

Grisey G. (2000). « Tempus Ex Machina », [1re éd. 1987], *I Quaderni della Civica Scuola di Misoca* (27) [*les Cahiers de la Civica Scuola di Musica*], p. 36–47.

Grisey G. (1991). « Structuration des timbres dans la musique instrumentale », in *Le timbre, métaphore pour la composition*. Paris, Ircam/Christian Bourgois, (coll. « Musique/Passé/Présent »), p. 352–385.

Husserl E. (2002). *Recherches Logiques*, t. 2, *Recherches pour la phénoménologie et la théorie de la connaissance*, trad. H. Elie, A. L. Kelkel & R. Scherer. PUF, coll. Épiméthée, 4e éd, Paris.

Jarczyk G. (1998). *Science de la logique Hegel*. Paris, Éd. Ellipses, (coll. Philo-œuvres).

McAdams S. (1985). « L'image auditive, une métaphore pour la recherche musicale et psychologique sur l'organisation auditive », *Rapports de recherche* (37), Ircam/Centre Georges Pompidou.

Mahnkopf C.-S. (1988). « Vers une musique figurelle ? », in B. Ferneyhough, *Contrechamps* (8). Paris/Lausanne, éd. l'Âge d'Homme.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2021

Sève L. (2005). « De quelle culture logico-philosophique la pensée du non-linéaire a-t-elle besoin », in *Émergence, complexité et dialectique.* Odile Jacob, Paris.

Sève L. (1980). *Une introduction à la philosophie marxiste*. Éd. Sociales, coll. Terrains, Paris.

Sartre J.-P. (1976). *L'être et le néant.* Gallimard, Paris.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2021

Le jeu difficile entre rigueur et sens

Giuseppe Longo

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Résumé

La rigueur est dans le numérique, nous dit Pythagore, dans les règles de l'arithmétique, des algorithmes ; le numérique constitue le sens du monde car il lui est intrinsèque. Ensuite, chez Euclide, on retrouvera le sens dans le geste qui trace la ligne sans épaisseur, un bord qui découpe les figures du monde — abstraction, symbole, action rigoureuse, construction de diagrammes qui évoquent un sens organisateur du réel. Le débat reprend aujourd'hui entre, d'une part, le cerveau et le biologique, aplatis sur la rigueur exacte de l'alpha-numérique, les codages modernes, et, de l'autre, leur sens dans un corps, organisme actif dans un écosystème, jeu de contraintes qui produisent une hétérogenèse du sens.

§ 1. — Les harmonies brisées du nombre.

Suites harmoniques de nombres entiers, correspondances parfaites entre musique et formes des rangements des nombres — rectangulaires, triangulaires, pentagonaux,..., moyennes harmoniques à l'appui, un univers parfait permet la connaissance et la production du beau. Sens et rigueur vont de pair à l'époque où la Grèce invente, en même temps, la philosophie, la monnaie et les mathématiques (Herrenschimdt, 2007). Les catégories de la philosophie rendent le monde intelligible ; la monnaie donne à toute chose une valeur, en tant qu'équivalent général, elle catégorise tout objet, toute activité ; les entiers et leurs rapports mathématiques sont la mesure de toute chose, exactement, ils en sont l'essence.

Et puis... la catastrophe : le logos parfait du nombre entier produit l'a-logos, l'irrationnel, au cœur même de la perfection du carré unitaire : sa diagonale produit un nombre, $\sqrt{2}$, démontrablement en dehors de la raison arithmétique, des rapports entre nombres entiers. La légende nous raconte la mort, fort méritée, de l'impie qui avait montré ce paradoxe à l'intérieur même des automatismes du calcul numérique, de la doxa pythagoricienne des mesures exactes et complètes du monde, contre la rigueur du nombre entier et de ses rapports, des harmonies célestes et musicales (Chiurazzi, 2018).

Quel est le sens de cet insensé ? Comme toujours face aux grands résultats négatifs, la raison s'élargit, elle va inclure le geste qui trace, produit la ligne, ré-introduit du sens, en évoque par des diagrammes (Panza, 2012). Les symétries, des jugements spatiaux sans nombres, fondent la géométrie, car les axiomes d'Euclide maximisent les symétries des constructions entendues, par des gestes, des tracés sur le plan, riches de sens (Longo, 2011). Les symétries sont « derrière » les axiomes : leur structure de sens géométrique précède l'écriture des axiomes et en est davantage stabilisée [(1)]. Cette nouvelle théorie générale de la mesure des surfaces bornées trouve son sens mathématique, et sa rigueur, dans ce qui deviendra la définition bêta de la géométrie euclidienne : le ligne est sans épaisseur. Voilà la notion mathématique de bord, conceptuellement profonde, qui permet de mesurer des surfaces sans approximation, exactement, grâce à une nouvelle rigueur du voir. « Théorème » a la même racine que théâtre : à la logique s'ajoutent, chez Euclide, symétries, rotations et translations, des gestes dans la preuve.

La géométrie donc s'invente dans un jeu difficile entre trace imaginée et produite et langage : seulement par le geste du premier maître, dans l'espace, sur le sable, on peut comprendre ce que c'est qu'une ligne continue, une trajectoire, un bord ; seulement dans le langage on peut dire : « cette ligne que je trace est sans épaisseur », elle est juste le bord d'une figure, une trajectoire indépendante de l'objet qui la parcourt. Elle est un invariant de la pensée, car constitué par plusieurs actes d'expérience : les gestes, les traces sur une surface, et les mots. L'écriture fige définitivement cette nouvelle forme de l'imaginaire mathématique. Et c'est seulement en arrivant à concevoir, avec rigueur, la notion mathématique de bord, que l'on peut observer que le calcul de π ne termine jamais : les suites des polygones inscrits et circonscrits n'atteignent jamais le bord sans épaisseur d'un cercle, une limite asymptotique.

La méthode axiomatique et la déduction logique sont bien nécessaires à la rigueur de la preuve chez Euclide, mais le sens réside tout d'abord dans cette invention de la toute première et fondamentale structure mathématique : la ligne sans épaisseur. Le point et ses propriétés en suivent : il est, en premier lieu, un « semeion », un signe, en fait une lettre — Démocrite avait déjà noté les atomes, des indivisibles, par des lettres de l'alphabet. Ces signes se trouvent aux extrêmes d'un segment (définition gamma), à l'intersection de deux lignes sans épaisseur (théorème 1, livre I). Donc le point n'a pas de parts, explicitera-t-on six siècles plus tard (définition alpha).

Dans la preuve du théorème I.1, ces lignes sans épaisseur, en tant que gestes, trajectoires, bords, sont des tracés continus, sans saut ni lacunes, dans lesquels se perdrait la flèche de Zénon ; elles produisent donc un point et un seul lors de leur intersection — une évidence pour toute pensée qui trace, comme chez Euclide. Du même coup, cette intersection non vide définit la continuité de telles lignes : une ligne sans épaisseur est continue quand elle produit toujours un point et un seul, lors de l'intersection en de bonnes conditions d'une autre ligne sans épaisseur. Le rêve formaliste d'une transparence parfaite de la preuve, de pouvoir distiller toute notion utilisée, toute définition implicite, au

(1) « L'évidence primaire ne doit pas être échangée avec l'évidence des « axiomes » ; puisque les axiomes sont déjà le résultat d'une formation originaire de sens (Sinnbildung) et ils ont déjà cette formation elle-même toujours derrière eux » (Husserl, L'origine de la géométrie, 1933).

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

moins a posteriori, se heurte contre la richesse des mathématiques, toujours enracinée dans une pratique historique du sens, toujours évocatrice de sens pour celui qui écoute ou lit — sans cela elles seraient incompréhensibles. Le prix à payer pour cette participation au sens est la « rigueur informelle », le jeu inévitable des ambiguïtés qui évoquent, qui côtoient toujours le partage d'une construction rigoureuse mais sensée.

En conclusion, quelle amputation du savoir que de nous avoir raconté, pendant un siècle, qu'Euclide était l'« inventeur de la méthode axiomatique », un prédécesseur d'Hilbert aux preuves souvent peu rigoureuses, mal formalisées [(2)]. Et que d'avoir ainsi oublié, par idéologie formaliste, l'invention d'un sens mathématique nouveau, celui des structures fondatrices de la pensée mathématique occidentale : la ligne sans épaisseur tracée par des gestes signifiants à l'intention de tout autre humain, les symétries qui participent de la preuve. Ces structures résultent du regard qui organise le réel, le découpe en imposant des bords, le rend mathématiquement signifiant par la recherche des invariants des rotations et des translations du plan, les symétries fondamentales de la construction géométrique.

§ 2. — Les mathématiques sont abstraites, symboliques, rigoureuses... au-delà des axiomes, derrière les axiomes.

« *It is sometimes said that the axiomatization problem is to generate the set of valid statements. But this is a logician's parody of the role in mathematics of genuine axiomatic theories.* »

Kreisel, 1971

2.1 — Abstraites

Les mathématiques sont abstraites, nul n'en doute. Il est toutefois impossible de définir de façon parfaitement nette et adéquate ce que veut dire « abstrait » en mathématique, car cela reviendra à saisir, très probablement, la notion générale d'abstraction, une tâche impossible. Limitons nous a souligner certains parcours constitutifs de l'abstraction mathématique, en nous focalisant sur le rôle de la construction d'invariants.

Les mathématiques s'enracinent sur des gestes constitutifs de ses objets et structures, des gestes qui précèdent la preuve, partagés par tous les humains, car communs aussi à certains animaux.

Le « petits comptage » (Dehane, 1997), c'est à dire la saisi d'un petit nombre d'objets, permet à nombreux animaux d'isoler des invariants *pratiques :* distinguer six bananes de huit, indépendamment de leurs organisation spatiale ; comparer six rugissements entendus à distance avec les quatre lions vus dans son propre groupe et... prendre la fuite face au groupe plus nombreux. Sans

(2) Voir la critique des prétendues incomplétudes formelles dans la preuve du théorème I.1 ainsi que les notes et commentaires dans l'incontournable traduction des livres d'Euclide par (Heath, 1908) : Euclide, comme « hilbertien », n'était pas très bon. Or, une preuve est toujours et aussi une construction *historique* de sens.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

langage, l'invariant numérique est pratiqué et vécu, il n'est pas constitué, il ne produit pas un concept, le concept de nombre.

Pour Brouwer, fondateur de la logique intuitionniste, l'expérience de la « two-one-ness of time » est au cœur de ce parcours constitutif : un instant qui suit un autre, la scansion discrète du temps. Cela paraît confirmé empiriquement par des interactions entre la numérotation et les jugements temporels (Xuan et al., 2007). Toutefois, pour produire un invariant conceptuel, il faut développer différentes « pratiques » : le comptage dans le temps, certainement, des sons par exemple, mais aussi dans l'espace, des objets, en comparer la numérosité, comme plus haut chez maints animaux, peut permettre la constitution de ce qui est indépendant de chacune de ces expériences actives, qui est propre à toutes. Dans le langage, nous produisons le concept de nombre, un invariant par rapport aux transformations d'une expérience à une autre, d'une notation à une autre (qui peut même se stabiliser dans des traces cérébrales, *conséquences* d'une pratique, (Jacob, Nieder, 2009)). En continuant sans s'arrêter, dans l'espace, ces gestes constitutifs de l'ordre, on fixe une direction, un bon ordre, une ligne numérique que toute personne « numérisée » *voit* : on pense les nombres sur une ligne imaginée (Zebian, 2005). Bien évidemment, ces gestes qui organisent le monde précèdent, et de loin, toute axiomatique : ils la « fondent ».

De même, les saccades qui précèdent et anticipent l'agression d'une proie par un prédateur pour en permettre la saisie, la fuite de la proie, tracent une trajectoire, même si c'est la très difficile « courbe de poursuite » (Berthoz, 1997). Comme le joueur de tennis qui précède la balle qui arrive, par les yeux, leurs saccades, par le mouvement de tout son corps. À cet égard, Teissier (2005) propose la notion d'« isomorphisme » de Poincaré-Berthoz. Il s'agit d'une transformation « isomorphe » qui corrèle/identifie les saccades oculaires, la ligne visuelle (qui comprend la direction détectée et anticipée par le cortex primaire) et la « ligne vestibulaire » (la stabilité inertielle du corps, guidée par le système vestibulaire et qui contribue à la mémorisation et à la poursuite du mouvement inertiel) ; cet isomorphisme constitue un invariant par rapport à différentes expériences actives.

La trajectoire-ligne imaginée, puis tracée et décrite dans les mots, saisit donc cet invariant pratique, cognitif ; le langage, la pratique du dessin, l'associe à l'invention des bords, comme ceux tracés par nos ancêtres dans les caves de Lascaux, les bords d'un bison, d'un cheval, une ligne, comme plus tard dans les peintures en Égypte, en Crète. Voilà une analyse possible du parcours constitutif de cette fondamentale abstraction mathématique grecque : la ligne sans épaisseur, une idée hors du monde, un geste asymptotique à la limite du monde, mais profondément enraciné dans le monde, dans nos pratiques qui lui donnent un sens, qui permettent des découpages organisateurs du monde par cette idée fondatrice, paradigme de la rigueur maximale des mathématiques. Sa position axiomatique, la définition explicite n'en sont que l'aboutissement. Dans la preuve, l'évocation du sens qui précède l'axiomatique sera une composante essentielle du raisonnement, comme dans le Théorème I.1 d'Euclide, mais on y reviendra.

Bien évidemment, ces gestes primaires, ces actions dans l'espace et le temps, ne sont que des *conditions de possibilités* pour que l'on arrive à l'abstraction

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

mathématique ; on les partage avec maints animaux et donc, a fortiori, potentiellement avec tous les humains — voilà l'universalité relative, potentielle des mathématiques. Celle-ci résultera, deviendra actuelle dans notre culture, grâce aussi aux croisements de traditions diverses, grecques, arabes, chrétiennes – comme l'infini en acte du Dieu des chrétiens (Zellini, 2005). Histoires variées, chacune stabilisant différents invariants conceptuels, spatiaux, algébriques, asymptotiques... comme le montre la variété des symboles et des formes, picturales et mathématiques, de l'infini (Longo, Longo, 2020).

2.2 — Symboliques

Les mathématiques sont symboliques. Le symbole, « sym-bolon » (symballein), réuni, regroupe, unifie différentes formes du sens. Il est un geste évocateur, par le signe *signifiant*, une synthèse de différentes références de sens, comme les logogrammes que nous utilisons pour les nombres. Ces derniers évoquent, « réunissent », le comptage, le passage du temps, disions nous, le geste itéré dans l'espace.

Les symboles mathématiques proposent, par l'écriture ou le dessin, l'invariant au cœur de l'abstraction. Le même, pour, par exemple, les différentes expériences actives du nombre mentionnées plus haut. Le symbole n'est pas un signe formel, une marque sans sens sur le papier, manipulable par une machine suivant une règle purement syntactique. Son rôle dans la conceptualisation, dans la preuve, requiert une référence au sens, à l'ordre, aux symétries, même dans la preuve (Longo, 2011a). Son écriture, sa trace diagrammatique, tout comme le dessin d'une ligne, sont rendus possible par la faculté principale de la mémoire animale : l'*oubli* sélectif, actif. Dans l'action, on retient ce qui compte pour une action future — car la mémoire animale est là pour rendre possible l'action future, voila son rôle évolutif. Peu importent les détails du contexte pour la capture d'une proie, on doit seulement se souvenir des caractéristiques de sa trajectoire, des invariants qui comptent. Ensuite, on évoquera dans la mémoire ce qui nous sert pour la nouvelle action. Notre mémoire sélective lors de l'action et, à nouveau, lors de son itération dans un contexte différent, permet la constitution de l'invariant. Son explicitation dans le symbole, le signe, le dessin abstraits, suivra. L'invariance produite par l'intersubjectivité, dans le langage et dans le geste partagé, en est au cœur.

Le symbole est la voie fondamentale de l'abstraction mathématique et, une fois ainsi posé, il acquiert une autonomie. Par exemple, la première forme symbolique de l'infini actuel, le point projectif de la peinture italienne (Panofsky, 1927) a une origine théologique dans les Annonciation du XIV^{e} siècle (Damish, 1987 ; Arasse, 1999 ; Longo S., 2013). Il devint, à partir du XV^{e} siècle (Piero della Francesca, Alberti ...), une technique pour l'organisation de l'espace en peinture (Simon, 2001 ; De Risi, 2012 ; Longo, Longo, 2020). Au XIX^{e} siècle, quand Cantor osa poser ω, symbole de l'infini, il pu le manipuler algébriquement et construire les suites $\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega, \ldots, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$ en lui donnant ainsi un sens arithmétique nouveau par des opérations sur le symbole même. Rien ne stabilise mieux un signe, dans son rôle de symbole mathématique, que son usage dans une pratique (symbolique). Avec Gentzen (1935), il acquit un rôle dans la preuve. L'axiomatique ne fera que suivre ce mouvement de stabilisation scripturale et d'action sur un concept-symbole.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

2.3 — Rigoureuses

Les mathématiques sont rigoureuses. La vraie rigueur mathématique ne peut être qu'évocatrice du sens, par ce biais elle ne peut être que « informelle », disions-nous. Un formalisme sans sens, dont l'efficacité est seulement basé sur une manipulation de signes, indépendamment du sens, tombe facilement, rigoureusement, dans l'absurde. Dès que Frege, qui avait pensé une Logique enracinée sur le sens (les règles pour l'implication et la quantification), essaya de formaliser la Théorie cantorienne des ensembles, on en dériva facilement une contradiction, sorte de blague à raconter chez son barbier, surtout s'il ne rase que les incapables de se raser tout seuls — une blague dont raffolent les philosophes logicistes, voire le seul paradoxe dont ils parlent. La solution fût immédiate : deux types, classes et ensembles. Plus profondément, Frege avait oublié que les mathématiques sont « typées » — ça fait partie de leur construction de sens : on déclare où, sur quel ensemble et univers, une fonction est définie, à valeurs dans quel ensemble. On spécifie donc les univers de définition des fonctions et des ensembles. Et 30 ans plus tard, en 1932, quand Church pensa un calcul de fonctions qui s'appliquent à elles-mêmes, en tant que pur formalisme calculatoire, sans types et sans sens, voila le paradoxe de Curry, une écriture plus technique d'une circularité contradictoire. Pour contourner la contradiction, il faudra ré-insérer les types, (Church, 1941), une forme de déclaration du sens, ou limiter le jeu simultané de l'auto-application et de la négation (Barendregt, 1984), se souvenir de leur sens. Cela donnera un système de calcul très expressif et intéressant, grâce aussi à l'« opérateur paradoxal » de Curry, dont on trouvera un nouveau sens dans des espaces topologiques originaux, voir (Amadio, Curien, 1998 ; Longo, 2004) pour des synthèses. Et encore : dès que Martin-Löf (1971) inventa un univers formel de Types, lui-même un Type, voila le paradoxe de Girard (Coquand, 1986), invention complexe qui explicite une bogue profonde ainsi que l'expressivité de ce formalisme et de ses variantes aux interprétations riches d'applications surprenantes (Arndt, 2011), une fois « réparé » par la référence au sens (Martin-Löf, 1984).

En conclusion, chaque fois qu'on a cru pouvoir s'émanciper du sens en proposant la rigueur parfaite d'un formalisme pur, sensé fonder les mathématiques, on a engendré des blagues mathématiques, voire des contradictions techniquement intéressantes, qui ont montré l'insensé dans le jeu des formalismes, explicité leurs limites et ouvert la voie à des excellentes mathématiques. Après avoir retrouvé la cohérence et du sens, ces dernières serviront surtout à encadrer les langages de programmation, les calculs des ordinateurs, voire à proposer des nouvelles structures mathématiques. On ne trouve pas, au XX^{e} siècle, autant de naufrages logiques dans les mathématiques inventées et pratiquées dans le sens, bien en amont de toute axiomatisation formelle prétendument parfaitement rigoureuse et complète. L'insensé, l'absurde guette tout formalisme pur, tout calcul machinal : l'évocation du sens participe toujours de la construction mathématique rigoureuse. Celle-ci, a posteriori, doit expliciter avec rigueur les hypothèses de travail, les définitions, les notions, les outils conceptuels, bref, si nécessaire, le cadre axiomatique, mais sensé, de la praxis mathématique.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

2.4 — L'écrasement

La monomanie du XX^e siècle dans les fondements des mathématique, le « tournant linguistique » (tout est un formalisme linguistique) nous a fait croire que l'on pouvait identifier ces trois concepts, difficiles et différents, de « abstrait, symbolique, rigoureux » avec « formel ». Ce qui justifie la provocation de R. Thom : « Tout ce qui est rigoureux est insignifiant ». Des axiomes parfaitement formalisés, suites bien formées de signes, gérées par des règles de remplacement de signes par des signes (la déduction formelle), auraient dû saisir complètement la pratique abstraite, symbolique et rigoureuse des mathématiques, en dehors du sens, du contexte et de l'histoire. On esquissera les conséquences de cet écrasement de la richesse du sens sur le non-sens du formel dans d'autres disciplines, comme les analyses de la cognition et du vivant, conséquences qui touchent, aujourd'hui et fortement, notre humanité et notre écosystème. L'enseignement philosophique des limites gödeliennes, à comprendre à l'interface des disciplines (Longo, 2018), et, plus encore, les preuves récentes d'indémontrabilité formelle de théorèmes intéressants de la théorie des nombres (Longo, 2011a) ont été ignorées. Les mathématiques nous montrent, en fait, que toute preuve importante, même d'un énoncé parfaitement formalisable, est une construction dynamique de sens, requiert des nouvelles structures, voire l'explicitation de leurs propriétés, du premier théorème d'Euclide à la preuve de Wiles du théorème de Fermat ; elle est l'invention de nouveaux parcours de pensé riches d'histoire et de nouveaux concepts signifiants et originaux. Il en est ainsi, des lignes euclidiennes, traces continues sans épaisseur, riches d'un sens ancré sur des gestes anciens et sur les Idées d'une métaphysique typiquement grecque, jusqu'aux représentations galoisiennes des courbes modulaires semi-stables et leurs propriétés originales qui surgissent lors de la preuve (Wiles, 1995).

§ 3. — Le sens dans le diagramme, un exemple.

Prenons en exemple une petite expérience mathématique personnelle. La notion de gödelization est une invention purement syntactique, le point de départ du codage de la métathéorie dans la théorie qui permettra à Gödel d'encoder *en* Arithmétique les énoncés *sur* l'Arithmétique, dont « cet énoncé n'est pas un théorème » — un énoncé en fait indémontrable en Arithmétique. La théorie de la calculabilité démarre alors grâce à un encodage, par des nombres, de toutes les fonction calculables, qui servent à Gödel pour encoder les preuves (en « gödelisant » tous les algorithmes qui les décrivent dans n'importe quel langage formel). La puissance de cette idée relativement simple est énorme : non seulement elle permet d'encoder tout système formel (hilbertien) en Arithmétique, mais aussi d'agir sur les fonctions calculable, par des « fonctionnels » disons, en travaillant sur leurs codes. Par ce jeu purement formel, Gödel casse de l'intérieur le projet formaliste : il engendre formellement un énoncé formellement indémontrable. Or, si ces fonctionnels (des fonctions sur des fonctions) sont calculables, on peut itérer l'idée et calculer sur les fonctionnels. Toutefois,..., codages, codages, codages,... à chaque étape on perd du sens. Fort utile toutefois : les ordinateurs empilent des programmes qui agissent

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

sur (prennent comme argument) des programmes codés par des suites de nombres, qui agissent sur des programmes... Par des systèmes de Types, on met alors les nombres entiers au type 0, les programmes au type 1, puis les programmes qui agissent sur des programmes au type 2,..., et ainsi de suite. La description mathématique ne diffère pas de la gestion mécanique : chaque type agit sur les codes du type inférieur,..., codages, codages, codages,... Très bien pour la machine digitale qui encode le monde, très mauvais pour les hommes qui pensent : on n'y voit rien et on n'y comprend rien.

Pour récupérer du sens, en 1980, j'ai eu une petite idée diagrammatique pour décrire, *montrer* mathématiquement cette hiérarchie de fonctions et fonctionnelles calculables. Présentée à Oxford en février de cette même année, j'avais trouvé l'incompréhension courtoise mais radicale de Robin Gandy, ancien élève de Turing pour lequel tout *processus physique fini* dans le monde serait une fonction calculable, en passant par suffisamment de codages. Découragé par les critiques d'un si illustre formaliste, j'ai repris mon idée seulement en octobre 1982, lors d'une visite au département de mathématiques de l'ETH de Zürich. Fort heureusement, Georg Kreisel, très illustre visiteur de ce même lieu, eu la gentillesse de m'écouter, tout en gardant la hauteur de son autorité. Il me demanda immédiatement un texte écrit pour mieux en discuter : huit pages qui furent tapées à la machine (pas de *word processing* à l'époque) en une journée par un secrétariat d'une efficience parfaite. (3)

Les Hereditary Partial Effective Functionals (HPEF) permettent de « monter » dans les types par un simple jeu de diagrammes. A l'époque, je ne connaissait pas du tout la théorie des catégories, mais on entrevoit une approche catégorielle, implicite, dans les HPEF. On se donne le type 0, $\boldsymbol{C}^{(0)}$, les entiers, et le type des fonctions calculables, $\boldsymbol{C}^{(1)}$. Le type intermédiaire $\boldsymbol{C}^{(1.5)}$ est défini par une propriété fondamentale du discret calculable : dans la catégorie des fonctions calculables, $\boldsymbol{C}^{(0)} \times \boldsymbol{C}^{(0)}$ est isomorphe, via $\langle \cdot, \cdot \rangle$ disons, à $\boldsymbol{C}^{(0)}$, et toute fonction de deux arguments est calculable si et seulement si elle est calculable en chacun de ses arguments. Cela permet de définir ce nouveau type $\boldsymbol{C}^{(1.5)}$ des fonctions de $\boldsymbol{C}^{(0)}$ à $\boldsymbol{C}^{(1)}$:

> une fonction Φ est dans $\boldsymbol{C}^{(1.5)}$, si la fonction qui transforme $\langle x, y \rangle \in \boldsymbol{C}^{(0)}$ en $\Phi(x)(y) \in \boldsymbol{C}^{(0)}$ est en $\boldsymbol{C}^{(1)}$ (les fonctions Φ dans $\boldsymbol{C}^{(1.5)}$ doivent aussi avoir un domaine récursivement énumérable, bref $\mathrm{dom}\Phi = \mathrm{dom} f$, pour un $f \in \boldsymbol{C}^{(1)}$).

Et on continue de la même façon pour définir $\boldsymbol{C}^{(n.5)}$ pour tout n (voir 1.1 Définition (HPEF) (i) dans la figure plus bas). Un diagramme commutatif définit alors facilement $\tau \in \boldsymbol{C}^{(n+1)}$, les fonctions de $\boldsymbol{C}^{(n)}$ à $\boldsymbol{C}^{(n)}$:

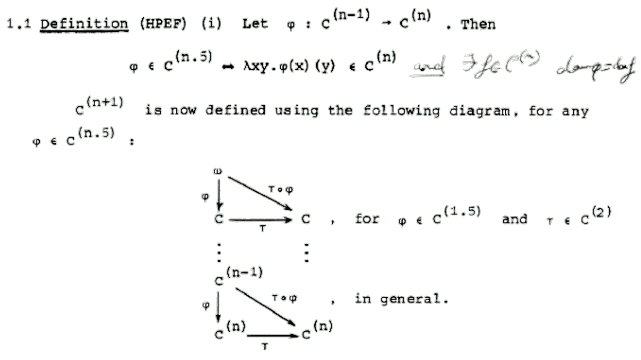
> $\tau \in \boldsymbol{C}^{(n+1)}$ si $\tau \circ \Phi \in \boldsymbol{C}^{(n.5)}$, pour tout $\Phi \in \boldsymbol{C}^{(n.5)}$, comme dans la figure, tapée à Zürich. (*cf.* figure II.1)

Le questionnement de Kreisel fut immédiat et argumenté : intéressant, peut-être, mais trop simple pour marcher ; comment corréler cela à la hiérarchie des fonctionnelles de Kleene-Kreisel ? aux neuf axiomes de l'approche de Kleene etc. ? Toutes des constructions très compliquées et syntactiques (formules et

(3) *Cf.* note 4, p. 29.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Figure II.1. Document du département de mathématiques de l'ETH de Zürich, 1982.



codages, codages et formules...). La discussion continua jusqu'en 1984 par courrier, sur papier bien évidemment [(4)].

En fait, dans plusieurs articles avec S. Martini et E. Moggi, en thèse sous ma direction à l'époque, nous avons répondu à ces questions et corrélé cette structure diagrammatique aux grands systèmes de Types (et sans Type). La preuve démontrant que « ça marche » (que la hiérarchie est bien définie dans les types et qu'elle se corrèle bien aux approches connus) n'est point évidente : en particulier, il faut immerger la hiérarchie discrète des fonctions calculables dans les types dans une structure continue — bref, la preuve est « analytique » (voir les articles dont le lien est en note).

Au delà de l'intérêt, à l'époque, de quelques spécialistes de ce secteur très spécifique de la Logique Mathématique (Higher Type Recursion), il nous a fait plaisir de voir que l'approche à ouvert des pistes pour un encadrement plus conséquent. Dans (Cockett, Hofstra, 2008) on présente « a convenient setting for the categorical study of abstract notions of computability [...] Longo and Moggi, in [30,29], made significant contributions to this programme. While their main motivation seems to have been [...] the study of computability at higher types (as opposed to elementary recursion theory), they formulated the appropriate categorical concepts corresponding to Gödel numberings and parametrization. » À une époque d'« impact factor » à deux ans, on ne peut que se réjouir d'un article qui intéresse encore, vingt-quatre ans après sa publication.

Par un « voir » diagrammatique, relativement rigoureux, mais point formel, on faisait de la Théorie des Catégories sans le savoir.

§ 4. — Le discret, la rigueur, la certitude.

4.1 — Classique

Le continu permet de concevoir les fluctuations, les interférences, la « sécrète noirceur du lait ». Ajoutées à la non-linéarité de la description

(4) Pour les quatre lettres de Kreisel et des liens aux réponses et aux articles pertinents, voir : https://www.di.ens.fr/users/longo/files/FourLettersKreisel.pdf.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

mathématique d'un processus, on obtient l'imprédictibilité des processus dynamiques classiques. Fluctuations, perturbations en dessous de la meilleure mesure possible, un intervalle, et non-linéarité produisent donc l'incertitude, l'aléatoire classique.

Par contre, le discret numérique, classique, permet l'accès exact, ses points sont isolés par définition : même la plus sauvage des dynamiques non-linéaires itère à l'identique, en parfaite certitude, dans un espace discret, comme celui des pixel et des bits de n'importe lequel de nos ordinateurs. Mais, si elle est la discrétisation d'une dynamique non-linéaire, elle ne pourra pas la suivre que très peu de temps (si le temps en est le paramètre). Exactitude et rigueur, voilà la force de nos machines à états discrets, si l'on entend par rigueur l'itération obsessionnelle et exacte de tout algorithme, c'est-à-dire la « correction des programmes », l'ambition de toute bonne pratique et théorie de la programmation. Du reste, que peut faire un système axiomatique à la Hilbert, « potentiellement mécanisable » disait-il, sinon itérer une preuve toujours à l'identique, une fois lancée et relancée dans un processus déductif à partir des axiomes ? Et tout algorithme est une preuve, dans un système axiomatique adéquat (l'isomorphisme de Curry-Howard (Girard et al, 1989)). Le discret des axiomes, suite finie de signes maniés par des suites finies de signes (les règles d'inférence), permet la rigueur parfaite de la méthode axiomatique formelle, le rêve de pouvoir tout calculer et, donc, tout déduire, voire connaître (la complétude des théories axiomatiques : le « *Wir müssen wissen. Wir werden wissen* » de Hilbert). Mais le discret et le fini fétichisent l'itération et ils en restent prisonniers (Châtelet, 1993) : leur incomplétude, gödelienne et physique, nous libère.

4.2 — Quantique

Le caractère discret du rayonnement du corps noir, découvert par Max Planck en 1900, est en fait un caractère discret de l'espace de phase quantique — cet espace mathématique de haute dimension où chaque degré de liberté spatial, dans un système à plusieurs particules, produit un degré de liberté correspondant. Mais le discret quantique est aussi engendré par le continu de l'équation de Schrödinger, tout comme le continu classique des équations aux dérivées partielles engendre des spectres discrets grâce aux conditions aux bords (Paul, 2007) .

À l'échelle de l'espace-temps de Planck, quelque chose de radicalement nouveau apparaît alors : l'image lisse de l'espace-temps que nous adoptons dans la physique classique est abandonnée et quelque chose de tout à fait différent émerge à ce niveau. On est obligé d'envisager des fluctuations quantiques sauvages qui se produiraient à l'échelle de Planck, nous donnant ainsi l'image d'un fouillis de fluctuations topologiques. La prétendue rigueur du calcul et de l'itération exactes, le rêve du discrétiseur classique, disparaît : l'évolution de l'équation de Schrödinger ne nous fournit pas de résultat de mesure unique, mais une superposition de résultats possibles, avec une valeur de probabilité attribuée à chacun. En fait, la situation quantique est en un sens « pire » qu'avec les systèmes non-linéaires classiques, car ici le manque de prédictibilité ne résulte pas des limitations de la discrétisation dans les simulations informatiques, que l'on peut rêver d'améliorer indéfiniment : même une simulation absolument précise de la solution de l'équation de Schrödinger ne nous

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

permettrait pas de prédire quel sera le résultat physique. La rigueur des mathématiques autour de l'équation de Schrödinger n'a rien à voir avec le mythe de l'exactitude du calcul classique dans le discret, conséquence pratique de la déduction formelle hilbertienne.

4.3 — Biologique

Ah, le bruit, que ça gène ! En physique, on fait une mesure, classique, quantique, et la théorie nous dit ce qu'est l'aléatoire : un double pendule classique, imprédictibilité non-linéaire ; le spin d'un électron, imprédictibilité quantique. Bref, on sait préciser la nature de l'aléatoire et les mathématiques départagent les deux : les inégalités de Bell font la différence en probabilité entre aléatoire classique et quantique. Puis, lors de la mesure, un camion passe dans la rue ; voila du bruit qui affecte la mesure. La différence est importante et permet de cerner les problèmes, encadre la construction et la mise en place des instruments, les buts mêmes de la mesure.

Loin de cette finesse, les pères fondateurs de la biologie moléculaire nous expliquent au contraire que « l'évolution est due à du bruit », car la cellule est un « mécanisme cartésien », une « algèbre booléenne... comme dans les ordinateurs » (Monod, 1970). Et voila à nouveau le mythe de l'exactitude numérique discrète au niveau de la protéase, de l'expression génétique, mécanismes exacts, dans le discret alphabétique de l'écriture des instructions génétiques — règles de déduction hilbertiennes. En fait, dans un ordinateur digital il n'y a pas d'aléatoire ou tout est fait pour le cacher — un grand défi dans les réseaux d'ordinateurs : il faut rendre cet aléatoire un « do not care » (Longo et al., 2010), car il ne peut y avoir ou on ne doit y voir que du bruit, à cacher, dans l'élaboration de l'information (quelle nuisance, dans les très rares cas où cela se produit !).

C'est ainsi que l'information se propage de façon linéaire de l'ADN à l'ARN, puis aux protéines (sauf des petites boucles exactes ADN/ARN), récite le Dogme Central de la Biologie Moléculaire (Crick, 1956). Même le repliement des protéines, au cœur de leur fonctions, serait programmé par l'ADN. À partir des protéines donc, la diversité et la variabilité biologiques seraient due à du bruit, une grave distorsion conceptuelle (Bravi, Longo, 2015). Il n'y aurait donc pas à faire d'analyse d'un aléatoire propre au biologique, comme cela a été fait en physique (classique/quantique), voire elle serait même interdite, comme les citations des hétérodoxes, pendant des décennies. Parmi ces hétérodoxies fortement combattues, on peut énumérer : le contrôle épigénétique de l'expression génétique, dont les travaux de B. McClintock (McClintock, 1953) ; le repliement des protéines dus à des interactions entre molécules, comme chez les prions, (Prusiner, 1977) : les deux seraient impossibles car contre le Dogme Central. Et enfin, l'expression stochastique des gènes, dont l'article (Kupiec, 1983) fût un pionnier, longtemps considéré insensée. Ces idées commenceront a être appréciées bien après (Fox-Keller, 2003 ; Cassuto 1999 ; Elowitz et al., 2002). Encore aujourd'hui, la rigueur de la discipline se confond avec l'exactitude d'un prétendu discret des dynamiques qui gouvernent le vivant. Les généticiens orthodoxes se présentent alors comme les gestionnaires rigoureux de la nature et, par exemple, prétendent piloter exactement les plantes dans l'écosystème — les OGM, enfants directs du Dogme Central de la Biologie Moléculaire. Le « éditing » de l'ADN, programme génétique, permettrait de

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

maîtriser les interactions avec, par exemple, le microbiome des racines, au cœur de la viabilité des plantes et de leur écosystème ; ses modifications indirectes, au contraire, ont des effets catastrophiques sur l'humus et la biodiversité (Kowalchuk, 2003 ; Bizzarri 2012). La prétendue rigueur du géno-centrisme moléculaire, analyse exacte, molécule par molécule, des spécificités des interactions macromoléculaires, est encore une fois présenté sous couvert d'un discret alpha-mumérique, héritage ultime de ce tournant linguistique au cœur d'un siècle de débat sur les fondements des mathématiques.

Or, il n'y a pas de bruit en biologie, mais de l'aléatoire dont la fonction est la production de variabilité, diversité et adaptabilité, fortement canalisé par le contexte et l'histoire (West-Eberhard, 2003). Tout au plus, il peut y avoir un bruit (expérimental, typiquement) à bien départager de l'aléatoire fonctionnel, ce dernier au cœur de l'onto-phylo-genèse. Or, en biologie, lors des expériences, le défi est constitué par le double caractère de la mesure, synchronique et diachronique, et donc du bruit qui peut se présenter par rapport aux deux. C'est-à-dire, la connaissance du présent d'un organisme, d'un organe, doit aussi faire référence au passé, à sa mesure (l' « homologie » comme origine commune d'organes différents, par exemple) : l'accès au passé, l'origine évolutive, font partie de l'analyse scientifique (Montévil, 2019). On essaye de traiter cet aléatoire radical, proprement biologique, comme une dynamique de « l'espace des phases », l'espace changeant des phénotypes et des organismes possibles : cet aléatoire est donc dû non seulement aux limites de la mesure, mais au changement même des observables à mesurer (Longo, 2017 ; Montévil, 2020). On essaye aussi de le mathématiser comme « hétérogenèse » (Sarti et al, 2019), au delà de toute morphogenèse physico-mathématique encore encrée sur des parcours optimaux dans des espaces des phases pre-donnés (Longo, 2020).

4.4 — Aplatir le cerveau et l'organisme sur des suites finies de signes *vs.* leur donner du sens

Trop longtemps, l'Intelligence Artificielle (forte) nous a raconté que le cerveau est une Machine de Turing (MdT), voire que celle-ci le *modélise* complètement. Mais alors, quoi de plus rigoureux d'une MdT, bien plus que n'importe quel cerveau ? Droite-gauche, écrit-efface, 0-1. Le cerveau, en fait, ne serait qu'une pâle approximation de cette intelligence, suite au flou de ses neurones trop mous. Cette thèse a été affaiblie chez les modérés, les teneurs de l'IA classique « normale » : on peut (bon, on pourra... bientôt, disait-on) *imiter* complètement un cerveau humain par une MdT. Cette distinction entre « modèle » et « imitation » thématise ce qui est implicite dans deux articles fondamentaux de Turing : celui sur le jeu de *l'imitation* (1950) et l'autre sur un *modèle* de la morphogenèse (1952). Turing était très loin de l'arrogance ordinaire des intelligents artificiels qui ont suivi, comme je résume dans une longue lettre personnelle à Turing lui-même (Longo, 2018t).

Ces deux formes de IA ont essentiellement disparu. Après de longues années, une autre filière, trop longtemps mise à l'écart, a pu émerger. L'idée était, dès son origine (Rosenblatt, 1958), de *modéliser* le cerveau, en tant que réseau de neurones, par une mathématique des réseaux de points aux connections variables. Un tournant a eu lieu quand on a observé que, au bout du

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

compte, le cerveau est en trois dimensions. Depuis les travaux de LeCun et de bien d'autres (Boser et al., 1991), on a empilé des couches de réseaux (bi-dimensionnels) dans une troisième dimension, donc en leur donnant une profondeur (Deep Learning). Par des méthodes enfin non banales de filtrage (linéaire) et convolution (non-linéaire), on arrive à implémenter des algorithmes très efficaces pour la reconnaissance d'images et de la voix. Bien évidement, il s'agit d'une nouvelle imitation, car le cerveau n'est pas un empilement de couches de réseaux électriques plats et indépendants. Toutefois, il s'agît une imitation bien plus efficace que celle inspirée par les MdT, bien qu'elle soit encore basée sur une vision du cerveau « machine input-output », isolé comme dans un pot de confiture, sans corps ni sens, parfaitement incapable de reconnaître une caricature (Longo, 2019).

Quand on s'adresse à la biologie, on éprouve de la tendresse pour la naïveté des pionniers de l'IA classique, forte et faible, leur enthousiasme et leur innocence — leur disparition. Par contre, en biologie, l'hégémonie du Dogme Centrale de la Biologie Moléculaire persiste, bien qu'on s'en défende : les OGM prolifèrent, la recherche sur le cancer reste geno-centrée (Weinberg, 2014; Longo, 2018c). On y entrevoie les immenses intérêts industriels, médicaux et pharmaceutiques, des producteurs des pesticides ou des prétendues « magic bullets » génétiques pour tout soigner, distorsion politique de la connaissance scientifique (Lazebnik, 2018).

Encore un fois, on a projeté sur le monde la rigueur parfaite des mécanismes cartésiens, des algèbres booléennes, de nos machines numériques, exactes. Et la perte de sens est radicale [(5)].

Face à la débâcle scientifique et culturelle de cette vision du monde, un dernier avatar de la rigueur machinale recourt à un renoncement explicite de tout sens : sur la base de Big Data, on pourra prédire et agir même sans comprendre — « Correlation supersedes causation, and science can advance even without coherent models, unified theories » (Anderson, 2008). Un nouveau pythagorisme propose des nouveaux mythes : une science du nombre sans connaissance, une pragmatique sans sens, explicitement agnostique. Il considère les données numériques comme intrinsèques à tout objet, à tout processus naturel et social, parfaitement objectives. Or, les nombres, entiers ou pas, ne sont pas « déjà là », dans le monde. Associer un nombre à n'importe quel processus physique est une tâche d'une immense difficulté : il s'agit de l'acte de la *mesure* physique, classique/quantique, un vrai défi. Il est encore plus difficile en biologie, car la spécificité et l'historicité de chaque organisme demande une nouvelle théorie de la mesure expérimentale, disions-nous, dont on peut trouver une remarquable esquisse dans (Montévil, 2019).

Bref, toute mesure, toute association donc d'un nombre à un objet de science, présuppose une explicitation théorique : le choix des observables pertinents et de l'instrument de mesure. Ce dernier est un objet souvent très complexe, toujours construit sur la base d'un fort engagement théorique — même un mètre est défini aujourd'hui comme une longueur parcourue dans un certain temps

(5) Wolfram et ses acolytes nous expliquent que l'Univers est un grand ordinateur numérique et les lois de la nature des algorithmes, donc qu'un corps tombe car il est programmé pour tomber, que les nombres sont intrinsèques au monde, indépendamment de toute mesure physique/biologique, que « what cannot be computed cannot be thought » (Ladyman, Ross, 2008). Une nouvelle ontologie, nous disent-ils explicitement. L'ontologie des GAFAM.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

(calculé par des oscillations microphysiques) par la lumière, dont la vitesse est un invariant fondamental de la Théorie de la Relativité. Il est absurde d'identifier le monde à des nombres et, a fortiori, considérer comme « objectif » un ensemble de nombres, sans expliciter comment on les a produits, extraits du monde, par la force de quelle théorie, quel choix des observables, quelle procédure de mesure.

Fort heureusement, les mathématiques démontrent que, dans des immenses quantités de nombres, on trouve nécessairement des corrélations fallacieuses (Calude, Longo, 2017). Il est donc impossible de se fier à une régularité, voire à des corrélations découvertes par la machine sur un ensemble de données : il y en a, nécessairement, qui ne dépendent que de la cardinalité de l'ensemble, et, donc, que l'on trouve même si l'ensemble est produit par du hasard — des lancements de dés, des mesure quantiques [(6)].

Pour sortir de ce nouvel aplatissement du monde sur le numérique, rappelons que, si, d'une part, le cerveau, son activité, n'a pas de sens en dehors d'un corps, organisme dans un écosystème, de l'autre cet organisme se comprend en tant que jeu de « contraintes » (Montévil, Mossio, 2015) dans et avec un écosystème résultant d'une histoire, (Soto, Longo, 2016 ; Longo, 2017 ; Montévil, 2020).

C'est donc par l'explicitation d'un parcours constitutif du sens, par l'explicitation théorique dans une histoire, que l'on atteint l'objectivité relative, voire « relativisante », de la connaissance scientifique. La rigueur en fait partie, une conquête difficile, impossible à rendre absolument solide par l'empilement de suites de signes formels, ou même par une reconstruction à posteriori de ces suites. La rigueur toutefois est une conquête aussi solide que la plus stable de nos formes de connaissance, nos mathématiques, ancrées sur les grands invariants théologiques, grecs et chrétiens, sur lesquels sont bâtis les espaces infinis et pré-donnés de la physique (Longo, Longo, 2020). Nous nous posons maintenant le problème, (Longo, 2020), de la pertinence de ces invariants mathématiques de l'infini et de l'espace dans les sciences historiques, comme la biologie et l'économie, par la recherche de nouveaux cadres de rigueur et de sens, voir http://cardano.visions-des-sciences.eu/fr.

§ — Bibliographie.

Pour les articles dont Longo est (co-)auteur voir :
https://www.di.ens.fr/users/longo/download.html

Arndt P. et Kapulkin K. (2011). Homotopy-Theoretic Models of Type Theory. Dans **Ong L.** (éd.) *Typed Lambda Calculi and Applications*. TLCA 2011. Lecture Notes in Computer Science, vol 6690. Springer, Berlin, Heidelberg.

Barendregt H. (1984). *The Lambda-Calculus : its Syntax, its Semantics*. Amsterdam, North-Holland.

(6) Dans (Calude, Longo, 2017) on utilise la Théorie de Ramsey pour montrer ce fait. Or, cette théorie permet d'engendrer des nombres énormes, hors portés de tout réseau d'ordinateurs concevable (des fonctions calculables dont on ne peut pas démontrer la convergence en Arithmétique, (Longo, 2011a)). Nous utilisons cependant des résultats de cette théorie qui restent dans les limites du calculable exponentiel : le logarithme de peta de petabytes donne des régularités d'une longueur aussi remarquable qu'insensée dans *toutes* ces immenses bases de données.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Berthoz A. (1997). Le Sens du Mouvement.Odile Jacob, Paris.

Bizzarri M. (2012). *The New Alchemist. The Risks of Genetic Modification.* WIT Press, Boston.

Boser B. *et al.* (1991). An analog neural network processor with programmable topology. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 26(12), 2017-25.

Bravi B. et Longo G. (2015). The Unconventionality of Nature : Biology, from Noise to Functional Randomness. *Unconventional Computation and Natural Computation*, Springer LNCS 9252, Calude, Dinneen (Eds.), p. 3–34.

Calude C. et Longo G. (2016). Classical, Quantum and Biological Randomness as Relative Unpredictability. Special issue of *Natural Computing*, vol. 15, 2, p. 263–278.

Calude C. et Longo G. (2017). The deluge of Spurious Correlations in Big Data. In Foundations of Science, vol. 22, n° 3, p. 595–612.

Cassuto J. (1999). De la maladie de la vache folle à celle de Creutzfeld-Jakob, Odile Jacob.

Châtelet G. (1993). *Les enjeux du mobile*, Seuil, Paris.

Chiurazzi G. (2018). *Dynamis. Ontologia dell'incommensurabile*. Guerini, Milano.

Church A. (1941). *The Calculi of Lambda-Conversion*. Series : Annals of Mathematics Studies, vol. 6, Princeton Univ. Press.

Cockett J. et Hofstra P. (2008). Introduction to Turing categories, *Annals of Pure and Applied Logic* 12 ; 156(2–3), p. 183–209.

Coquand T. (1986). An analysis of Girard's paradox. Logic in Computer Science. *IEEE Computer Society Press*. p. 227–236.

Crick F. (1956). On Protein Synthesis. *Symp. Soc. Exp. Biol.* XII, p. 139–163.

Damisch H. (1987). *L'Origine de la perspective.* Flamarion, Paris.

Dehaene S. (1997). *La Bosse des Maths*. Editions Odile Jacob, Paris.

Dehaene S., Bossini S. et Giraux P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology : General*, 122, p. 371–396.

De Risi V. (2012). Arte e scienza della sfera. La nascita del concetto moderno di spazio fra la teoria rinascimentale della prospettiva e la geometria di Leibniz. In : *Sphaera : Forma immagine e metafora, tra Medioevo ed Età Moderna*, Olschki, Roma.

Elowitz M. B. *et al.* (2002). Stochastic Gene Expression in a Single Cell. *Science*, 297.

Enriques F. (1935). Philosophie scientifique et empirisme logique. In : *Actes du Congrès international de philosophie scientifique*, Hermann, Paris.

Fox Keller E. (2003). *A Feeling for the Organism Life and Work of Barbara McClintock*, Freeman, New York.

Girard J.Y., Lafont Y. et Taylor R. (1989). *Proofs and Types,* Cambridge Univ. Press.

Heath T.L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge Univ. Press.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Herrenschmit C. (2007). *Les Trois Écritures, Langue, nombre, code*. Paris.

Kreisel G. (1971). Some Reasons for Generalizing Recursion Theory, dans *Logic Colloquium 1969* (**Gandy, Yates** éds), Elsevier.

Kowalchuk G.A. *et al.* (2003). Assessing responses of soil microorganisms to GM plants. *Trends in Ecology and Evolution* 18, p. 403–410.

Kupiec J.-J. (1983). A probabilistic theory for cell differentiation, embryonic mortality and DNA C-value paradox. *Specul Sci Technol* 6, p. 471–478.

Jacob S.N. et Nieder A. (2009). Notation-Independent Representation of Fractions in the Human Parietal Cortex. *The Journal of Neuroscience*, 29(14), p. 4652–4657.

Ladyman J. et Ross D. (2008). *Every Thing Must Go, Metaphysics Naturalized*, Oxford Univ. Press.

Lazebnik Y. (2018). Who is Dr. Frankenstein ? Or, what Professor Hayek and his friends have done to science. *Organisms, Journal of Biological Sciences*, vol. 2, n° 2.

Longo G. (2004). Some Topologies for Computations. In Géométrie au XX^{e} siècle, 1930–2000, Hermann, Paris.

— (2011). Theorems as Constructive Visions. *Proceedings of ICMI 19 conference on Proof and Proving*, Taipei, Taiwan, May 10–15, 2009, (**Hanna, de Villiers** éds) Springer.

— (2011a). Reflections on Concrete Incompleteness. *Philosophia Mathematica*, 19(3), p. 255–280.

— (2017). How Future Depends on Past Histories and Rare Events in Systems of Life, *Foundations of Science*, p. 1–32.

— (2018). Interfaces of Incompleteness. In Minati, G, Abram, M & Pessa, E (Eds.) *Systemics of Incompleteness and Quasi-systems*, Springer, New York.

— (2018c). Information and Causality : Mathematical Reflections on Cancer Biology. In *Organisms. Journal of Biological Sciences*, vol 2, n° 1.

— (2018t). Letter to Alan Turing. In *Theory, Culture and Society*, Special Issue on Transversal Posthumanities. **Füller, Braidotti** (éds).

— (2019). Des hommes et des machines : comment reconnaitre une caricature ? Actes du Colloque « *Le travail au XXI^{e} siècle : Droit, techniques, écoumène* », Collège de France, Paris, 26&27 février 2019.

— (2020). Naturalizing Physics. Or, embedding physics in the historicity and materiality of the living. *Deleuziana*, n° 11, special issue on « Differential Heterogenesis : Deleuze, Mathematics And The Creation Of Forms ».

Longo G. et Longo S. (2020). Infini de Dieu et espace des hommes en peinture, conditions de possibilité pour la révolution scientifique. À paraître dans *Arts et Sciences* (**Maurel *et al.*** , éds), Iste-Willey.

Longo G., Palamidessi C. et Paul T. (2010). Some bridging results and challenges in classical, quantum and computational randomness. Dans *Randomness through Computation*, **Zenil H.** (éd.), p. 73–92, World Scientific.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2021

Longo S. (2013). La perspective de l'Annonciation, présentation d'une étude de Daniel Arasse *et* L'intervalle sacré. Dans *Studiolo*, revue de l'Académie de France à Rome, nº 10, p. 24–32 et p. 75–93.

Martin-Löf P. (1984). *Intuitionistic Type theory*, Bibliopolis, Napoli.

McClintock B. (1953). Induction of Instability at Selected Loci in Maize. *Genetics*. **38** (6) : p. 579–599.

Monod J. (1970). *L'hasard et la nécessité*, Seuil, Paris.

Montévil M. (2019). Measurement in biology is methodized by theory. *Biology & Philosophy* 34, 35.

— (2020). Historicity at the hearth of biology. *Theory in Biosciences*, to appear.

Montévil M. et Mossio M. (2015). Closure of constraints in biological organisation. Journal of Theoretical Biology, vol. 372, p. 179–191.

Panofsky E. (1927). *Die Perspecktive als symbolische Form.* Leipzig&Berlin (English : *Perspective as Symbolic Form.* New York : Zone Books, 1991).

Panza M. (2012). The Twofold Role of Diagrams in Euclid's Plane Geometry", in Janiak, Schliesser (éd.), *Interpreting Newton : Critical Essays*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 55–102.

Paul T. (2007). Discret-continuous and classical-quantum. *Math. Struct. in Computer Science*, 17, p. 177–183.

Poincaré H. (1905/1997). *La Valeur de la Science*. Champs Flammarion, Paris.

— (1908). L'invention mathématique. *Bulletin de l'Institut Général Psychologique*. 3, p. 175–187, re-imprimé dans : Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique (par **Hadamard J.**), 1993.

Prusiner S.B. ***et al.*** (1977). Sedimentation properties of the scrapie agent, *PNAS*, 74(10), p. 4656–4660.

Rosenblatt F. (1958). The Perceptron : A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain, Cornell Aeronautical Laboratory, *Psychological Review*, v. 65, nº 6, p. 386–408.

Sarti A., Citti G. et Piotrowski D. (2019). Differential heterogenesis and the emergence of semiotic function. *Semiotica*, vol. 2019, nº 230.

Simon G. (2001). Optique et perspective : Ptolémée, Alhazen, Alberti. *Revue d'histoire des sciences*, 54, nº 3, p. 325–350.

Soto A. et Longo G. (guest éds) (2016). *From the century of the genome to the century of the organism : New theoretical approaches*, a Special issue of *Progress in Biophysics and Mol. Biology*, vol. 122, 1, Elsevier.

Teissier B. (2005). Protomathematics, perception and the Meaning of Mathematical Objects, dans **Grialou P., Longo G. et Okada M.** (dir.), *Images and Reasoning*, Keio University Press, Tokyo, p. 135–146.

Turing A. (1950). Computing machinery and intelligence. *Mind*, 50, p. 433–460.

— (1952). The chemical basis of morphogenesis, *Phil. Trans. R. Soc. London B* 237, p. 37–72.

Xuan B. ***et al.*** (2007). Larger stimuli are judged to last longer. *Journal of Vision*, 7(10), p. 1–5.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Zebian S. (2005). Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing : The SNARC Effect and the REVERSE SNARC Effect in English and Arabic Monoliterates, Biliterates, and Illiterate Arabic Speakers. *Journal of Cognition & Culture*. 5(1–2), p. 165–190.

Zellini P. (2005). *A Brief History of Infinity*, NewYork : Peguin Book.

Weinberg R. (2014). Coming Full Circle — from endless complexity to simplicity and back again. *Cell* 157, March 27.

West-Eberhard M.-J. (2003). *Developmental Plasticity and evolution.* Oxford Univ. Press, New York.

Wiles A. (1995). « Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem ». Annals of Mathematics. 141(3), p. 443–551.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Chapitre III

La rigueur en philosophie, de l'épistémologie à l'éthique

Jean Lassègue

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ — Introduction.

La rigueur entretient avec la notion d'autorité d'un discours un lien étroit : un discours est rigoureux quand il se développe *selon son mode d'être propre* hors de toute subjectivité ou contingence ; il apparaît alors en phase avec une norme admise dans le milieu qui le pratique et fait dès lors *autorité*. Muni de cette première remarque, on pourrait être tenté de définir la rigueur en philosophie comme on le fait pour toute autre forme de connaissance : réussir à s'entendre sur le mode propre d'un discours permettrait de s'accorder sur la norme qui lui est spécifique et la rigueur qui en découle. Pourtant, le cas de la philosophie est à part parce qu'une telle démarche supposerait que la philosophie entretienne un rapport naturel avec des méthodes et des objets contribuant à circonscrire un domaine de connaissance qui serait spécifiquement le sien et dont le discours philosophique serait le révélateur. Ce rapport naturel permettrait de déterminer la forme propre de sa rigueur et la philosophie ne serait pas différente de ce point de vue des autres types de connaissance qui sont parvenues à exhiber la norme à partir de laquelle pourrait être conçu le caractère rigoureux de leur discours, comme c'est le cas par exemple en mathématiques avec l'idée de démonstration ou en physique avec celle d'espace idéal mathématisable. Pourtant, rien ne nous assure que la philosophie soit liée à un champ particulier de connaissance qui aurait son régime spécifique d'objectivité et partant aussi, sa rigueur propre. À vrai dire, un simple coup d'œil à la profusion des genres mis en œuvre dans des ouvrages bien connus de philosophie corrobore cette impression : dialogues, discours, vers, lettres, commentaires, essais, pensées, méditations, critiques, aphorismes ou même aujourd'hui articles indiquent aussi bien l'originalité que la difficulté à caractériser la norme propre au discours philosophique et à s'accorder unanimement sur son usage. La philosophie se distinguerait assez radicalement sur ce point des autres formes de connaissance, précisément parce qu'elle semble n'avoir ni méthode ni objet propre et qu'« elle sait qu'elle ne sait rien » selon l'adage de Socrate que Platon rapportait déjà dans *L'apologie de Socrate*. L'idée de rigueur en philosophie aurait-elle alors seulement un sens ? Mais comment la définir si on ne peut préciser la norme propre à laquelle son discours obéit ? En m'en tenant à cette absence d'accord quant à la définition de la rigueur en philosophie, je tenterai de préciser certaines conséquences qui me semblent devoir être tirées des rapports mutuels de la philosophie et de la connaissance.

§ 1. — Se passer de philosophie.

L'absence de rigueur du discours philosophique du point de vue de ce qui est requis dans la connaissance pourrait avoir pour conséquence de renoncer purement et simplement au lien problématique qui unit philosophie et connaissance depuis leur origine grecque commune, au moins dans le monde occidental. Cette renonciation peut prendre deux formes, la première — dogmatique — consistant à dénier toute pertinence au discours philosophique dans la construction des connaissances, la seconde — critique — consistant à vouloir séparer dans la philosophie ce qu'elle a de non-rigoureux pour en conserver seulement la capacité de clarification, au plus près du discours de connaissance. Ces deux points de vue dessinent immédiatement un certain nombre de cas historiques bien répertoriés.

L'exemple le plus typique de la première attitude est le plus souvent lié à des débats internes à la communauté des philosophes et à l'idée qu'ils se font du rapport que la philosophie entretient avec les autres disciplines, à savoir en particulier l'attitude qu'il convient d'adopter vis-à-vis des connaissances que l'on appelle positives. Un exemple bien connu de ce débat interne est la façon dont, voilà un siècle, le cercle de Vienne, Carnap en particulier, s'en est pris à ce qu'il appelle les « pseudo-énoncés de la métaphysique », en l'occurrence la philosophie de Heidegger. Carnap dénie à ces énoncés la capacité même de faire sens dans la mesure où leur sens supposé exigerait, selon leur propre auteur, de dépasser le principe de non-contradiction, pourtant au fondement de toute logique [(1)]. Sans norme logique, c'est l'idée même de rigueur qui semble disparaître également. Dans ces conditions, la valeur que Carnap accorde à la positivité de la connaissance exige de renoncer à ce type de philosophie qui ne peut, selon lui, que reconduire la pensée dans des pièges inhérents à l'abandon de la norme qu'il considère comme suprême, celle de la logique.

Pourtant, demeure le besoin de clarification des concepts relevant des connaissances positives, clarification qu'il n'est pas possible de rapatrier entièrement dans le giron des connaissances elles-mêmes parce qu'elle ne relève pas seulement de l'usage technique des concepts utilisés mais de la capacité de renouvellement des connaissances. C'est ici qu'une deuxième attitude peut se

(1) R. Carnap, « Le dépassement de la métaphysique par l'analyse logique du langage » dans *Manifeste du Cercle de Vienne et autres écrits*, PUF, Paris, 1985, p. 171 : « Ne nous sommes-nous pas laissé entraîner a une fausse interprétation ? Nos scrupules sont complètement levés lorsque nous nous apercevons que l'auteur sait pertinemment que les questions et les phrases de son texte sont en conflit avec la logique. « Question et réponse à l'égard du Néant sont en soi également contraires au sens. La règle communément admise comme règle fondamentale de la pensée, le principe de la contradiction à éviter, la « logique » générale, étouffent cette question ». Tant pis pour la logique ! Nous devons renverser son règne : « Si la puissance de l'entendement se voit ainsi brisée dans le champ de la question concernant le Néant et l'Être, c'est également le destin du règne de la « Logique » à l'intérieur de la philosophie qui se trouve décidé. L'idée même de la « Logique » se dissout dans le tourbillon d'une interrogation plus originaire ». Or, la science, dans sa sobriété, va-t-elle s'accorder avec le tourbillon d'une interrogation contraire à la logique ? Même à cette question la réponse est déjà donnée : « La sobriété et la supériorité qu'on attribue à la science deviennent risibles, si celle-ci ne prend pas au sérieux le Néant ». Nous trouvons donc là une bonne confirmation de notre thèse : un métaphysicien en vient lui-même à constater que ses questions et ses réponses sont incompatibles avec la logique et la manière de penser de la science. »

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

faire jour consistant à déléguer la tâche de la clarification non pas à la philosophie mais à une autre forme de connaissance dont la rigueur est susceptible de faire autorité dans la connaissance à clarifier. Une connaissance viendrait, pour ainsi dire, au secours d'une autre pour lui permettre de clarifier ses propres concepts.

On trouve un exemple de cette attitude dans les rapports qu'entretiennent mathématiques et logique depuis Frege : le renouveau de la logique dans la deuxième moitié du XIX^e^ siècle peut être interprété comme la tentative visant à clarifier les concepts mathématiques tout en préservant le souci de rigueur démonstrative exigé par ce type de connaissance. Autrement dit, les mathématiques seraient parvenues à créer par une distance interne les conditions de leur propre clarification par le biais de ce qu'il a été convenu depuis lors d'appeler « logique mathématique ». De façon plus générale, une « philosophie » interne aux connaissances deviendrait ainsi possible comme en témoigne l'expression « philosophie de » : philosophie des mathématiques, philosophie de la biologie, philosophie du droit, etc. Les connaissances auraient ainsi réussi à développer, et ce dans un passé relativement récent, une clarification interne de leurs propres concepts tout en s'affranchissant de la philosophie au sens classique du terme : l'*épistémologie* serait le lieu de l'internalisation de la clarification dans chaque forme de connaissance, jadis monopole de la philosophie.

Pourtant, une telle attitude pose au moins deux problèmes. Premièrement, elle scinde la philosophie en une partie « claire » et une partie « confuse ». Or cette division peut elle-même faire l'objet de révision et n'a aucune raison de ne pas devoir être clarifiée à son tour à partir d'un point de vue qui ne peut être qualifié que de philosophique. Cette première remarque en appelle une autre : en décidant que la logique joue un rôle de simple outil de clarification à l'égard des mathématiques, on prend philosophiquement parti sur le rôle qu'on lui prête. Or cela peut être philosophiquement remis en question car si la logique a pu servir d'outil de clarification pour les mathématiques dans des contextes spécifiques, en particulier celui de la fin du XIX^e^ siècle, elle est loin de s'être limitée à ce rôle : outre que son rôle clarificateur pour les mathématiques a produit des développements internes inattendus qui n'ont eu alors d'autre but que la poursuite de la connaissance logique pour elle-même — théorie des modèles, calculabilité —, elle a également rendu possible, à l'intérieur même des mathématiques, des développements inconcevables sans elle — mathématiques intuitionnistes, analyse non-standard. Ce sont donc finalement les rôles prêtés à la logique qui doivent faire l'objet d'une évaluation philosophique dès lors qu'ils ne peuvent pas être déterminés une fois pour toutes. La stratégie consistant à créer à l'intérieur des formes de connaissance la distance suffisante pour permettre la clarification de leurs propres concepts relève donc encore d'une évaluation philosophique et si cette stratégie transforme bien la philosophie en épistémologie, elle ne transforme pas cette dernière en une autre forme de connaissance puisque l'épistémologie continue de jouir du statut d'extraterritorialité propre à la philosophie, pourrait-on dire.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 2. — Se passer de la connaissance.

Y aurait-il donc une rigueur spécifique à la philosophie qui pourrait se définir sans rapport à la connaissance ? Autrement dit, plutôt que de voir dans la philosophie l'autre *de* la connaissance, est-il possible de l'interpréter comme autre *que* la connaissance ? C'est sur la question de la norme que doit alors porter l'attention et sur la façon de savoir si elle peut se présenter sous une forme autre que celle admise dans les connaissances.

En partant de la remarque de Carnap citée plus haut qui considère que tout énoncé perd immédiatement son sens s'il cesse de se soumettre à la norme du principe de non-contradiction, on voit que la question est de savoir quels rapports la philosophie doit entretenir avec la logique. Heidegger, aux dires de Carnap, semblait se targuer de pouvoir se passer du principe de non-contradiction car s'y soumettre consistait finalement à limiter la pensée au domaine pour lequel le principe de non-contradiction est valide, c'est-à-dire celui de la connaissance en général. Le rôle spécifique à la philosophie serait différent et consisterait à se confronter à cette perte de sens décrit comme un paradoxe logique du point de vue de la connaissance et à tenter de clarifier le fait que sa possibilité même en soit accessible à la pensée. La question qui se pose est de savoir s'il s'agit ou non d'une autre forme de connaissance.

Si l'on en croit ce que rapporte Carnap, pour Heidegger, la réponse est non. Se confronter à ce que la logique appelle un paradoxe ne relève précisément pas pour lui de la connaissance : c'est plutôt l'indice que la philosophie se situe là où la logique renonce à se trouver. Pourtant, les choses sont plus complexes car le point de vue de Heidegger consiste à éclairer cette question par le biais d'une démarche qu'il faut bien rapporter à la connaissance historique en situant dans la philosophie dite présocratique le moment où ce type de pensée était encore possible, avant l'institution par Platon de la rationalité de la connaissance comme vecteur unique de la pensée. La réponse de Heidegger consiste donc à répondre à la question de la confrontation au paradoxe qui serait le propre de la philosophie par le biais d'un argument portant sur son origine temporelle, antérieure à la connaissance proprement dite. L'antériorité par rapport à l'ordre de la connaissance serait donc aussi une antériorité temporelle dans l'histoire de la pensée. De ce fait, le point de vue de Heidegger semble se déplacer de la question de *là où* la pensée se manifeste comme paradoxe à la question de *quand* la pensée se manifeste comme paradoxe. Il faut donc s'attarder sur ces deux points, l'appel à l'origine et la confrontation au paradoxe, pour avancer sur la question de la forme spécifique possible que pourrait avoir une rigueur philosophique.

On peut tout d'abord s'interroger sur le fait qu'il faille répondre à la question de la confrontation au paradoxe par un appel à l'origine. On peut soutenir au contraire que la confrontation au paradoxe n'a rien de typiquement présocratique et qu'on la retrouve ailleurs dans l'histoire, chez Platon [(2)], chez

(2) Le début du *Théétète* qui porte sur le problème des irrationnelles est bien l'exposition d'un paradoxe dans lequel la mesure de l'hypoténuse d'un carré de côté 1, d'irrationnelle devient rationnelle quand elle on la prend comme mesure du côté d'un carré de surface 2.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Anselme [3], chez Kant [4] et chez bien d'autres philosophes. Le recours à une origine présocratique de la pensée qui se trouverait confrontée à ce qui semble se situer au-delà du principe de contradiction ne semble donc rien receler de plus que ce que l'on trouve à d'autres époques : il n'y a aucune raison d'attribuer une valeur particulière à l'origine du fait qu'elle se situe avant d'autres manifestations plus tardives. Le recours à l'origine ne change donc rien à la nature de la confrontation au paradoxe à laquelle se heurte la pensée quelle que soit l'époque.

Ensuite, on peut également douter que la confrontation au paradoxe soit le propre de la philosophie car la connaissance n'a de cesse de la rencontrer et de tenter, à partir d'elle, d'en faire un objet de discours. On se sert en effet de la confrontation au paradoxe plus qu'on ne recule devant elle dès qu'il y va de produire des connaissances nouvelles : quand Galilée montre qu'il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers alors que ceux-ci semblent deux fois plus nombreux, il ne rebrousse pas chemin en se contentant de dire que cette constatation dépasse la pensée, il laisse le problème ouvert en vue de continuer à s'interroger. Ce n'est que deux siècles plus tard que le questionnement de Galilée trouvera un élément de réponse dans l'arithmétique transfinie de Cantor. La confrontation au paradoxe n'est donc pas l'apanage de la philosophie.

Si donc il y a un terrain commun à la connaissance et à la philosophie, c'est bien celui de la confrontation au paradoxe et il n'y a pas de raison d'y voir une préoccupation exclusive de la philosophie. On doit donc renoncer à l'argument de Heidegger consistant à instituer un domaine de la pensée qui serait hors d'atteinte de la connaissance et antérieure à elle : si une rigueur philosophique existe, elle doit se situer dans le compagnonnage problématique avec la connaissance et non pas hors de lui.

§ 3. — L'éthique de la confrontation au paradoxe.

On doit donc concevoir le rapport de la philosophie et de la connaissance comme deux polarités au sein de la pensée en prenant garde de ne pas être le jouet d'un partage seulement académique entre les disciplines : doit-on vraiment décider si Galilée ou Cantor sont mathématicien ou philosophe quand le premier s'interroge sur le statut à accorder à l'infini ou que le second élabore une théorie du transfini ? La réponse à cette question a finalement peu d'intérêt et s'il y a un sens à distinguer des rôles différents dans la pensée, il n'y en a pas en revanche à durcir les oppositions au point d'interpréter la philosophie et les connaissances comme des régimes foncièrement différents de la construction du sens. La question est donc plutôt celle de sortir de la compartimentation des connaissances en tentant de comprendre la nature de la variation interne à la pensée et des différentes acceptions du terme de rigueur qui peuvent lui être associée.

(3) Le nerf de l'argument de la preuve ontologique de l'existence de Dieu dans le *Proslogion* consiste à se confronter à l'idée de quelque chose par rapport à quoi rien de plus grand ne peut exister.

(4) C'est dans la confrontation aux antinomies dans les trois *Critiques* qu'un point de vue transcendantal devient concevable.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Si nous repartons de l'exemple de Galilée cité à l'instant, on voit qu'il y a trois façons de réagir quand on se trouve confronté au paradoxe dont il parle, comme Galilée le souligne d'ailleurs lui-même. La première consiste à « rebrousser chemin » en quelque sorte et à s'en tenir à des ensembles de nombres tels que le paradoxe puisse être écarté en préservant les catégories habituelles de pensée portant sur une arithmétique entre ce qu'on appellerait rétroactivement des ensembles finis. Cette attitude peut se décrire comme un *conservatisme de la pensée* qui tente d'étendre le périmètre des connaissances à partir de principes qui ont fait leur preuve antérieurement en s'en tenant à une logique de la généralisation. La seconde consiste à s'en tenir à ce qui est, c'est-à-dire au paradoxe lui-même, en produisant des arguments tels que toute attitude qui consisterait à tenter de s'en écarter ou de le sous-estimer soit prise en défaut. Cette attitude s'en tient donc à un *réalisme de la pensée* quant à la façon dont celle-ci se manifeste comme paradoxe ou comme problème. La logique sous-jacente est celle du contre-exemple : un cas particulier, même unique, peut ruiner le degré de généralité que la première attitude pensait avoir atteint. La troisième attitude consiste à tenter de produire une ou des solutions permettant moins de dépasser le paradoxe ou le problème que d'en diluer les effets paralysants sur la pensée. Elle suppose un *optimisme de la volonté* qui consiste à faire le pari qu'une solution, même si elle est inaccessible ici et maintenant, sera accessible dans l'avenir et qu'il est donc possible de la chercher. Il s'agit moins ici d'une logique que d'une éthique : comme toute éthique, il s'agit de présenter comme effective dans le présent la solution encore à venir, ce qui permet d'amorcer sa recherche en vue d'accorder ce qui semblait séparé par le temps. Les trois attitudes mettent donc l'accent sur la façon dont le présent entretient un rapport particulier avec l'une des trois instances temporelles : passé, présent et futur. Il devient possible, à partir de là, de décrire des attitudes variées mais surtout coordonnées quant à l'idée de rigueur.

Tout d'abord, il y a de la rigueur dans les trois attitudes qui viennent d'être brièvement décrites. Cette rigueur consiste respectivement à maintenir un cap, à soutenir un effort ou à organiser les conditions futures de construction du sens à partir de l'évaluation d'une situation. Contrairement à notre point de départ, la rigueur n'apparaît donc plus liée à l'idée de norme et donc non plus à un régime spécifique du sens qui serait intégralement calibré sur un domaine particulier de connaissance car les trois attitudes dont il vient d'être question se retrouvent quelles que soient les formes de connaissance, le cas des mathématiques n'étant qu'un exemple, même si c'est d'abord à lui qu'on pense quand il est question de rigueur. Ainsi la démonstration conçue comme norme dans l'exemple mathématique ne dit rien des trois attitudes en question. Or il est pourtant capital de les prendre en considération si on veut comprendre ce qui fait la nature de l'attitude des mathématiciens quand il sont confrontés à ce qui fait paradoxe ou problème. La rigueur, de ce point de vue, n'est pas affaire de connaissance mais bien affaire de mœurs, si l'on ose dire. De façon générale, la rigueur varie selon les trois attitudes dont il vient d'être question : à une rigueur de la conformité au passé, s'oppose la rigueur d'une confrontation sans échappatoire au présent et la recherche d'une solution encore à venir.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ — Conclusion.

La philosophie, de par son statut atopique particulier, donne l'occasion de remettre en question la tentation consistant à s'en tenir à une approche seulement disciplinaire de la rigueur qui voudrait arrêter une fois pour toutes les modalités propres à la construction d'un objet de connaissance. La dynamique propre à la connaissance exige plutôt que même le rapport à l'objet qu'elle construit puisse être bouleversé dans ses principes et qu'elle n'adhère pas à cet objet comme s'il ne relevait pas d'une construction en devenir. La rigueur ne consiste donc pas exhiber ce que Platon appelait déjà ironiquement une « pierre de touche » (5), ce test permettant aux changeurs de vérifier la teneur des pièces métalliques. Ce que la philosophie soutient, c'est plutôt que, quel que soit le régime de connaissance, la rigueur ne se limite pas à être une pierre de touche applicable mécaniquement, à qui l'on pourrait déléguer indistinctement l'exercice entier du jugement. Elle introduit de ce fait une temporalité propre qui n'est pas fondée sur une norme dont la manifestation pourrait se transformer en règle. La rigueur philosophique déborde ainsi le régime particulier de la connaissance mais elle le déborde d'une façon bien particulière : sans le renier ni le révérer, elle le complète tout en l'ouvrant, par le biais d'une relance indéfiniment ouverte du sens dont le paradoxe témoigne.

(5) Platon, *Gorgias*, 486e.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2021

Prouver et composer : quelques analogies

Frédéric Patras

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Il va s'agir ici d'aborder d'un point de vue philosophique, de façon assez informelle et exploratoire, quelques rapports entre mathématiques et musique. Le projet n'est en lui-même pas nouveau et parcourt l'histoire de la pensée et de l'esthétique ; ce texte a, quant à lui, trois origines.

- Un contact de longue date avec les travaux aux mêmes interfaces disciplinaires de Moreno Andreatta, et l'idée de développer une théorie « mathémusicale » où le discours philosophique aurait toute sa place.
- La lecture du *Emotion and Meaning in Music* [1] de L. B. Meyer, qui a suscité, directement ou indirectement, d'assez nombreux développements parmi ceux qui suivent. Sans forcément adhérer entièrement aux thèses développées dans l'ouvrage [2], celui-ci aborde de façon très profonde et intrinsèquement philosophique tout un ensemble de phénomènes liés au sens et à l'esthétique des œuvres musicales, qui ne vont pas sans faire écho à autant de phénomènes susceptibles de se manifester dans la pratique mathématique.
- Enfin, une dernière motivation tient au programme de développement d'une herméneutique des mathématiques [3], qui ne prend tout son sens qu'au travers d'études comparatives et interdisciplinaires. La musique, on le verra, est légitimement candidate à proposer diverses clés de lecture lorsqu'il s'agit de comprendre comment se manifeste la signification en mathématiques, au-delà des banalités logiques convenues.

L'accent sera mis implicitement sur une approche phénoménologique, c'est-à-dire, concrètement, sur une approche privilégiant la structure du rapport de la pensée à son objet — par opposition aux études des structures mathématiques en musique, ou à celle des phénomènes psychologiques en jeu indépendamment de la structure des objets appréhendés.

De façon plus précise, l'originalité espérée de ce texte au regard de la littérature existante sera de chercher à expliciter un certain nombre de problèmes

(1) The University of Chicago, 1956.

(2) « The evidence advanced in support of the hypothesis that musical meaning, whether affective or aesthetic, arises when a tendency to respond is inhibited is not confined to chapters vi and vii. These chapters present what might be called direct evidence. This material has consistently demonstrated the connection between the inhibition of tendencies (deviation) and the affective aesthetic response [...]. The central thesis of this book is also supported by less direct, though not less convincing or important, considerations. » *op. cit.* p. 254.

(3) F. Patras, « Mathématiques et herméneutique ». *Archives de Philosophie* 76 (2013) 217–238.

autour d'une notion épistémologiquement difficile, celle de preuve mathématique. Notion difficile non pas lorsqu'on l'aborde du point de vue logique, qui pourrait sembler le plus naturel pour parler des preuves en termes de rigueur et d'exactitude. Non, difficile à appréhender lorsqu'on l'aborde du point de vue de l'expérience du mathématicien, soit qu'il lise des mathématiques et essaie d'en dégager des significations, soit qu'il essaie de résoudre un problème et de faire émerger une preuve de l'ensemble des matériaux et techniques à sa disposition.

Il s'agit là d'un des problèmes les plus profonds auxquels est confrontée la philosophie des mathématiques, puisqu'il porte sur les ressorts de la création. Il y a de bonnes raisons de penser, et ce sera l'une de nos thèses, qu'il n'est pas sans rapports, au moins formels, avec ceux auxquels est confrontée la philosophie de la pratique et de la théorie de la musique, et en particulier, mais pas exclusivement, dans ses rapports avec les mathématiques.

§ 1. — De l'objet à la preuve.

Dans la philosophie mathématique « classique » — la lignée qui va de Platon à Husserl en passant par Descartes et Kant —, l'accent est mis sur deux questions :

- la question de l'objet et de son aprioricité, typiquement platonicienne : Qu'est-ce qu'un objet, une idéalité mathématique ? Comment se constituent-ils dans l'intuition ? Quelle est leur légitimité ?
- la question de la vérité et de la certitude, plutôt aristotélicienne et cartésienne.

Cette seconde question a été largement renouvelée par le XX^{e} siècle, la logique mathématique et les philosophies liées à la logique comme le positivisme logique. La question de l'objet l'a été également, entre autres avec le structuralisme mathématique et la théorie des catégories (4). Le structuralisme a modifié l'ontologie : l'objet au sens ordinaire y a perdu son essence, sa transcendance, pour devenir simple modèle, occurrence, réalisation d'une structure. La théorie des catégories pointe quant à elle dans une autre direction : celle de la primauté des relations entre objets et de la manière dont ces relations peuvent être organisées en un tout, soumis à des règles. On dispose ainsi de tout un ensemble d'outils et de doctrines pour repenser les objets dont s'occupent les mathématiques, la manière dont ces objets s'organisent.

Les théories musicales s'en sont emparées (5), en particulier du fait qu'en tant que théorie des structures mathématiques abstraites, la théorie des catégories serait particulièrement adaptée à l'unification de différentes

(4) Avec, par exemple : J.-T. Desanti, *Les idéalités mathématiques*, Éditions du Seuil, 1968 ; M. Caveing, *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Vrin, 2004 ; F. Patras, « Phénoménologie et théorie des catégories », in *Geometries of Nature, living Systems and human Cognition*. Ed. L. Boi. World Scientific, 2005, 401–419, F. Patras, *La possibilité des nombres*, Presses universitaires de France, 2014.

(5) Avec par exemple l'introduction de la théorie des catégories dans la théorie musicale dans les travaux de G. Mazzola : *Gruppen und Kategorien in der Musik*, Hermann, Paris, 1985 ; *Geometrie der Töne*, Birkhaüser, 1990 ; *The Topos of Music*, Birkhaüser, 2002.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

constructions en théorie de la musique [6]. On notera d'ailleurs dans ce contexte mathémusical la présence d'une référence à l'épistémologie des mathématiques de G. G. Granger [7].

En dépit de cette longue histoire et de tous les débats qui l'entourent, nous semble continuer à faire défaut une entente authentique d'un ingrédient essentiel du travail et de la pensée mathématique : la manière dont objets et relations sont mobilisés dans la pensée, et de la manière dont des significations émergent de cette mobilisation. L'ouvrage de Meyer sur la signification des œuvres musicales fait état de tout un ensemble de théories et d'idées pour aborder ces problèmes dans le contexte musical ; la théorie de la signification en mathématiques ne peut que gagner à s'y intéresser.

De fait, la pensée mathématique est un lieu théorique par excellence où espérer appréhender les phénomènes de signification. Mais il faut se garder de tout réductionnisme : dans le langage hérité de la phénoménologie husserlienne et heideggerienne du mathématicien-philosophe Gian-Carlo Rota, cette appréhension, pour être authentique, doit porter sur le rapport de *Fundierung*. Rapport entre l'objet de la pensée et ses différents supports signitifs, matériels, intuitifs dont chacun indique, mais indique seulement, l'existence de l'objet en contribuant au dévoilement de sa nature. Pour continuer dans la direction d'analogies mathématico-musicales, la sonate *Mondschein* de Beethoven ou le Théorème de Fermat ne sont en rien réductibles à une partition ou une démonstration dans un article. L'objet intentionnel associé à la sonate ou au théorème se constitue toujours dans un faisceau convergent d'idées, d'interprétations, d'émotions, d'histoires, et en est indissociable.

Rota va même plus loin :

> « [...] *all understanding is equiprimordially rational and emotional. There is no such thing as purely rational understanding. There is always an emotional component in all understanding, in all discourse, in all speech and communication. Of course, the emotional component is not what delivers the truth, it is what helps you disclose the truth in its own mode. Rationality alone does not give you a guide where to look.* »
>
> G.-C. Rota, « Lectures on *Being and Time* » (1998), Edited by Mark van Atten, *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy VIII* (2008), 225–319.

Aussi, la hiérarchie de problèmes caractéristique de l'épistémologie des mathématiques (objets ; relations et structures ; preuves) se reflète-t-elle en partie dans l'apprentissage de l'écoute et de la composition avec, à un premier niveau, la reconnaissance des matériaux sonores et harmoniques (typiquement, la tonalité, les accords) ; à un deuxième niveau, l'organisation locale de ces matériaux mélodiques et harmoniques (avec, typiquement, le contrepoint) et enfin, à un niveau supérieur, l'organisation d'ensemble des matériaux

(6) M. Andreatta, « From Music to Mathematics and Backwards : Introducing Algebra, Topology and Category Theory into Computational Musicology », *Imagine Math 6*, M. Emmer and M. Abate (eds), Springer, 2018, 77–88.

(7) « From an epistemological point of view, transformational analysis provides an instantiation, in the music domain, of Gilles Gaston-Granger's articulation between the "objectal" and the "operational" dimensions ». M. Andreatta, *op. cit.*

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

mélodiques et harmoniques et de leurs rapports en un tout cohérent (avec, typiquement, l'art de la fugue).

Ce type d'analogie a de toute évidence des limites, mais le simple fait d'avoir conscience de sa possibilité et de l'existence de telles limites dégage un terrain de discussion. Une liste d'analogies mathématico-musicales prend ainsi forme autour de la dernière thématique, que nous privilégierons, celle des preuves et des œuvres abordées dans leur totalité, selon deux axes, qui seront par la suite abordés successivement.

- D'une part, celui de la réception, c'est-à-dire de la lecture mathématique et de l'écoute musicale, où les mécanismes en jeu résultent de la confrontation à un matériau existant. C'est là un problème de nature phénoménologique : il s'agit d'analyser la structure d'un certain nombre d'expériences cognitives et esthétiques quotidiennes.
- D'autre part, celui de la conception de preuves et la résolution de problèmes mathématiques ; et de la composition, de la création musicale ; problèmes sans doute plus spéculatifs qui relèvent de la théorie générale de la connaissance.

§ 2. — Lire, écouter.

Précisons-le d'emblée : le type de phénomènes qui se dégagent de l'analyse de la lecture mathématique ou de l'écoute musicale n'ont probablement rien de spécifique. Il y a sans doute une homogénéité et une universalité des processus cognitifs et esthétiques qui créent des ponts entre tous les domaines du savoir et de l'art. Tout au plus peut-on assez légitimement penser que, pour plusieurs raisons à la fois historiques, physiologiques et théoriques, il y a quelque chose de privilégié dans les liens entre mathématiques et musique qui permet d'en dégager, plus facilement peut-être que dans d'autres interfaces, certains de ces éléments universels.

Meyer note ainsi que la musique a ceci de particulier de ne pas employer de signes ou symboles se référant à un monde non-musical d'objets, concepts ou désirs humains. Aussi « les significations qu'elle véhicule diffèrent-elles de façon importante de celles qui se manifestent en littérature, peinture, biologie, ou physique ». Pour autant, selon lui, « contrairement à un système mathématique fermé et non-référentiel, la musique est dite communiquer des significations émotionnelles ou esthétiques ainsi que d'autres purement intellectuelles » [(8)].

Ces thèses sont évidemment discutable dans l'opposition ainsi effectuée entre musique et mathématiques : l'existence d'un sentiment esthétique dans ces dernières est bien connue et se traduit par des références fréquentes, dans la pratique du mathématicien, à la beauté ou l'élégance d'un résultat, d'une preuve, d'une théorie. On parle par contre assez peu souvent de l'émotion mathématique au-delà de quelques formules convenues de type néoplatonicien. Cette émotion semble relever de deux ordres d'idées : il y a une

(8) L. B. Meyer, *op. cit.*

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

émotion assez bien comprise, qui est celle liée au sentiment esthétique, la perception de la beauté mathématique dépendant indubitablement tout autant de la formation reçue que de goûts personnels. L'auteur de ce texte est par exemple, peut-être du fait d'un biais cartésien et structuraliste, beaucoup plus sensible à la beauté de type algébrique ou combinatoire que géométrique ou arithmétique.

Ceci dit, en observant la communauté mathématique, beaucoup de choses laissent penser que les émotions les plus fortes ne proviennent pas de ces sensations de type esthétique assez classique, mais plutôt de leur conjonction avec le travail de la pensée, l'effort intellectuel, et parfois le succès qui résulte de la réussite ou simplement de la compréhension d'une démonstration. Ces phénomènes où le moi joue un rôle important ont bien été mis en évidence par celui qui est souvent considéré comme le plus grand mathématicien du XX^{e} siècle, A. Grothendieck, dans sa biographie intellectuelle, *Récoltes et semailles* (9). Leur fait sans doute écho la réussite d'une interprétation difficile ou une composition particulièrement réussie. Cette sensation n'atteint sa plénitude que lorsque la démonstration est manifestement en adéquation parfaite avec son objet. On peut démontrer un très joli résultat et en rester insatisfait faute d'avoir atteint cette « naturalité » de la pensée.

Ces observations ne remettent pas entièrement en cause le jugement de Meyer, qui pourrait être étayé par d'autres arguments, ou en distinguant plus soigneusement les différents types d'émotions, avec en particulier la mise en évidence de la dimension matérielle et physiologique de l'écoute — puisque, même à qui sait « entendre » la musique à la simple lecture d'une partition, sa dimension de facticité est-elle toujours présente, fût-ce de façon potentielle. Le premier lien entre écoute musicale et mathématiques est d'ailleurs, à la fois *de facto* et historiquement, de nature physiologique. La théorie de l'harmonie est fondée sur des liens entre longueurs de cordes et fréquences qui conduisent à une certaine forme d'« implémentation » physique et naturelle de la musique dans le système perceptif et le cerveau. Ces phénomènes sont parfois rapprochés des liens entre la théorie des proportions (avec le nombre d'or cher à la Renaissance) et l'esthétique en architecture ou en peinture.

Cela dit, on sait que le fonctionnement du cerveau et de la perception sont complexes et sans doute assez peu analogiques. Les signaux perceptifs sont traités (au sens où on parle de traitement du signal) à un premier niveau, neurologique, avec des phénomènes de type transformée de Fourier. Quand à la manière dont émerge, dans le cerveau, quelque chose comme une conscience musicale structurée, personne ne sait en dire grand chose au-delà des quelques expériences qui peuvent être faites, par exemple sur des sujets dont les perceptions musicales sont altérées.

De ce point de vue, la situation est en grande partie analogue en mathématiques. D'une part, la compréhension de l'implémentation neuronale de la pensée mathématique est très limitée : des travaux neuro-cognitifs comme ceux de Dehaene (10) s'arrêtent toujours très en amont des vraies mathématiques. D'autre part se pose la question du mode ultime de cette implémentation : par exemple, jusqu'où est-elle de type analogique ? Il est bien entendu concevable

(9) *Récoltes et semailles. Réflexions sur un passé de mathématicien.* Montpellier, 1985.
(10) S. Dehaene, *The Number Sense*, Oxford University Press, 1997.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

qu'un accord, une figure géométrique ou un objet arithmétique élémentaire soient codés de manière plus ou moins analogique ou par un phénomène de dualité de type Fourier au niveau neuronal, mais les choses sont beaucoup moins évidentes lorsqu'on se déplace au niveau qui nous intéresse : celui, global de l'écoute d'un morceau de musique ou d'une démonstration complexe.

De façon plus technique, les théories musicales récentes de type algébrique ou combinatoire [(11)] posent des questions précises qui peuvent peut-être permettre d'avancer dans la compréhension de ces phénomènes. Si les structures mathématiques complexes de la Set theory ; si les modes à transposition limitée de Messiaen, etc., correspondent à des structures effectives de la perception musicale, s'ils ont des répondants esthétiques qui ne soient pas purement intellectuels, cela signifie sans doute que la structure intime de l'écoute musicale est capable de détecter des structures mathématiques [(12)]. Les enjeux sont bien sûr considérables pour la théorie musicale, mais aussi pour les mathématiques, puisque cela signifierait que l'activité synthétique d'identification de formes algébriques et combinatoires assez complexes peut déjà se produire à un niveau perceptif ou préconscient. Cela pourrait aussi étayer la thèse selon laquelle l'apprentissage précoce de la musique pourrait aider au développement cognitif.

§ 3. — Formes et structures.

Cette question débouche naturellement sur une deuxième analogie, qui est en partie une élaboration de la précédente au-delà du domaine neuronal et perceptif. L'aptitude à faire des mathématiques à un niveau avancé est en grande partie une aptitude à reconnaître et construire des formes théoriques typiques et à les abstraire de matériaux ou phénomènes donnés. En musique, « la compréhension n'est pas liée à la perception de stimuli unitaires, ou à celle de combinaisons de sons simples isolés ; elle relève plutôt du regroupement de stimuli en formes (patterns) et dans le mise en relation de ces formes. » [(13)]

(11) Une autre approche, extrêmement intéressante, que m'a signalée M. Andreatta du fait de ses rapports intimes avec les thèses développées dans ce texte, est celle passant par les probabilités et la notion d'information, que l'on trouve également chez Meyer : « Meyer's basic hypothesis about the relations between Information Theory and Music is that the psycho-stylistic conditions which give rise to musical meaning, whether affective or intellectual, are the same as those which communicate information (Meyer, L. : Meaning in Music and Information Theory, in J. Aesthetics & Art Criticism, 1957, 15, 412 et ch.1 of Music, the Arts and Ideas, 1967) », M. Andreatta, Formalizing musical structure : from Information to Group Theory, Dissertation in Aesthetics and Sociology of Music, University of Sussex, 1997.

(12) Une idée à rapprocher de l'opposition entre formalistes et expressionnistes en théorie de la musique : « The formalist would contend that the meaning of music lies in the perception and understanding of the musical relationships set forth in the work of art and that meaning in music is primarily intellectual, while the expressionist would argue that these same relationships are in some sense capable of exciting feelings and emotions in the listener ». L. B. Meyer, *op. cit.*

(13) L. B. Meyer, *op. cit.*

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

En mathématiques (comme en musique), ce processus est largement non conscient, ou préconscient (14). Nous savons identifier, avec un peu de travail et d'expérience, ces formes typiques et les traduire en langage mathématique standardisé, mais nous ne maîtrisons pas leur genèse. Un des phénomènes les plus étonnants de ce point de vue est l'évolution à la fois individuelle et collective de la pensée. Les mathématiques que nous considérons élémentaires ont posé des difficultés considérables aux générations antérieures — un phénomène que l'on retrouve au niveau individuel : on peut avoir beaucoup de difficultés à acquérir la maîtrise d'une nouvelle idée, d'une nouvelle technique puis, d'un coup, la trouver évidente et s'étonner que d'autres mathématiciens ne partagent pas ce sentiment d'évidence pourtant si difficilement acquis. Une certaine forme d'incommunicabilité, qu'on ressent souvent dans les séminaires mathématiques, est sans doute liée à ces transitions cognitives.

Quoiqu'il en soit, ce phénomène se retrouve dans la culture et l'histoire musicale, mais de façon en partie différente et d'autant plus significative. Dans le domaine mathématique, cet apprentissage de l'évidence, qui varie d'une époque à l'autre, est essentiellement théorique et en grande partie le résultat d'un travail délibéré. Au niveau collectif, la présentation des idées se simplifie, se standardise. Au niveau individuel, c'est le travail qui donne accès à des niveaux supérieurs d'évidence conceptuelle.

En musique, ce phénomène existe sans nul doute au niveau supérieur — dans les conservatoires, par exemple — mais il affecte aussi les mélomanes dépourvus de formation théorique. De ce point de vue, l'acceptation — ou la non acceptation — des musiques contemporaines par le grand public est un phénomène épistémologique intéressant, de même que le rejet de la réforme des mathématiques modernes qui présente, au moins formellement, de nombreuses analogies. Dans les deux cas, de puissants mouvements de conscience et de culture collective sont à l'œuvre qui posent autant de problèmes épistémologiques.

§ 4. — **Temporalités.**

Une troisième question, ou analogie, tient à la temporalité (15). Pour ce qui est de la preuve, l'analyse canonique est celle de Descartes dans les *Règles pour la direction de l'esprit*. Descartes renvoie la connaissance mathématique à deux

(14) Au sens du préconscient tel qu'il apparaît dans la métapsychologie freudienne et est susceptible d'être mobilisé pour comprendre le fonctionnement de la pensée mathématique : voir F. Patras, « Représentations d'objets et représentations de mots mathématiques », in *Le réel en mathématiques*. Ed. P. Cartier et N. Charraud. Paris, Agalma-Le Seuil, 2004, 289–302.

(15) Dans une autre direction que celle développée ici, on mentionnera sur cette question la dualité entre temporalité et spatialité : « The interplay [between algebraic formalization and geometric representations of mathematical structures and processes] provides a further example of the duality between temporal and spatial constructions which are the two fundamental ingredients of music according to the Fields medalist Alain Connes. As he suggested in a conversation with composer Pierre Boulez on the analogy between the creative process in mathematics and music : "Concerning music, it takes place in time, like algebra. In mathematics, there is a fundamental duality between, on the one hand, geometry — which corresponds to the visual arts, an immediate intuition — and on the other hand algebra. This is not visual, it has a temporality. [...] And one only perceives the development of algebra through music". » M. Andreatta, *op. cit.*

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

principes qui sont l'intuition (immédiate) et la déduction. L'articulation de l'intuition à la déduction est celle de l'immédiateté à la durée qui est propre au déroulement d'une preuve, les mathématiques ayant ceci de spécifique que la vérité y est reconductible à des enchaînements déductifs élémentaires (et donc à peu près immédiats) sur lesquels se fonde en fin de compte l'exactitude et la vérité :

> « *La plupart des choses sont l'objet d'une connaissance certaine, tout en n'étant pas par elles-mêmes évidentes ; il suffit qu'elles soient déduites à partir de principes vrais et connus, par un mouvement continu et ininterrompu de la pensée qui prend de chaque terme une intuition claire : ce n'est pas autrement que nous savons que le dernier anneau de quelque longue chaîne est rattaché au premier, même si nous ne voyons pas d'un seul et même coup d'œil l'ensemble des anneaux intermédiaires dont dépend ce rattachement ; il suffit que nous les ayons examinés l'un après l'autre, et que nous nous souvenions que du premier au dernier, chacun d'eux est attaché à ses voisins immédiats. Nous distinguons donc ici l'intuition intellectuelle et la déduction certaine, en ce que l'on conçoit dans l'une une sorte de mouvement ou de succession, et non pas dans l'autre ; et parce qu'en outre, pour la déduction, il n'est pas besoin comme pour l'intuition d'une évidence actuelle, mais que c'est à la mémoire qu'elle emprunte, d'une certaine manière, sa certitude.* »

Et, plus loin :

> « *Il arrive que la déduction se fasse par un si long enchaînement de conséquences qu'une fois parvenu à la vérité, nous ayons peine à nous rappeler la totalité du chemin qui nous y a menés ; aussi disons-nous qu'il faut prêter aux faiblesses de la mémoire le secours d'une sorte de mouvement continu de la pensée.* »
>
> R. Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. J. Brunschwig in *Œuvres philosophiques*, Bordas, 1988.

Aussi Descartes conseille-t-il de parcourir plusieurs fois ce chemin jusqu'à avoir une intuition du tout qui ne laisse presque plus aucune place, plus aucun rôle à la mémoire. Il s'agit donc, dans une certaine mesure, théorisée dans la 11e règle, de parvenir à une intuition simultanée du tout, la principale utilité de ce travail de passage à une entente immédiate du tout résidant dans la possibilité d'éduquer l'esprit à comprendre la dépendance mutuelle des arguments et d'aller par degrés du relatif, de l'occasionnel à l'absolu.

En d'autres mots, Descartes saisit l'aporie fondamentale de la pensée mathématique, dont la véracité s'établit dans l'enchaînement de déductions locales, mais dont l'essence, pour le mathématicien, réside plutôt dans les structures d'ensemble, l'enchaînement des raisons, la dépendance mutuelle des arguments — avec un dialogue permanent de la mémoire (qui capture la durée, l'étalement, la complexité d'un argument) avec l'intuition, qui est saisie immédiate et unifiante.

Cette aporie fondamentale se retrouve dans la musique où réapparaît le problème de l'articulation des structures locales (accords, thèmes...) aux structures globales qui supposent une articulation ordonnée en temps des

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

différentes composantes. Il est difficile de ne pas être tenté de comparer la sensation esthétique qui ressort d'un morceau à l'idée cartésienne d'une intuition unifiante à propos des preuves.

Là encore, la musique contemporaine questionne ces analogies — à travers par exemple l'idée d'introduire un aléa dans la disposition temporelle des briques élémentaires d'une partition, une idée qui, si elle était justifiée esthétiquement, serait en profond désaccord et invaliderait largement la possibilité même de l'analogie qui vient d'être suggérée. C'est un phénomène assez général : nombre de théories musicales récentes semblent remettre profondément en question les thèses que l'on pourrait avoir envie de défendre spontanément quant aux rapports mathémusicaux abordés du point de vue épistémologique.

Quoiqu'il en soit, l'analogie, si elle peut être formulée au niveau global de la preuve ou d'une partition peut également être formulée à un niveau purement local — avec un fort contenu phénoménologique. L'un des succès de l'analyse phénoménologique réside probablement dans l'analyse de la conscience intime du temps. L'écoulement du temps, pour la conscience, n'est pas descriptible par une seule présence ponctuelle de l'instant présent qui serait distincte du passé et du futur. Dans une large mesure, notre vie est plutôt partagée entre rétention et protention : le passé plus ou moins récent habite le présent, lui-même tendu vers le futur — par exemple le futur d'actes à accomplir.

En musique, cette protention se manifeste pour l'exécutant dans la lecture anticipative d'une partition et le décalage correspondant entre le déchiffrage et l'acte de jouer. De façon plus subtile, on retrouve aussi la dichotomie rétention/protention dans l'écoute avec, typiquement, la résolution des dissonances — le fait d'amener une dissonance en laissant l'auditeur dans l'attente de sa résolution harmonique. Très généralement, l'écoute est largement guidée par de tels mécanismes d'anticipation.

En mathématiques, au moins pour un mathématicien professionnel, la situation est à peu près semblable. Dans une majorité de situations il est possible d'anticiper le déroulement d'une preuve, d'attendre l'arrivée d'un argument, si bien que la lecture d'une preuve ou l'écoute d'un exposé mathématique, loin d'être la validation linéaire de ce qui a été dit, est plutôt marquée par l'attente. Le fait que cette attente soit déçue, que l'argument décisif ne soit pas celui qu'on attend est d'ailleurs quelque chose qui procure un fort plaisir esthétique, de même qu'un morceau de musique trop scolaire ne manquerait pas d'ennuyer [16].

Tout cela conduit naturellement à une autre question, qui est celle de l'architecture. Le problème du passage au global toujours, mais abordé non plus d'un point de vue temporel mais structurel. Pour le dire autrement, y aurait-il une théorie formelle possible de l'émergence de la signification et de la beauté ? Du point de vue mathématique, il ne s'agit plus du problème de la vérité d'un énoncé, de la justesse d'une preuve mais, plus profondément, des significations en jeu. La voie cartésienne indique là encore une réponse pour les mathématiques : la signification ultime d'une preuve pointe en direction de ce qu'il y a d'universel — mais il est douteux que l'universalité épuise

(16) « This brings us to the central thesis of the psychological theory of emotions. Namely : Emotion or affect is aroused when a tendency to respond is arrested or inhibited » L. B. Meyer, *op. cit.*

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

cette question de la signification ou, en tout cas, qu'il soit facile de caractériser conceptuellement l'idée d'universalité.

Le structuralisme mathématique à la façon de Bourbaki et Dieudonné a bien cherché à penser l'universalité au travers des structures, mais on sait bien que les choses sont plus complexes [(17)]. Au niveau des preuves, on pourrait peut-être avancer qu'il existe des stratégies de preuve, un peu à la manière des stratégies d'échec, et que ces stratégies, avec leur part d'universalité, capturent une partie importante de la signification en mathématiques. Il y aurait un art des stratégies de démonstration, en partie acquis, en partie reconductible au style propre à tel ou tel mathématicien, de même qu'il y a un art de la fugue.

Dans ce domaine il faut reconnaître que la musique est sans doute dans une situation plus favorable, ne serait-ce que du fait du caractère mieux délimité de son objet. L'analogie géométrique selon laquelle une partition pourrait être décrite par une version discrète d'un espace fibré sur l'axe temporel ouvre la voie à l'utilisation d'outils sophistiqués — comme la théorie des topos — pour penser l'émergence de structures globales. À ce jour, il est douteux que l'on puisse suggérer rien de comparable, même de façon très spéculative, pour décrire la structure des preuves mathématiques, à l'exception peut-être des travaux récents dans la lignée de V. Voevodsky sur la théorie homotopique des types [(18)], théorie dont la véritable portée fondationnelle doit encore toutefois faire ses preuves. Pour cette raison même, les résultats qui peuvent être obtenus par une approche topossique ou géométrique en musique sont susceptibles d'avoir une signification pour l'épistémologie mathématique, un peu à la manière des toy models de la physique mathématique qui permettent de déplacer les termes d'un problème dans un contexte où on peut commencer à les aborder. Pour dire les choses encore autrement, un certain nombre de recherches mathémusicales sont de ce point de vue, au-delà de leur intérêt musical spécifique, également un terrain d'expérimentation pour l'épistémologie mathématique.

§ 5. — **Créer.**

Tout cela conduit naturellement à la problématique de la création. La composition pose un certain nombre de problèmes similaires à ceux de l'écoute mais exacerbés par l'indétermination des matériaux. La même remarque vaut en mathématiques où l'activité proprement créative est largement préconsciente, et ce n'est que lorsqu'une idée se cristallise, à un moment assez avancé de la réflexion, qu'elle prend une forme codifiable.

Ce que le XVII[e] siècle a recherché, un « ars inveniendi », une théorie de la découverte proprement dite, n'existe toujours pas vraiment. Lorsqu'une classe de problèmes est déjà résolue, alors on peut bien entendu codifier leur résolution, mais il est très difficile d'aller au-delà et de comprendre, par exemple, la naissance d'un nouveau concept, d'une nouvelle théorie. C'est la raison pour laquelle la philosophie mathématique est à ce jour, pour l'essentiel, ce que l'on

(17) Voir F. Patras, *La Pensée mathématique contemporaine*, P.U.F., 2001.
(18) *Homotopy type theory : Univalent foundations of mathematics*, The Univalent Foundations Program, Institute for Advanced Study, 2013.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

pourrait appeler par analogie avec la mécanique, une statique : une description des objets, des états de choses, des équilibres existants. La dynamique des concepts reste à penser [(19)].

L'analogie avec la théorie de la musique se joue à ce niveau à deux ordres. On a d'abord, comme avec l'écoute, en composition musicale également, une certaine pertinence de l'opposition entre statique et dynamique — qui correspond, en gros, au passage du local au global — de la localisation en temps à l'enchaînement des composantes mélodiques, rythmiques et harmoniques d'une partition. Pourtant, au niveau de la création, le problème se pose différemment : il s'agit maintenant de comprendre l'émergence de ces enchaînements à partir de matériaux sonores isolés.

La deuxième analogie est plus spéculative : il s'agit de décider si la création, artistique et scientifique peut faire l'objet d'une science et quels sont les traits de cette science. La science de la création mathématique, à supposer qu'elle existe, relève-t-elle plutôt de la logique, est-elle homogène à la mathématique, ou enfin est-elle de nature plus épistémologique — renvoyant au problème général de la formation des concepts ? Et jusqu'où l'art de la composition musicale est-il mathématisable [(20)] ?

Si ces questions sont probablement en partie indécidables, on peut tout de même essayer de collecter des éléments très partiels de réponse et penser que les recherches du côté des mathématiques et de la musique peuvent œuvrer de façon collaborative.

Au niveau mathématique, l'apport le plus méthodique sur le problème de l'émergence de preuves provient sans doute de l'informatique théorique et des tentatives de construction de logiciels de démonstration automatique. Au témoignage de ceux qui se sont penchés sur ces questions, les résultats de ces tentatives restent très décevants : il est extrêmement difficile de codifier l'émergence de preuves et il semble que les recherches aient plus ou moins cessé pour privilégier la vérification de preuves, beaucoup plus accessible. Il est également délicat de décider jusqu'à quel point vaut le parallèle avec la musique — c'est-à-dire quel est l'écart entre les logiciels d'analyse musicale et ceux d'assistance à la composition. Il est d'ailleurs intéressant qu'on parle encore peu de logiciels d'assistance à la création mathématique — qui pourraient pourtant avoir un sens, et que le développement de l'Intelligence Artificielle va sans doute favoriser.

Si la création mathématique, dans sa globalité, échappe donc encore à une saisie systématique, on a pourtant quelques outils qui permettent de comprendre la formation de certains concepts et certains universaux — et les liens

(19) L'épistémologie historique à la française, de Bachelard à la philosophie du concept de Cavaillès s'y est essayée. Après une période d'oubli relatif ou de stagnation, on la redécouvre progressivement. Voir Hourya Benis Sinaceur, « From Kant to Hilbert : French philosophy of concepts in the beginning of the twentieth century », In : *The Architecture of Modern Mathematics : Essays in History and Philosophy*, J. Ferreirós and J. Gray (dir.), Oxford University Press, 2006, 349–376.

(20) Il y a bien entendu diverses approches, y compris computationnelles, à la création musicale. Dans cette direction, l'article de M. Andreatta, A. Ehresmann, R. Guitard et G. Mazzola, « Towards a Categorical Theory of Creativity for Music, Discourse, and Cognition », in *MCM 2013, LNAI 7937*, J. Yust, J. Wild and J.A. Burgoyne (Eds), 2013, 19–37, se propose par exemple d'aller vers un modèle des processus créatifs dans le cadre catégorial. Les auteurs notent par ailleurs que les modèles de la créativité ne peuvent se réduire à une composante algorithmique et computationnelle.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

avec les recherches contemporaines sur les théories mathémusicales sont assez forts ; une rationalité commune semble se dégager.

Un point clé est la théorie des catégories. Je parlerai ici uniquement, et brièvement, de sa signification pour l'épistémologie mathématique et l'émergence de nouveaux concepts. J'ai déjà eu l'occasion de le dire : l'une des clés et un des moments forts de la pensée mathématique est ce moment où, d'une preuve, se dégage quelque chose qui transcende l'objet, la preuve particulière que l'on considère. Ce passage à l'universel est une des composantes de la création et la théorie des catégories rend assez bien compte de certains de ses mécanismes avec l'idée de limite et celle, duale de colimite, ou encore avec l'idée d'adjonction (21) (22).

À un niveau purement philosophique ou cognitif, la question qui se pose avec beaucoup d'acuité est de valider ou d'inférer la thèse selon laquelle ces phénomènes d'émergence d'objets « limites » au sens catégoriel correspondent de façon authentique à des procédés universels de notre entendement — pour ce qui est des mathématiques —, thèse qui s'étend naturellement au domaine de la perception et de l'art. Il s'agit d'un sujet extrêmement important pour la théorie générale de la connaissance mais où il est difficile d'avancer au-delà des déclarations d'intention. Il resterait tout un travail à effectuer, sur des exemples et situations concrètes, pour comprendre ce qui se passe exactement.

(21) F. Patras, « Phénoménologie et théorie des catégories », *op. cit.*

(22) M. Andreatta a montré, dans le contexte musical, comment utiliser ces phénomènes pour résoudre des problèmes de classification de structures du type des réseaux de Klumpenhouwer. L'article « Towards a Categorical Theory of Creativity for Music, Discourse, and Cognition », *op. cit.*, aborde par ailleurs explicitement l'utilisation des limites, colimites et phénomènes connexes (Lemme de Yoneda) dans la création musicale.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Chapitre V

Formalisme, Exactitude, Rigueur



Jean-Louis Giavitto

Résumé

Si la rigueur est une nécessité pour l'informaticien qui s'adresse à une machine, peut-être un idéal pour le mathématicien ou le philosophe qui doivent convaincre leurs collègues, quelle place a-t-elle en musique pour le compositeur et l'interprète ? La partition est parfois comparée à un programme et dans le cas de la musique mixte, qui combine instrumentistes humains et réponses électroniques, la partition du compositeur est effectivement augmentée d'un programme informatique chargé de synthétiser les sons électroniques ou de transformer le son des instruments. Examiner la notion de rigueur dans le champ musical à partir de ses acceptions informatiques n'est donc pas dénué d'intérêt. Nous nous y essayerons à partir de quelques outils informatiques utilisés en composition assistée par ordinateur et pour l'électronique en temps réel.

> *Boulez n'a jamais admis l'idée que toute pensée, dans la pratique de l'art, serait de trop si elle n'était la réflexion sur les règles d'une technique et sur leur jeu propre.* [...]
> *Quel est donc le rôle de la pensée dans ce qu'on fait si elle ne doit être ni simple savoir-faire ni pure théorie ? Boulez le montrait : donner la force de rompre les règles dans l'acte qui les fait jouer.*
>
> Michel Foucault (Foucault 1994)

§ 1. — La rigueur, de qui et pour qui ?

Mathématiciens, philosophes, compositeurs et informaticiens doivent communiquer le résultat de leur travail qui se concrétise par un objet intermédiaire : preuve, essai, partition, programme. Faut-il alors attribuer la rigueur à l'émetteur, au récepteur, au médium de communication ? Il est certainement possible d'attribuer une qualité de rigueur à cet objet intermédiaire s'il permet une transmission efficace, c'est-à-dire concise, sans ambiguïté, robuste, pédagogique. Par exemple, certains compositeurs, comme Emmanuel Nunes, sont connus pour leur capacité à noter des structures rythmiques

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

complexes de manière à faciliter leur réalisation. Et les informaticiens discutent longuement de l'élégance de leurs programmes, désignant par là, entre autres, une économie de moyens pour arriver au résultat voulu. Ces objets intermédiaires relèvent de l'écriture et du texte (même s'il existe des démonstrations (Nelson 1993), des partitions (Sauer *et al.* 2009) et des programmes (PureData) purement diagrammatiques) et on pourrait donc aborder la rigueur dans ces domaines depuis l'angle littéraire. Cette remarque n'est pas anodine : elle pointe que le dispositif mathématique, philosophique, musical ou informatique relève aussi des œuvres de l'esprit et que les acceptions de la rigueur dans les sciences naturelles ne sont pas les seules pertinentes pour approcher cette notion.

C'est dans cette direction que nous souhaitons aller en examinant *la rigueur* non pas sous l'angle de l'exactitude, de la précision, de la complétude, de la validité, de procédure de vérité... mais en ce qu'elle s'oppose à *l'arbitraire*. Et comme contrairement au mathématicien et au philosophe, le compositeur et l'informaticien s'adressent tous deux à un intermédiaire, un interprète — instrumentiste ou machine — pour produire leur résultat final, nous tenterons de cerner cette réduction de l'arbitraire que représente la rigueur chez le compositeur et chez l'interprète.

§ 2. — Une rigueur formelle.

Le terme de rigueur s'associe pour un scientifique, presque comme par réflexe, aux sciences dites formalisées, tant la notion de formalisme semble aujourd'hui nécessaire pour sécuriser les conclusions que l'on peut tirer d'un ensemble de prémisses. Un système formel permet de définir de manière non-ambigüe un objet d'étude et, le plus souvent, introduit une notion de déduction qui permet de transporter une certaine propriété (par exemple la vérité) des prémisses aux conclusions.

La musique n'échappe pas à ce mouvement et ses objets ont depuis longtemps été formalisés à tel point qu'elle faisait partie, au sein du *quadrivium*, des quatre enseignements de mathématique aux côtés de l'arithmétique, de la géométrie et de l'astronomie. On peut formaliser la notion d'octave, d'échelle musicale, de mode, de système tonal (Andreatta *et al.* 2008), ce qu'a entrepris par exemple de manière systématique la *set theory* développée principalement aux USA par Allen Forte, à partir de la théorie dodécaphonique de Milton Babbit et en s'appuyant sur la théorie mathématique des groupes. Ces développements portent surtout sur la hauteur des notes qui n'est qu'un paramètre parmi d'autres du phénomène sonore et il est difficile de caractériser ce qui est préservé par les opérations de déduction ou de transformation du système : la consonance, la dissonance, ou la tonalité, sont par exemple des notions largement culturelles. Pourtant, même quand la théorie musicale n'est pas formalisée, le travail du compositeur présente des analogies avec celui du philosophe ou du mathématicien et s'y révèle une « logique musicale », y compris pour un compositeur comme Robert Saxton qui pourtant ne manifeste pas d'inclination particulière à théoriser son travail de composition :

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2021

> *Alors que la composition et le travail résultant ne sont pas concernés par la « logique » au sens philosophique du terme, il me semble qu'il existe (de manière latente ou manifeste, ou bien les deux) une relation tangentielle entre le processus de composition et certaines procédures définies en philosophie. Par exemple, dans la pratique tonale (que Schoenberg et Schenker ont acceptée), la prémisse de l'attente, de la surprise ou de la résolution est similaire au fameux problème de l'induction dans lequel on se pose la question de savoir « si le soleil va se lever demain ». On pense que oui car il l'a toujours fait, mais on ne peut être certain que cela sera toujours le cas. Lorsqu'on écoute et lorsqu'on compose de la musique tonale, on le fait toujours contre, ou en liaison avec, la quasi-certitude que des progressions fondamentales spécifiques vont avoir lieu ; la résolution de la tension harmonique peut être différée, mais on sera aussi certain qu'elle aura lieu que le soleil se lèvera demain.* [...] *Si la prémisse est clairement définie, alors l'argument musical peut commencer ; dans le cas de la pratique tonale, la prémisse est en grande partie pré-ordonnée, étant posée* a priori *par rapport à des pièces spécifiques, mais cela n'enlève rien au caractère unique des œuvres individuelles de cette époque. Dans la musique post-tonale, différentes méthodes ont été inventées, mais aucune ne couvre l'ensemble des pratiques. Le résultat d'une telle situation est que chaque œuvre doit définir sa prémisse, et ce n'est que le déploiement qui révèle cette prémisse à tous les niveaux ; bien que n'importe quel compositeur expérimenté connaisse sa prémisse générale sans doute intuitivement, cette dernière demeure en cette fin du XX^e^ siècle plutôt un problème d'ordre individuel.* »
>
> (Saxton 1988)

La formalisation, quand elle existe, se présente donc comme un jeu abstrait de formes dont les références, arbitraires, sont à chercher chez le compositeur et non dans des universaux. Et de nombreux compositeurs contemporains développent explicitement leur système formel personnel comme un ensemble de règles et de contraintes, plus ou moins souples, permettant de « produire du matériau (musical) », pour l'appliquer spécifiquement à la réalisation d'une seule œuvre ou en l'affinant à travers plusieurs créations, l'incorporant à sa boîte à outils. Il est utile de rappeler ici la terminologie introduite par Marco Stroppa :

> « *Un* système compositionnel *est une collection de techniques d'écriture s'appliquant à un certain matériau musical.*
>
> *Le* matériau musical *est produit et travaillé par le compositeur, en tant que tel, indépendamment de son usage dans une œuvre donnée. Ce matériau est extrêmement varié : il peut être simple ou complexe, concret ou abstrait, structuré ou pas, etc. Sa définition peut nécessiter ou non un système compositionnel préexistant et, à l'exception des matériaux les plus simples, il reste lié à ce système et au contexte de sa production ou de son utilisation. Dans le cadre du système tonal, les éléments suivants sont des exemples de matériaux possibles : une hauteur de note, un instrument, un accord, un fragment de mélodie, un long motif rythmique. Quel que soit son type, le matériau demande une représentation appropriée sur laquelle il est possible d'opérer efficacement.*

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

> *Une* technique d'écriture *est un ensemble de procédures utiles, allant des prescriptions les plus vagues aux règles les plus strictes, qui peuvent être appliquées pour mettre en forme et transformer le matériau utilisé dans le contexte d'une pièce. La généralité et le pouvoir d'extrapolation d'une telle technique est inversement proportionnelle à la complexité en soi du matériau et de la représentation choisie. À titre d'exemple, on peut noter qu'une technique aussi sophistiquée que « l'écriture d'une fugue tonale » ne peut s'appliquer qu'à un matériau sonore relativement neutre et ne fonctionnera pas si les sons impliqués sont trop complexes.*
>
> *La* fonction *d'un système compositionnel est double : il peut aussi bien être utilisé comme grille de lecture pour* analyser *un morceau de musique que comme un* procédé génératif *permettant de produire du matériau nouveau, même si sa portée se restreint au travail ordinaire et qu'il ne pourra rendre compte des « courts-circuits » qui sont sans doute l'aspect le plus intéressant de l'activité du compositeur.*
>
> *Un* système de composition *se focalise donc sur le côté poétique de la création musicale et ne doit pas être confondu avec un* modèle de composition, *incarnation spécifique d'une certaine théorie de la musique utilisée pour comprendre et tester des systèmes de composition. Les théories et les modèles de composition sont généralement construits sur des exemples musicaux déjà existants et en tiennent compte, tandis que les systèmes de composition sont utilisés, consciemment ou non, indépendamment de toute théorie.* »
>
> (Stroppa 1989)

La notion de système formel peut donc apparaître à deux niveaux : celui très général d'une théorie musicale, et celui plus spécifique du système compositionnel mis en œuvre par un compositeur dans le contexte d'une pièce donnée. Dans la première catégorie, on peut citer le sérialisme intégral, tel que défini par Stockhausen :

> « *La pensée sérielle est donc quelque chose qui est apparu dans notre conscience et qui y restera pour toujours : c'est la relativité et rien d'autre. Ça dit juste : utilisez tous les compositions d'un nombre arbitraire d'éléments, n'oubliez pas les éléments individuels, utilisez-les tous avec la même importance et essayez de trouver une gamme équilibrée afin que certains intervalles ne soient pas plus grands que d'autres. C'est une attitude spirituelle et démocratique envers le monde.* »
>
> (Stockhausen *et al.* 1979)

De ce point de vue, le système sériel répond à l'arbitraire en ne privilégiant aucun choix spécifique, donnant lieu à une « rigueur en creux » avec cette attention scrupuleuse à ne pas privilégier certains objets (intervalle, accord, etc.).

Plutôt que d'examiner les nombreuses théories musicales et leur formalisation plus ou moins technique, nous porterons notre attention dans la suite de ce chapitre sur les systèmes compositionnels spécifiques à un compositeur. On peut citer quelques exemples célèbres et documentés de systèmes compositionnels : les premier et second canons de *l'Offrande Musicale* de Jean Sébastien Bach dont la partition peut se lire comme un ruban de Moebius, les *matrices*

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

de Pierre Boulez, les *square roots* de John Cage, les *organismes informationnels musicaux* de Marco Stroppa, les *processus markovien* de Philippe Manoury, etc.

Un exemple, impressionnant par son déploiement déductif à tous les paramètres musicaux, est celui de la *super-formule* employée par Karlheinz Stockhausen pour les sept œuvres scéniques du cycle *Licht*. Cette super-formule agrège trois formules associées aux trois personnages principaux Michael, Eva et Lucifer. Une formule se présente comme un court fragment mélodique, généralement monophonique, fourni avec la spécification d'autres paramètres musicaux (par exemple, la dynamique). Ainsi, « La formule est **plus** qu'un leitmotiv ou qu'une caractérisation psychologique, **plus** qu'un thème ou une série génératrice : la formule est la matrice et le plan des micro- et des macro-formes [...] » (c'est Stockhausen qui souligne). Elle s'étend d'ailleurs à la spécification d'éléments scéniques non musicaux, comme par exemple les mimiques du visage de Lucifer projeté sur l'orchestre (*cf.* fig. V.1).

Figure V.1. Le visage de Lucifer projeté sur l'orchestre lors de *Samstag aus Licht*. Création Le Balcon, 28 juin 2019 à la Philharmonie de Paris.



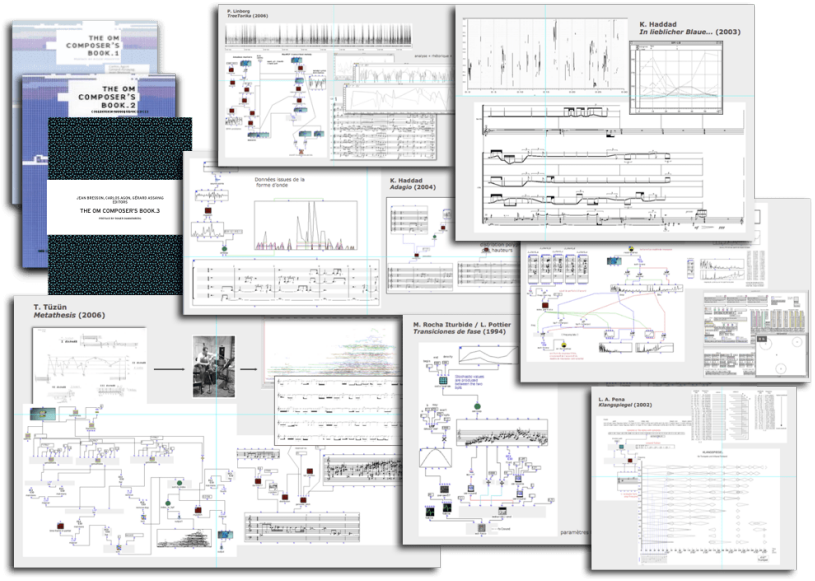
Un système compositionnel peut se référer explicitement aux mathématiques, comme l'illustre le travail de Iannis Xenakis, ingénieur, architecte, compositeur et fondateur du CEMAMu, le Centre d'Études de Mathématique et Automatique Musicales. Dans son premier livre, *Musiques formelles* (1963), il présente par exemple l'application à son travail de la théorie des probabilités (dans les pièces *Pithoprakta* et *Achorripsis*, 1956-1957), de la théorie des ensembles (*Herma*, 1960-1961) et de la théorie des jeux (*Duel*, 1959 ; *Stratégie*, 1962).

Sans nécessairement se référer à des objets et des notions mathématiques développées par ailleurs, l'ensemble de règles et procédures, revendiquées ou cachées par le compositeur, devient complètement explicite avec l'utilisation d'un outil informatique de composition assistée, comme par exemple le logiciel

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

OpenMusic. Il se présente comme un langage de programmation visuel permettant à un compositeur de calculer des structures musicales symboliques (*cf.* fig. V.2). L'utilisation d'OpenMusic a donné lieu à l'édition de trois fort volumes, les *OM Composer's Book* (Agon *et al.* 2006–2016), où une soixantaine de compositeurs présentent le système compositionnel à la base d'une ou plusieurs de leurs compositions. Cependant, si ces compositeurs livrent dans leur contribution leurs « recettes de cuisine », peu est dit quant à leur justification : pourquoi ces règles et pas d'autres ?

Figure V.2. The OM Composer's book. Les recopies d'écran correspondent à des programmes visuels permettant de calculer diverses représentations musicales, tant symboliques (accords, fragment de partition) qu'analogiques (spectre, descripteurs audios).



La justification d'un système compositionnel tourne vite à une régression sans fin. Tom Johnson, qui se considère lui-même comme un compositeur minimaliste, y répond par un formalisme extrême, abolissant la distinction traditionnellement établie entre la forme et le fond, en présentant sa musique comme une pure illustration de concepts mathématiques combinatoires déterminant tout ou presque de la composition. La justification ne repose pas sur l'effet produit, ni sur des arguments ou des théories qui seraient internes au domaine musical, mais sur l'existence d'une structure logique, géométrique ou arithmétique, qui lui est extérieure et que la musique vient simplement rendre audible (Johnson *et al.* 2011). La notice de concert de *Vermont Rythms* indique par exemple :

> « *Cette pièce s'appelle Vermont Rhythms parce qu'elle n'aurait jamais été écrite sans la coopération de deux mathématiciens travaillant à l'Université du Vermont à Burlington. En réponse à une de mes questions, Susan Janiszewski, avec son directeur de thèse le professeur Jeffrey H. Dinitz, a*

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

> *dressé la liste des 462 rythmes de six notes possibles sur une période de 11 temps. Leur liste impressionnante répartit les rythmes en 42 groupes de 11, chaque groupe formant un carré de 11 par 11. Le premier carré, les 11 premières mesures de la musique, est montré sur la couverture, de sorte que l'on peut mieux apprécier la symétrie de ces carrés. Tous les 42 carrés contiennent six éléments dans chaque rangée et six éléments dans chaque colonne, donnant une variété rythmique maximale dans les 11 phrases de chaque carré. Chaque rythme de six notes a exactement trois temps en commun avec chacun des 10 autres, et les mathématiciens apprécieront les symétries supplémentaires de ces configurations.*
> *Mon intérêt initial était dans les 462 rythmes, mais je me suis vite rendu compte que je pouvais choisir les hauteurs en utilisant les 462 accords de six notes possibles sur une gamme de 11 notes en même temps, alors je l'ai fait. Bien sûr, une grande partie de cette structure ne sera pas entendue consciemment, même par des auditeurs très astucieux, mais certaines seront perceptibles par tous, et il est satisfaisant de savoir que de nombreuses symétries inaudibles sont également présentes, se reflétant l'une l'autre en arrière-plan.* »

Tom Johnson veut « trouver la musique, pas la composer » cherchant « quelque chose qui n'exprime pas ses émotions ». Ainsi, « Les mathématiques sont un moyen pour éviter des décisions subjectives » (Delahaye 2004). Plus généralement, la rigueur, qui est alors vue comme le respect scrupuleux d'un formalisme, se substitue à la tradition pour assurer la cohérence d'une pièce et faire barrage à l'arbitraire des choix musicaux. Cette idée de cohérence à assurer se retrouve exprimée par Roger Reynolds :

> « [...] *à notre époque, il semblerait que ce qui est partagé — parmi les compositeurs professionnels, parmi les auditeurs cultivés et, de manière beaucoup plus problématique, entre les membres de ces deux groupes — soit inégal, imprévisible et, en conséquence, sujet à caution. Si ce postulat est vrai, cela signifie alors qu'il revient à l'artiste, dans une plus grande mesure qu'en des temps (et/ou des sociétés) plus homogènes, de créer sa propre forme de cohérence interne — de déterminer une « tradition de l'instant ». C'est cette conviction, plutôt qu'un désir immodéré de créer diagrammes, tableaux ou schémas, qui m'a d'abord poussé à m'engager dans cette voie. À l'évidence, si ces tentatives visant à prévoir et à assurer une cohérence logique et une intégrité affective ne m'avaient paru, à l'audition, fructueuses, j'aurais alors adopté d'autres approches. Sauf avis contraire, mon expérience en tant que compositeur et enseignant m'a convaincu que s'appliquer à forger une cohérence individuelle pertinente participe en effet (bien qu'on puisse le déplorer) de la tâche du compositeur de musique contemporaine.* »
>
> (Reynolds 2004)

Dans la même direction, Robert Saxton, relève que : « [...] pour les systèmes axiomatiques, le test ultime est la cohérence et non pas la vérité, une attitude qui semble également valable pour la composition et ses processus de pensée » (Saxton 1988).

Pourtant, même quand les pièces de Tom Johnson se présentent explicitement comme une pure énumération de solutions à un problème combinatoire,

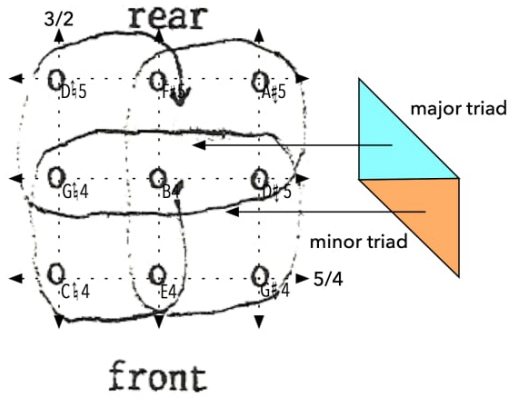
© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

elles ne se laissent pas réduire à une cohérence mathématique. Ou pour le dire autrement, la musique excède une structure mathématique, même quand celle-ci lui est prescrite, et par bien des façons.

D'abord parce que la structure mathématique détermine *presque* toute la composition, *mais pas toute*. Le choix des instruments, des timbres, des durées de notes, du tempo (paramètres qui dépendent du compositeur) et des nuances, du phrasé, des appuis (qui dépendent des interprètes) échappe le plus souvent à la prescription formelle. Tout comme la « mise en scène musicale » : beaucoup de pièces de Tom Johnson ne peuvent s'apprécier pleinement que dans l'écoute et le dispositif du concert. L'exemple de *Nine Bells* (1979) est éclairant : cette œuvre est écrite pour 9 cloches d'alarme plates et rouges. Suspendues, elles forment un carré de 3 par 3. La musique est produite par l'interprète qui se déplace à l'intérieur de ce quadrilatère en frappant les cloches ou pas selon des rythmes cycliques particuliers, le long d'un parcours précis qui change à chacune des neuf séquences de l'œuvre, *cf.* fig V.3. La pièce induit beaucoup de déplacements, plus ou moins rapides, et le son des pas fait partie intégrante de l'œuvre en fournissant une pulsation qui elle aussi dépend de la section. Et si l'interprète ne frappe qu'une seule cloche à la fois, elle peut l'être avec le manche ou le feutre de la baguette, selon une règle qui se superpose à celles réglant les déplacements dans l'espace ou le choix des cloches à faire tinter (NineBell 2018).

Si la matière sonore reste simple, le dispositif mis en place induit chez l'auditeur-spectateur les mêmes attentes et les mêmes anticipations qu'à l'écoute d'une œuvre plus classique, son esprit ne pouvant s'empêcher de deviner les règles à l'œuvre dans ce qui se donne à entendre et à voir. Et quand il réussit, enfin, à prévoir le comportement du percussionniste, la séquence s'achève et un nouveau jeu de contraintes se met en place pour la suivante. Ainsi, Tom Johnson travaille une dramaturgie de nature musicale — en dosant à travers l'écoute répétition, attente, surprise, anticipation, résolution,... —, dramaturgie imposée par le choix du compositeur et qui reste en-dehors du système formel qui pourtant organise la pièce.

Figure V.3. Schéma explicatif extrait de la partition de *Nine Bells* (1979) de Tom Johnson.



© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 3. — L'exactitude de l'interprétation, la limitation de la notation.

Un autre argument plaide pour ne pas réduire une pièce musicale à son organisation mathématique telle que décrite par sa partition : si c'était le cas, on pourrait se contenter de jouer cette partition par ordinateur, ce que Tom Johnson ne propose pas. Au contraire, comme beaucoup de compositeurs, il entretient de nombreux liens avec les interprètes de sa musique à laquelle l'interprétation humaine apporte une tension particulière, tension préférée à l'exécution méticuleusement exacte de la partition par une machine.

Les liens entre compositeurs et interprètes passent grandement par la partition et la notation musicale. Mais comme déjà indiqué, la partition ne transcrit qu'une partie de la pensée du compositeur et ne spécifie que partiellement le son à produire, comme le précise Philippe Manoury :

> « *La notation musicale est de nature symbolique : elle n'est pas une description mais une représentation du phénomène sonore. Cependant, dans son mode de représentation, il est clair que la notation musicale ne représente que partiellement le contenu sonore qui va en être déduit. Elle ne rend pas compte de la totalité perceptuelle de ce contenu mais que d'une partie, certainement la plus décisive pour le compositeur.* »
>
> (Manoury1)

La notation musicale est une représentation symbolique du phénomène sonore. L'analyse de la notation musicale par Nelson Goodman dans *Languages of Art* (1976) s'écarte de la notation-comme-langage et de l'attention portée à la distinction syntaxe/sémantique, pour se focaliser sur la fonction référentielle de tout système symbolique. La rigueur ne se réduit alors pas à l'adhésion à une syntaxe, mais à la mise en place d'un système pertinent de références, communes (la convention, la tradition) ou individuelles, qui fixe les relations entre la partition et son exécution. Cette fonction référentielle se décline pour Goodman en deux modes, la dénotation et l'exemplarité : si le prédicat « bleu » dénote l'ensemble des choses bleues, les choses bleues réfèrent au prédicat bleu en ce qu'elles sont typiques du bleu et non d'un autre prédicat. Ainsi, une mélodie, telle que notée dans une partition, peut se jouer sur n'importe quel instrument de musique. Et n'importe quelle réalisation de cette mélodie peut servir à la transcrire en une partition. Car ce qui est transmis à travers la notation traditionnelle de la musique occidentale, ce qui est noté, repose sur la référence à la hauteur des sons, leur durée, leur dynamique (intensité du son), et évacue largement les autres paramètres comme par exemple le timbre. Bernd Zimmermann indiquait :

> « *Un des phénomènes les plus remarquables de l'audition tient dans notre capacité à percevoir la distance qui sépare différents sons : l'intervalle. Grâce à lui se crée d'un seul coup un vaste système de relations, qui confère au son un premier ordre. C'est là surtout que réside l'importance de l'intervalle. Ce dernier nous est lui-même connu sous deux formes temporelles différentes : la succession d'une suite de son et la simultanéité d'un accord composé de plusieurs sons.* »
>
> (Zimmermann 1985)

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Le vaste système de relations référées par la notation se concentre donc largement sur la hauteur et la durée et passe sous silence (sans jeu de mot) les autres dimensions de la matière sonore. Ce non-dit de la notation n'est pas vu en musique comme un défaut mais comme une abstraction bienvenue, une économie d'expression qui permet au compositeur de se concentrer sur les paramètres du phénomène sonore qui lui importe (1) :

> « *L'écriture musicale est basée sur un vocabulaire de signes extrêmement simple en regard de la réalité sonore. C'est même cette économie de moyens qui la caractérise qui a permis d'élaborer des constructions formelles d'une grande complexité. Il est probable que si l'écriture avait dû rendre compte du phénomène sonore dans sa totalité, de telles constructions n'auraient jamais pu voir le jour. En quelque sorte, la notation musicale est une sorte de métonymie du phénomène sonore : le tout est exprimé par une partie seulement.* »
>
> (Manoury1)

Cette sous-détermination laisse le champ libre à l'interprétation : tous les éléments que l'interprète va y greffer afin de constituer un véritable objet musical avec une qualité sonore, un phrasé, une attaque, une résonance... Guerino Mazzola parle de la partition comme d'un geste surgelé qu'il faut dégeler lors de l'interprétation, mais ce réchauffement ne peut se comparer à l'exécution d'un programme informatique : c'est un processus ouvert qui demande une création de l'interprète afin, comme l'exprime Theodor Adorno, de passer d'un état solide à l'état liquide de la musique. L'*agogique* par exemple, cette « théorie du mouvement dans l'exécution musicale » qui désigne les légères modifications de rythme ou de tempo dans l'interprétation d'un morceau de musique en opposition à une exécution littérale, est de la responsabilité de l'interprète (2). Cet espace de liberté laissé par le compositeur à l'interprète n'est pas sans rappeler le concept de *tsimtsoum*, dérivé d'un mot hébreu signifiant contraction, et désignant le retrait du créateur de sa création afin de laisser place à quelque chose qui n'est pas lui. L'espace laissé vacant par cette contraction primordiale est ce qui permet à une nouvelle lumière créative de rayonner. L'acte créateur initial n'est pas vu comme une révélation qui se déploie partout, un processus totalisant et envahissant, mais comme un exil libérateur.

Pour un compositeur comme Brian Ferneyhough, associé à l'école de la *nouvelle complexité*, la liberté de l'interprète peut aussi s'acquérir par un trop-plein. Les compositeurs de cette mouvance produisent des œuvres présentant une extrême difficulté d'exécution : le vocabulaire des hauteurs utilise beaucoup les micro-tons, les partitions font appel à de nombreuses figures de notes de

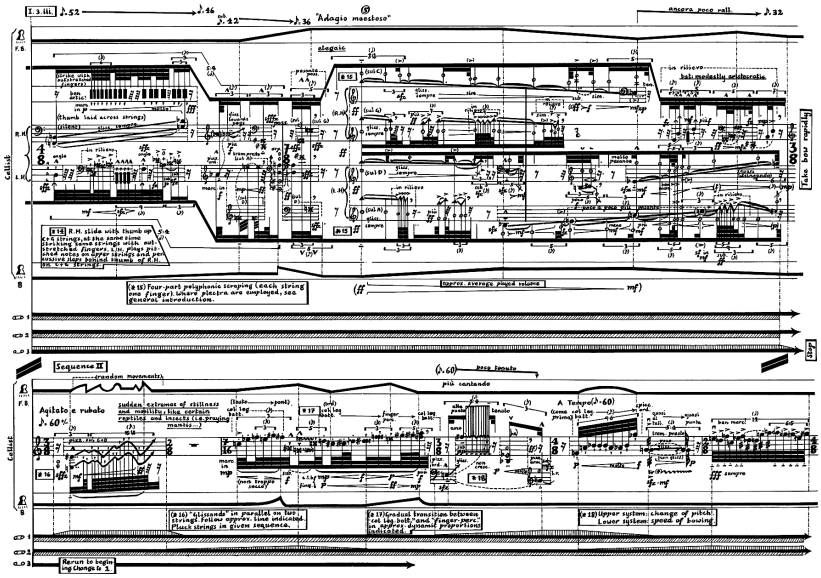
(1) Avant de servir de medium pour instruire l'interprète ou le chef d'orchestre, la partition est un outil de travail du compositeur, un support de l'imagination et de la pensée musicale à destination de lui-même.

(2) On trouvera à l'adresse https://nubo.ircam.fr/index.php/s/eXkxcB9MkG6i5RH deux réalisations de l'étude n°3 de Liszt *Un sospiro*. L'une correspond à la réalisation mécanique de la partition, l'autre à une interprétation de Frédéric Lamond datant de 1905 et enregistré sur carton perforé. La partition et le carton perforé ont tous deux été convertis au format midi et le même séquenceur a été utilisé pour le rendu sonore, afin de focaliser la comparaison sur les nuances et l'agogique. La première interprétation, mécanique, a une durée de 3′32 alors que la seconde fait 5′29.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

rapports inhabituels et imbriquées en de multiples couches, et la réalisation implique des changements rapides et complexes dans les tempi, la dynamique, l'articulation et la technique de jeu (on peut en voir un exemple à la figure fig. V.4). L'objectif pour Ferneyhough n'est pas d'obtenir une interprétation exacte de ce qui est noté, mais plutôt de déborder l'interprète afin que celui-ci soit acculé à faire des choix (Duncan 2010) : ne pouvant tout jouer de ce qui est spécifié, que va-t-il retenir dans son exécution ? Quels éléments seront éludés au profit de quelle mise en exergue ? À travers le défi amical lancé par le compositeur, celui-ci fait confiance à l'interprète et à son expérience pour retenir de sa partition ce qu'il considère comme le plus signifiant pour le discours musical.

Figure V.4. Une page de la partition de *Time and motion study II* par Brian Ferneyhough.



Dans les deux cas, « l'interprétation commence là où s'arrête l'écriture, et est rendue possible par la nature même de cette écriture » (Manoury1). Dans ce contexte, que peut signifier alors la notion de rigueur pour un interprète, au-delà du respect de la partition, partition dont on a vu qu'elle sous-détermine le processus sonore à produire ?

Une réponse possible est d'identifier la rigueur à la *fidélité* : une interprétation rigoureuse est une interprétation fidèle à l'intention du compositeur. L'espace vacant laissé par la notation musicale est rempli par la poursuite du projet de l'auteur. Cette identification pose immédiatement une autre question : comment ne pas trahir la pensée musicale initiale et au contraire l'enrichir ? L'interprète n'est pas complètement démuni pour y faire face. Les textes originels, la tradition et la transmission, les contraintes de l'instrument, les analyses musicologiques... peuvent le guider.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Interprétation et musique mixte : la rigueur de la machine.

Cette tradition, si importante pour guider l'interprète ou le chef d'orchestre, fait défaut dans le cas de la musique contemporaine. Et plus difficile encore dans le cas de la musique mixte — une machine ne s'accommodant pas de l'indétermination —, comment interpréter la partie électronique ? Le problème ici n'est pas tant de spécifier complètement les sons électroniques à produire (il n'y a pas d'autre manière que de les programmer et ils répondent donc *de facto* aux souhaits du compositeur) mais de permettre aux musiciens et à la partie électronique de jouer ensemble. Se déploie ici une autre dimension de la rigueur : la musique se joue à plusieurs et la rigueur de l'interprète implique donc aussi ses relations aux autres musiciens.

Originellement, la musique mixte impliquait une partition jouée par des musiciens accompagnés de sons électroniques fixés sur une bande magnétique. Il n'était en effet pas possible de calculer en temps-réel les sons électroniques qui intéressent les compositeurs et ils étaient donc produits et enregistrés avant le concert. Cela oblige les musiciens à suivre scrupuleusement l'enregistrement, perdant ainsi une grande partie de la dimension interprétative de la musique vivante (mais ouvrant un nouveau territoire de sons inouïs). Le développement de matériels dédiés et l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs a rendu possible « dans le vif du concert » (Manoury2) la synthèse de sons électroniques et le traitement en temps réel des sons issus des instrumentistes (pour le transformer, y ajouter des effets, le spatialiser). Il est ainsi possible de faire dépendre les sons électroniques de paramètres connus uniquement lors de l'interprétation.

Mais pour cela il faut lancer les calculs « au bon moment » afin que le son électronique s'aligne au son instrumental comme prévu dans la partition : on parle de *synchronisation*. L'approche encore souvent utilisée est de permettre à un musicien, ou à un technicien son, de déclencher ces calculs à l'aide d'une pédale ou d'un interrupteur. Ces déclenchements peuvent être nombreux, ce qui amène parfois à développer une voix instrumentale dédiée, jouée sur un instrument midi, dont l'objectif n'est pas de produire un son mais de déclencher l'électronique au moment adéquat [(3)]. Cette approche ne règle pas tout. En particulier, la machine n'a pas d'information sur la progression du musicien dans sa partition : seuls des événements ponctuels sont notifiés lors de leur occurrence, ce qui ne permet pas de prendre en compte une information comme le tempo joué (Giavitto 2014).

Pour aller plus loin dans la prise en compte des relations temporelles des instrumentistes humains, il faut se tourner vers le *suivi de partition*. Un suiveur de partition est un logiciel qui aligne un signal audio qu'il reçoit en temps-réel avec les événements symboliques d'une partition. Avec le système *Antescofo*, Arshia Cont a proposé de coupler un suiveur de partition capable d'inférer un tempo, avec un langage de programmation temps-réel, afin de synchroniser directement le calcul de la partie électronique avec les instrumentistes, grâce aux informations fournies par le module de suivi (Cont 2011). Il devient ainsi

(3) C'est le cas pour l'animation du visage de Lucifer, citée plus haut, fig. V.1. Le régisseur a écrit une partition spécifique, jouée sur un clavier midi, pour synchroniser cette animation avec la partition de l'orchestre.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

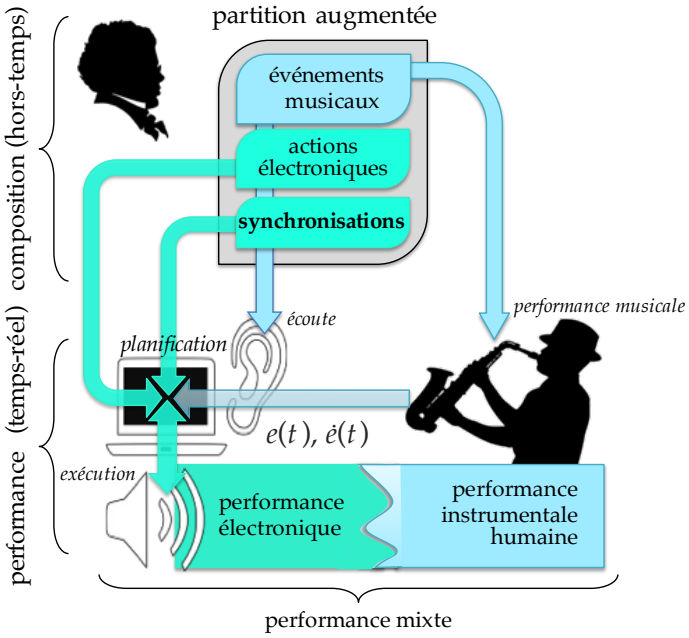
possible de définir des interactions temporelles complexes entre partie électronique et musiciens (Cont *et al.* 2012), *cf.* fig. V.5.

Une partition augmentée *Antescofo* combine trois ingrédients : la partition qu'un instrumentiste doit jouer et qui sera suivie par la machine d'écoute, les calculs à effectuer pour produire l'accompagnement électronique, et des *stratégies de synchronisation* qui spécifient comment prendre en compte le timing de l'interprète et ses écarts vis-à-vis de la datation virtuelle spécifiée par la partition, pour déterminer à quel moment il faut lancer les calculs, *cf.* fig. V.6. C'est donc le compositeur qui prévoit, lors de la composition, comment l'électronique doit s'adapter à la partie instrumentale, ce qui amène des problèmes inattendus.

Le compositeur Marco Stroppa souhaitait disposer d'une stratégie de synchronisation qui suive au plus près la position du musicien dans la partition. Son objectif était de déclencher un effet différent à chaque note jouée par un soliste. La stratégie de synchronisation par défaut en *Antescofo* est qualifiée de « loose » : elle fait dépendre la temporalité de la partie électronique, du tempo du musicien. Une fois déclenchée, seule cette information est utilisée pour la progression de l'électronique. Cela permet d'avoir une voix électronique très souple mais qui, surtout si elle s'étend sur une durée importante, peut se décaler par rapport aux notes jouées par l'instrumentiste. Cette stratégie n'est pas adaptée au problème précédent car l'occurrence d'une note peut précéder un peu, ou suivre un peu, la date qui aurait été prévue en utilisant le tempo du

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

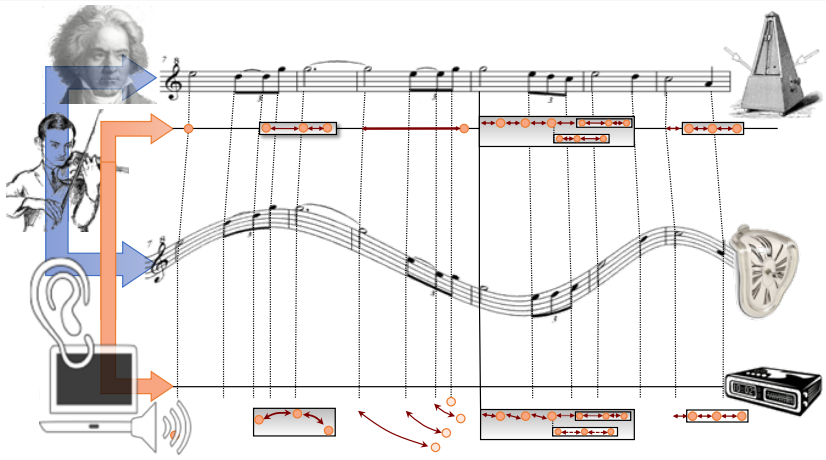
Figure V.5. Le système Antescofo permet de lancer des calculs spécifiés dans une partition augmentée. Les événements musicaux e de la partition sont repérés dans le flux audio en provenance du musicien, ce qui permet de lancer les actions associées et de prendre en compte le tempo $\dot{e}$ de l'instrumentiste.



musicien. En effet, le tempo inféré correspond à une « vitesse moyenne » et ne permet pas de prédire l'arrivée d'une note très précisément. Nous avons alors introduit une nouvelle stratégie de synchronisation « tight » qui tient compte d'abord de l'occurrence des événements musicaux pour faire progresser la voix électronique, le tempo n'étant utilisé qu'en l'absence de cette information. Les premiers essais furent décevants : Marco Stroppa nous rapporta que l'instrumentiste avait une fâcheuse tendance à ralentir son tempo avec cette stratégie. Une explication possible de ce comportement est que les calculs impliqués par la stratégie « tight » prennent un peu trop de temps, ce qui amène à déclencher l'électronique très légèrement en retard [(4)]. Après de multiples tests, cette explication dut être écartée : la latence du système restait en-dessous du seuil de simultanéité.

L'explication s'est révélée complexe et tient à une mauvaise boucle de rétroaction entre le musicien et la machine. La stratégie « tight » implique que la réponse électronique ne précède *jamais* l'événement musical et le musicien en déduit que son partenaire, la machine, est en train de ralentir. En effet, les fluctuations inévitables d'un musicien qui suit un partenaire produisent des événements qui sont parfois légèrement en avance et parfois légèrement en

Figure V.6. L'instrumentiste qui interprète une partition va s'écarter des relations temporelles spécifiées dans la partition. Cet écart, voulu, doit être pris en compte pour la synchronisation des actions électroniques. Plusieurs stratégies de synchronisation sont possibles et elles dépendent du contexte musical : on peut suivre le tempo, si l'instrumentiste et la voix électronique sont conçues comme deux voix parallèles flottantes l'une par rapport à l'autre. On peut aussi suivre strictement les occurrences de notes, si on souhaite par exemple une synchronisation plus précise qui permet d'aligner événements instrumentaux et événements électroniques.



(4) L'oreille perçoit comme simultanés deux sons qui se produisent à moins de 15 à 20 ms d'écart (cela dépend de la nature des sons, de leur intensité, de la réverbération du lieu d'écoute, etc.). Si *Antescofo* doit produire une réponse simultanément avec l'occurrence d'un événement musical, il dispose donc de 10ms pour ce faire. Le délai entre l'occurrence d'un événement et la production de sa conséquence est la *latence* du système, une quantité qu'il faut minimiser.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

retard. Par contre, dans le cas où le musicien ralenti (*resp.* accélère) progressivement, ses événements seront toujours un peu en retard (*resp.* en avance). La machine ne précédant jamais le musicien, ce dernier en déduit qu'elle est en train de ralentir. Et la machine réglant son allure sur lui ralentit aussi. On voit que l'excès de rigueur de la machine induit ici un comportement inadéquat.

§ 4. — La fidélité à un projet en construction.

Concevoir la notation comme cristallisation d'un formalisme qui incarnerait à son tour un certain idéal de rigueur, ou la rigueur de l'exécution comme un idéal de précision et d'exactitude, passe à côté de ce que cette notion peut avoir de dynamique. Dans ces conceptions, le formalisme ou la partition sont posés comme une norme donnée a priori, une autorité qu'il faut respecter. Plus elle sera respectée, plus on sera rigoureux.

C'est ignorer qu'il peut y avoir plusieurs logiques qui peuvent concourir à déterminer une œuvre et qu'il n'est pas toujours possible de les concilier. Pour Carmine E. Cella, quelque soit le projet du compositeur, il devra confronter une *raison technique* et une *raison poétique* : la musique est une matière qui résiste.

C'est aussi ignorer que ces logiques ne sont pas nécessairement posées *a priori* : la composition musicale, tout comme l'interprétation (il suffit de penser aux nombreuses répétitions nécessaires pour préparer un concert), sont des processus qui se construisent dans une durée.

Écrire de la musique ne se réduit pas à transcrire dans une partition une idée qui serait présente, tout entière claire et précise, dans la tête du compositeur ; c'est un processus qui implique des allers-retours entre l'idée et son inscription, des évaluations et des réévaluations, des repentirs et des remises en cause. Cette dialectique permet le paradoxe de l'*écart* : comment un compositeur peut-il déroger à la règle qu'il s'est lui-même donnée ? et ce faisant, fait-il preuve d'un manque de rigueur ?

Philippe Manoury utilise des formalismes grammaticaux qu'il appelle grammaires musicales génératives (GMG), « tant pour contrôler l'organisation interne des séquences musicales que pour imaginer comment déduire de nouvelles séquences de celles déjà existantes » (Manoury3). A priori, ce formalisme est là pour être suivi (5) :

> « *Là encore, je revendique une liberté assez grande, non parce que je vais m'écarter du chemin tracé par ces grammaires* (*sinon à quoi bon les utiliser ?*) *mais parce que j'aurai à prendre un assez grand nombre de décisions qui ne seront pas soumises à ces procédés grammaticaux.* »

Pourtant, le compositeur peut s'écarter consciemment de ses propres règles, justifiant ce manquement en se contentant de le pointer :

> « [...] *noter la présence d'une cadence pour piano solo, à la fin de la séquence IC, qui n'est pas totalement intégrée dans cette GMG* [...] »

ou bien en le subordonnant à une motivation plus impérieuse, qui à son tour peut être simplement évoquée :

(5) Les citations qui suivent sont toutes extraites de l'article cité.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

« *Dans la version définitive de cette section, j'ai senti la nécessité d'insérer encore de nouvelles phrases à celles déjà construites, dans le but d'établir un nouveau matériau* [...] »

ou plus explicitement justifiée :

« *Or ce n'est pas exactement ce schéma que j'ai retenu pour cette transition, et cela pour une raison musicale facile à comprendre.* [...] *le peu d'éléments apparaissant dans ce schéma (juste des couples d'éléments, tels que BC, CD, DA...) aurait été d'une densité bien trop faible pour répondre à la construction précédente. Il me fallait une réponse musicale beaucoup plus énergique et dense que ce simple schéma initialement prévu.* »

C'est que l'adhésion au formalisme n'est pas une finalité du compositeur. Les GMG

« [...] *agissent chez moi plus comme une sorte de « catalyseur », de « provocateur », que comme une règle à suivre.* »

Elles ne sont que le véhicule temporaire de son intention, un outil qui permet d'aborder systématiquement certaines questions :

« *Je ne peux pas nier, en revanche, que la plupart de ces questions ont été provoquées par cette méthode et qu'elles ne se seraient pas posées sans son usage.* »

Questions qui précèdent le formalisme :

« *La question qui se pose n'est plus celle de la successivité des éléments dans le temps — il n'y a rien de bien compliqué à faire se succéder (ou juxtaposer) des éléments musicaux — mais de leurs influences, unions, métamorphoses, bref, de tout ce qui peut engendrer de nouvelles formes par le seul fait que ces éléments sont placés l'un à côté de l'autre. C'est ici qu'intervient cette « question » provoquée par le placement concomitant de deux éléments musicaux différents.* »

Manoury ayant rappelé auparavant que

« *L'idée de base consiste en ceci : la juxtaposition de deux événements finit par créer un sens musical par le fait de sa répétition. Ces deux événements peuvent, à force de répétition, être perçus comme formant une entité et l'apparition du premier fait attendre celle du second. On peut toujours assigner à un motif des fonctions particulières, comme « introduction » ou « conclusion », « antécédent », « conséquent », mais ce n'est pas une nécessité. Il s'agit avant tout de créer une relation entre deux (ou plusieurs) événements afin de faire émerger une cohérence dans la continuité du discours musical.* »

Cette question est centrale dans le travail de Philippe Manoury et les GMG sont un moyen de l'aborder aux côtés d'autres formalismes [(6)]. Ainsi, le formalisme est vu comme un outil, une loupe grossissante qui permet d'explorer une problématique. Il ne surplombe pas l'œuvre, il accompagne sa conception.

(6) comme par exemple les chaînes de Markov : « Qu'est-ce qui fait que la succession de certains intervalles dans un contexte donné produise un sens musical tandis qu'une autre succession n'en produit aucun ? Comment se fait-il que, en écoutant certaines musiques, nous sommes parfois capables de deviner ce qui va suivre ? »(Manoury4)

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Ce n'est pas un plan préétabli qu'il faut suivre, c'est l'échafaudage qui permet la construction, échafaudage dynamique qui s'ajuste, se précise et s'affine en fonction du résultat, résultat qui vaut pour sa qualité sonore et en ce qu'il éclaire et travaille la question initiale.

Dans ce contexte, la rigueur n'est alors pas l'adhésion à un formalisme, rigueur formelle qui ne serait que *rigor mortis*, mais l'affirmation d'un dessein musical, l'expression d'une visée sonore et la volonté de pousser un projet jusqu'au bout malgré les difficultés de réalisation. En cela la rigueur est du côté de la nécessité et s'oppose à l'arbitraire, compris ici comme l'acceptation par le compositeur de la contingence de ses choix, contingence qui permettrait au *hasard*, au *gratuit*, au *possible*, à l'*artificiel* et au *conventionnel* de devenir une détermination musicale.

Ces cinq termes utilisés pour qualifier des choix contingents correspondent à différents mécanismes où l'intention lucide du compositeur laisse place à une détermination extérieure. Le gratuit ne répond à aucun besoin et ce qui en découlera restera accessoire, sinon inutile, à la logique musicale qui se développe dans la pièce. L'artificiel correspond à une justification hors-sujet ou impropre au regard de cette logique tandis que le conventionnel fait reposer les décisions sur la tradition, la manière-de-faire, le stéréotype. Reste à comprendre en quoi nous opposons le hasard et le possible à la rigueur.

Le hasard peut intervenir de manière tout à fait intentionnelle dans un dessein musical ou dans la fabrication d'une pièce. Mais nous utiliserons alors plutôt les termes d'*aléatoire* et d'*accident* pour réserver le terme de hasard aux choix involontaires, délégués à un processus extérieur (comme un pile-ou-face). L'aléatoire, lui, n'est pas subi mais voulu par le compositeur pour naviguer dans un espace de possibilités qu'il a prédéterminé. On pense aux *Musikalisches Würfelspiel* (jeux de dés musicaux), un système utilisé par Mozart pour générer aléatoirement de la musique à partir d'options précomposées, où plus récemment à Boucourechliev, Xenakis, Cage... Philippe Manoury utilise lui des chaînes de Markov pour produire aléatoirement un matériau musical. Ce matériau est contrôlé par les coefficients de la chaîne, par exemple pour le faire évoluer vers un accord unique (Manoury4). L'aléatoire n'est pas utilisé ici par le compositeur pour se dédouaner, mais pour créer des musiques qui, même en se renouvelant constamment, ne feront que reproduire des connexions existantes.

L'intention n'empêche pas d'accueillir l'accident, l'imprévu, l'irruption du monde dans le projet du compositeur. « Faire avec » l'accident ne s'oppose donc pas à la rigueur quand celui se produit dans l'espace qui existe entre l'idée musicale et sa réalisation, et participe à la fabrication de l'œuvre à travers la réévaluation de l'idée originelle. En peinture, Francis Bacon a célébré l'importance de l'accident dans le processus créatif :

> « *J'attends ce que j'appelle « l'accident » : la tache à partir de laquelle va partir le tableau.* [...]
> *Vous savez, pour moi la peinture... Et plus je vieillis, plus c'est vrai... Est un accident. Je la conçois, mais je n'arrive presque jamais à ce que j'avais prévu. Elle se transforme elle-même. En fait, je sais rarement ce que sera la toile et beaucoup de choses se produisent par accident, parce que cela devient un procédé de savoir quel élément de l'accident je vais choisir de préserver.* »
>
> (Duras 1996)

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

« La réalisation apporte avec elle un imprévisible rien qui change tout » nous dit Bergson, et l'accident est courant, même avec les outils informatiques. Des calculs ou des branchements erronés peuvent fausser les traitements prévus par le compositeur, ce qui n'empêche pas parfois au résultat d'être plus satisfaisant que l'effet initialement envisagé et d'être choisi. Dans un autre registre, c'est une situation qui peut aussi se produire quand on doit réactualiser une pièce avec électronique pour la jouer plusieurs dizaines d'années après sa création. Les calculs étant plus précis avec les ordinateurs modernes, le résultat peut différer du rendu original. Ou bien, à l'occasion du recodage de la partie électronique, on se rend compte que la réalisation originelle des processus ne répondait pas tout à fait aux spécifications du compositeur. Pourtant, de nombreux concerts ont été joués, y compris sous sa direction. Faut-il alors garder ce qui a été validé par le compositeur et les concerts, ou bien considérer que la partition initiale est la seule référence valable ?

Il nous reste à aborder le possible, qui semble pourtant requis pour pouvoir exercer un choix vu comme une compétition entre plusieurs possibilités. Mais nous prenons le possible dans un sens particulier, celui de « on l'a fait parce qu'on pouvait le faire », sous-entendu : parce qu'il n'y avait pas d'impossibilité. Bergson distingue bien les deux sens :

> « *Hamlet était sans doute possible avant d'être réalisé, si l'on entend par là qu'il n'y avait pas d'obstacle insurmontable à sa réalisation. Dans ce sens particulier, on appelle possible ce qui n'est pas impossible : et il va de soi que cette non-impossibilité d'une chose est la condition de sa réalisation. Mais le possible ainsi entendu n'est à aucun degré du virtuel, de l'idéalement préexistant.* »
>
> (Bergson 2014)

§ 5. — La dynamique du virtuel.

Ce virtuel qui n'est pas le possible, cette idée musicale avant sa réalisation, le compositeur Sasha Blondeau l'apprivoise avec la notion d'*espace compositionnel*. Il utilise ce terme dans un sens rigoureusement défini, désignant par là une « structure topologique figurant les liens qui existent entre les différentes composantes de (son) matériau musical » (Blondeau 2019).

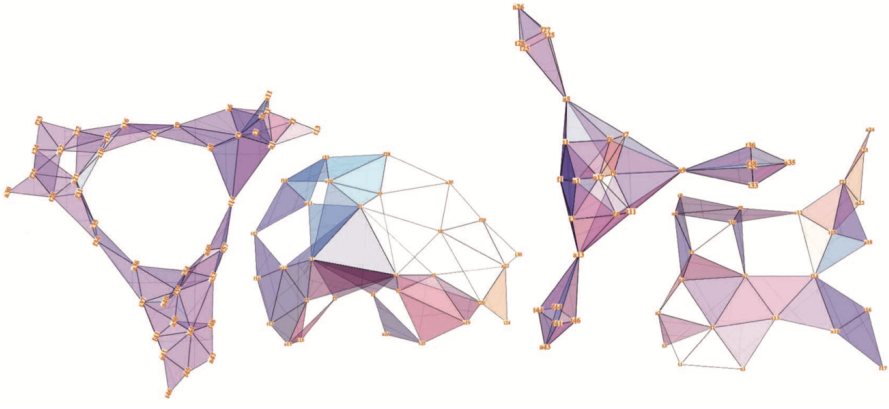
L'idée pour construire cet espace abstrait est la suivante (Giavitto 2016, Blondeau 2017). On part d'un ensemble de points représentant des qualités musicales, des caractérisations timbrales, rythmiques, fréquentielles... Cet ensemble de points abstraits $\{A, B, C, \ldots\}$ permet de construire un espace qui va représenter les conjonctions désirées de qualités musicales. Par exemple, si le compositeur veut considérer une entité musicale qui vérifie les propriétés A et B, il va rajouter le segment (A, B). Si en plus cette entité vérifie C, il va rajouter la face $\{A, B, C\}$ et ainsi de suite avec des tétraèdres pour quatre qualités et des simplexes de dimension n pour représenter la conjonction de $n+1$ qualités, *cf.* fig. V.7. Le résultat est un *complexe simplicial abstrait*, une notion mathématique qui permet de construire des espaces à partir de cellules élémentaires (ici les simplexes) recollées ensembles suivant certaines contraintes.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Le complexe simplicial de Sasha Blondeau rend explicite un espace de composition virtuel : c'est un champ de possibilités qui matérialise les choix qui s'offrent au compositeur. Les cellules permettent de structurer le matériau musical en se focalisant sur un ensemble de propriétés pertinentes à un moment donné. Le déroulement de l'œuvre correspond à un certain chemin dans cet espace : la suite des séquences musicales passe par les cellules qui sont associées aux propriétés exhibées par ces séquences. On peut remplacer « séquence » par d'autres entités utiles au compositeur : accord, phrase, mouvement, etc., car le système est très souple et ne préjuge pas de l'échelle temporelle des entités auxquelles il s'applique. Dans cet espace, les caractères musicaux se traduisent de manière topologique. Par exemple, l'abandon d'un certain caractère au profit d'un autre correspond au passage d'une cellule à une autre, la polyphonie correspond à des chemins qui se ramifient, et les ruptures, qui ne conservent aucune des propriétés musicales d'une séquence à une autre, correspondent à des sauts entre deux cellules non contigües.

L'espace compositionnel de Sasha Blondeau n'est pas sans rappeler le *Denkraum*, l'espace de pensée, utilisé par Aby Warburg, un historien de l'art, pour qualifier sa bibliothèque et son système singulier de rangement (Warbug). Les livres sont classés ni chronologiquement, ni alphabétiquement, mais selon une relation « de bon voisinage », une proxémie qui détermine le rangement du fond et des nouvelles acquisitions : chaque livre doit répondre à une question posée par un de ses voisins, et poser lui-même une question. Le résultat met en scène au niveau de la bibliothèque un espace labyrinthique qui rend compte de façon visible dans la disposition spatiale de ses collections, de la variété des catégorisations du savoir, leurs organisations évolutives, une épistémologie en réseau. Cette disposition permet des rencontres inopinées, des connexions inattendues, des liens disparates réalisant physiquement, à travers les rayonnages, une immense mémoire associative, « une machine qui aide à penser, une machine avec laquelle penser, une machine à laquelle penser » (Ginzburg 2012).

Figure V.7. Espace de composition de *Tesla* (2014) de Sasha Blondeau. Cet espace est un collage de cellules de dimension 3, des tétraèdres appelés aussi 3-simplexes, qui représentent chacun 4 types de « qualité musicale ».



© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Deux points me semblent essentiels à souligner. Le premier est que Sasha Blondeau n'utilise pas cet espace comme support d'un système génératif. Une cellule ne correspond pas à une entité musicale prédéfinie, exhibant les propriétés associées, et qui serait jouée à chaque fois que le chemin vient à passer par elle. C'est le compositeur qui réalise, lors de l'écriture de la partition, le rendu musical de chaque cellule visitée, et deux passages par le même simplexe donnent lieu à des réalisations différentes.

Le second point, qui me semble tout aussi essentiel, est que cet espace n'est pas donné a priori, mais qu'il se construit dynamiquement en accompagnant le compositeur dans son travail :

> « *Dans ces espaces compositionnels, je peux commencer par une simple idée — de geste, de forme —, et à partir de celle-ci créer une cellule qui lui corresponde, puis essayer de la développer en multipliant au fur et à mesure les cellules qui viendront l'envelopper. Je peux tout au contraire, à partir d'un espace constitué, chercher la cellule qui correspond à une idée qui est restée trop vague et mal définie.*
> [...]
> *L'espace n'est pas inerte, il change au cours du temps. Parfois des paramètres deviennent inadéquats, ils ne font plus sens et parfois il apparaît que quelque chose manque.*
> [...]
> *C'est un monde en devenir qui s'incrémente et prend forme en même temps que le projet musical se construit.* »
>
> (Blondeau 2019)

Ces explications pointent la nécessaire dynamique des idées et du projet musical, une dynamique qui se construit dans les allers-retours entre expectation et réalisation, idées qui sont « tirées » par un ensemble de croyances et de désirs, « poussées » par le savoir-faire technique et le métier, confrontées les unes aux autres, réévaluées à l'aune de la progression de la pièce, cent fois remises sur le métier :

> « *L'idée est un pari : pari sur la validité, sur la détermination expressive, sur le potentiel de développement ; bref, pari sur quelques quantités plus ou moins connues, et sur nombre de qualités totalement inconnues. L'idée est un pari dans le sens où elle lie un certain nombre d'éléments sans savoir encore si ces éléments ne sont efficaces que dans cet amalgame de l'instant, ou s'ils sont susceptibles, en se développant l'un par rapport à l'autre, d'engendrer des conséquences multiples.* »
>
> (Boulez 2005)

§ 6. — En guise de conclusion.

Dans un texte célèbre de 1931, Walter Benjamin se penche sur les différentes manières d'acquérir des livres pour répondre à la question : « Comment les livres franchissent-ils le seuil d'une collection et deviennent-ils la propriété d'un

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

collectionneur ? » (Benjamin 2015). Jill Kraye transpose ces différentes façons d'acquérir un livre dans le cadre de la bibliothèque de Warburg (Kraye 2012) et il est tentant de le faire aussi dans le contexte des espaces compositionnels, pour comprendre comment ils se constituent et éclairer des questions dont les réponses restent mystérieuses : pourquoi met-on une cellule ici et pas là ? pourquoi s'intéresse-t-on à cette conjonction de propriétés et pas une autre ? quelles sont les propriétés qui feront lien ? questions qui ne font que reformuler cette interrogation fondamentale : d'où vient une idée musicale ?

L'héritage est pour Walter Benjamin « le moyen le plus sûr d'acquérir une collection ». Cette capacité à transmettre une collection est des plus remarquables, même si une partie de leur légitimité est attachée à la personne de leur propriétaire. Les idées musicales, ou peut-être plus précisément les questions musicales, se transmettent aussi par héritage. Et comme dans les autres arts, la fréquentation des maîtres anciens est un passage obligé de la formation du compositeur pour comprendre leurs questionnements, leurs idées, et y apporter peut-être de nouvelles réponses, de nouvelles réalisations. À défaut de nouvelles réponses, on peut toujours se rabattre sur l'imitation, et les mots sont nombreux pour qualifier ces emprunts que nous faisons aux autres : pastiche, citation, hommage, centon, copie, exercice de style... « Parmi les modes d'acquisition habituels, écrit Benjamin, celui qui conviendrait le mieux à un collectionneur serait l'emprunt d'un livre et son corollaire, oublier de le rendre ». Il y a aussi la manière classique de se procurer un livre, en l'achetant — ce qui implique sans doute de le désirer, peut-être pour combler un manque dans sa propre collection, et de travailler, pour pouvoir l'acquérir. Mais « la méthode la plus louable » est encore, nous dis Benjamin, de l'écrire soi-même.

§ — Remerciements.

Les considérations formulées ici reflètent les réflexions d'un informaticien et je ne peux prétendre les ancrer dans la pratique d'un métier musical. Elles empruntent certainement à mon propre travail mais elles ont pu se nourrir de discussions avec de vrais musiciens — compositeurs, réalisateurs en informatique musicale et instrumentistes — et de la passionnante lecture de leurs textes derrière lesquelles je m'abrite souvent. Il faut cependant bien entendre que les compositeurs, tout comme les informaticiens, les philosophes ou les mathématiciens, ne sont pas toujours d'accord sur ce qui se passe lorsqu'ils travaillent ; qu'ils peuvent changer d'avis au cours de leur vie ; et que ce qui est dit publiquement n'est pas nécessairement le reflet du travail vécu.

J'aimerais adresser mes remerciements plus particulièrement à Didier Blasco, Sasha J. Blondeau, Carmine E. Cella, José Miguel Fernandez, Serge Lemouton, Philippe Manoury, Augustin Muller et Marco Stroppa. Ce qui ne préjuge aucunement de leur idéal de rigueur.

Mais après tout, le problème n'est peut-être pas tant de définir ce qu'est la rigueur que d'être *rigoureux pour soi*, jour après jour, à sa table de travail, face à son instrument ou devant son ordinateur.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ — Bibliographie.

Agon C., Assayag G. et Bresson J., éds, (2006–2016). *The om composer's book. Collection Musique-Sciences*, éditions Delatour France, IRCAM.

Andreatta M. et Agon C. (2008). La musique mise en algèbre. *Pour la Science*, vol. 373.

Benjamin W. (2015). *Je déballe ma bibliothèque — Une pratique de la collection*. Rivage Poche.

Bergson H. (2014). *La pensée et le mouvant*. Flammarion.

Blondeau J. (2017). *Espaces compositionnels et temps multiples : de la relation forme/matériau*. PhD thesis, thèse de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris VI.

Blondeau S. J. (2019). *Le vent se lève — Catalogue de l'exposition collective des pensionnaires de l'Académie de France à Rome, 2018–2019*, Chap. Espèce d'espace. Villa Medicis.

Boulez P. (2005). *Point de repère : tome 3, Leçons de musique*. Christian Bourgeois.

Cont A. (2011). Interaction musicale en temps réel entre musiciens et ordinateur. https://interstices.info/interaction-musicale-en-temps-reel-entre-musiciens-et-ordinateur.

Cont A., Echeveste J., Giavitto J.-L. et Jacquemard F. (2012). Correct automatic accompaniment despite machine listening or human errors in Antescofo. Dans *International Computer Music Conference* (*ICMC*), Ljubljana, Slovenia, 2012.

Delahaye J.-P. (2004). La musique mathématique de Tom Johnson. *Pour la Science*, vol. 325.

Donin N., éd. (2019). *Un siècle d'écrits réflexifs sur la composition musicale — Anthologie d'auto-analyses, de Janacek à nos jours. Publications de la Haute école de musique de Genève*, Droz.

Duncan S. P. (2010). To Infinity and Beyond : A Reflection on Notation, 1980s Darmstadt, and Interpretational Approaches to the Music of New Complexity. *Search Journal for New Music and Culture*, vol. 7.

Duras M. (1996). *Outside*, Chap. Entretien Avec Francis Bacon. Gallimard.

Foucault M. (1994). *Dits et écrits*, Chap. Pierre Boulez, l'écran traversé (texte 305). Gallimard.

Giavitto J.-L. (2014). *Produire le temps*, Chap. Du temps écrit au temps produit en informatique musicale. Hermann.

— (2016). *Mathemusical Conversations : Mathematics and Computation in Music Performance and Composition*, Chap. A Topological Approach of Musical Relationships. World Press.

Ginzburg C. (2012). Une machine à penser. *Common Knowledge*, vol. 18, n° 1, p. 79–85.

Johnson T. et Girard B. (2011). *Conversations avec Tom Johnson*. Aedam Musicae.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Kraye J. (2012). Unpacking the Warburg Library. *Common knowledge*, vol. 18, nº 1, p. 117–127.

Manoury P. Le partitions virtuelles. http://www.philippemanoury.com/?p=340.

— (2012). *La musique du temps-réel*. Edition MF.

— Les Grammaires Musicales Génératives. http://www.philippemanoury.com/?p=5025.

— Les chaînes de Markov... à l'infini. http://www.philippemanoury.com/?p=5685.

Nelson R. B. (1993). Proofs without words. *Mathematical Association of America*, vol. 84, p. 90.

Nine Bells. (28 novembre 2018). https://www.youtube.com/watch?v=7moHw9RZBzc.

OpenMusic. http://repmus.ircam.fr/openmusic/home.

Pure Data. https://fr.wikipedia.org/wiki/Pure_Data.

Reynolds R. (2004). Compositional strategies in *The Angel of Death* or Piano, Chamber Orchestra and Computer-Processed Sound. *Music Perception*, vol. 22, nº 2.

Sauer T. et Perry M. (2009). *Notations 21*. Mark Batty Publisher.

Saxton R. (1988). *Composition, Performance, Reception. Studies in the creative Process in Music*, Chap. The process of composition, from detection to confection. Aldershot.

Stockhausen K. et Cott J. (1979). *Conversations avec Stockhausen. Musiques et musiciens*, Jean-Claude Lattès.

Stroppa M. (1989). Musical information organisms : An approach to composition. *Contemporary music review*, vol. 4, nº 1, p. 131–163.

The Warburd Library. https://warburg.library.cornell.edu/.

Zimmermann B. A. (1985). Intervalle et temps. *Frankfurter Allgemeine Zeitung*.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2021

Ondelettes et analyse multifractale

Quelques interactions entre rigueur mathématique et les autres sciences

Stéphane Jaffard



À Alain Arneodo, in memoriam ;
mieux qu'un maître, un grand frère.

Résumé et avertissement

On décrit quelques interactions mouvementées, mais fécondes entre mathématiciens et scientifiques issus d'autres disciplines, qui ont eu lieu au début du développement de l'analyse par ondelettes, puis dans l'un de ses principaux champs d'applications : l'analyse multifractale. On verra ainsi comment des conceptions différentes de la rigueur ont pu se confronter entre elles. Ce texte fait partie des actes d'un colloque qui réunissait des universitaires d'horizons très divers ; il tente donc la gageure d'être lisible par ces différentes communautés. En particulier, si les spécialistes de sciences inhumaines seront rassurés par quelques formules mathématiques, celles-ci ne devrait pas rebuter les spécialistes de sciences inexactes : la lecture de ce texte est, en principe, conçue pour pouvoir être possible en « oubliant » ces formules.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 1. — Les ondelettes : un exemple atypique d'interdisplinarité.

Les méthodes d'analyse par ondelettes se sont développées au début des années 1980, à partir de l'intuition remarquable du géophysicien Jean Morlet, qui travaillait pour Elf-Aquitaine, dans la détection pétrolière ; il étudiait les signaux obtenus en *sismique par réflexion* : une vibration est émise vers l'intérieur de la terre à l'aide de « camions vibrateurs ». Le signal reçu est issu des multiples réflexions de cette vibration initiale avec les différentes couches du sous-sol. Le but est de reconstituer la nature du sous-sol à partir de l'étude de ce signal réfléchi. Mathématiquement, il s'agit d'un « problème inverse » extrêmement difficile à résoudre. Jean Morlet proposa de décomposer le signal reçu en des composantes élémentaires simples, ayant toutes la même forme,

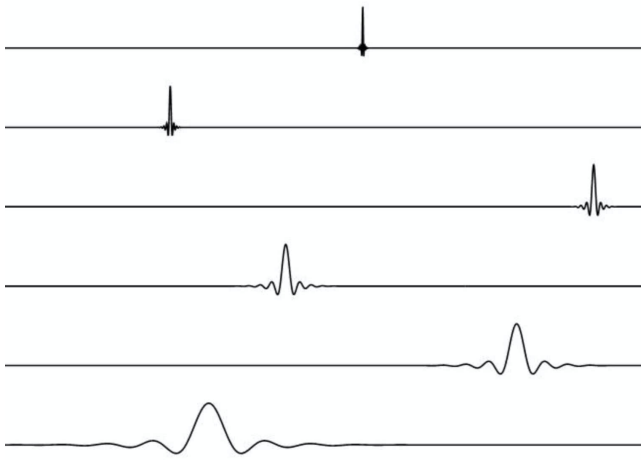
et il développa des algorithmes numériques permettant une reconstitution approximative de ce signal à partir de telles composantes (Morlet 1981). Se rendant rapidement compte qu'il avait besoin d'interagir avec un scientifique plus théoricien que lui pour formaliser sa découverte, il en parle à Roger Balian, physicien théoricien avec lequel il avait effectué ses études à l'École polytechnique ; celui-ci pense que ce type de décomposition peut relever des outils utilisés en mécanique quantique, et il oriente Jean Morlet vers Alex Grossmann, spécialiste de ce domaine à Marseille. Celui-ci reconnait que le cadre abstrait fourni par la théorie des représentations de groupes non-unimodulaires explique parfaitement ces essais numériques, et permet de montrer que cette reconstitution approximative est même exacte (Grossmann *et al.* 1984) : si ψ est une fonction bien localisée et de moyenne nulle (et vérifiant des conditions techniques supplémentaires peu contraignantes), on définit la *transformée en ondelettes* du signal f en calculant ses corrélations avec toutes les translatées-dilatées de l'ondelette ψ :

$$C_{a,b}(f) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t \qquad (a>0, b\in\mathbb{R}). \tag{VI.1}$$

On peut alors reconstruire f à partir de cette *transformée continue en ondelettes* en la corrélant de nouveau avec toutes les translatées-dilatées de ψ :

$$f(t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} C_{a,b}(f)\ \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{\mathrm{d}a\ \mathrm{d}b}{a^2}. \tag{VI.2}$$

FIGURE VI.1. Translatées-dilatées d'une ondelette ψ pour quelques valeurs des paramètres a et b de dilatation et de translation.



Crédit : Guillaume Saes

Le lien avec la mécanique quantique, et en particulier les états cohérents associées aux groupes non unimodulaires, sera ensuite approfondi avec Thierry Paul, le premier doctorant ayant effectué une thèse sur les ondelettes (Grossmann *et al.* 1985).

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021



Jean Morlet, Alex Grossmann et Ingrid Daubechies

Ces premières interactions entre sciences de l'ingénieur et physique théorique vont très rapidement s'enrichir de nouvelles collaborations avec des domaines très divers, initialement dues au hasard, mais surtout à des scientifiques de tout premier plan, qui sauront parfaitement exploiter ce hasard, et percevoir son potentiel. Un tel exemple de « sérendipité » a lieu en septembre 1984, devant la photocopieuse que partageaient mathématiciens et physiciens théoriciens à l'École polytechnique. Là, Yves Meyer attend patiemment son tour derrière Jean Lascoux, physicien d'une culture universelle, qui photocopiait tout ce qui lui paraissait digne d'être diffusé. Yves Meyer, futur prix Abel, était déjà un mathématicien reconnu au sein des mathématiques pures : ses premiers travaux ont ouvert la voie aux quasi-cristaux ; puis, en collaboration avec Raphy Coifman, il a résolu plusieurs points clés du « programme de Calderón », qui a renouvelé l'analyse harmonique et l'études des équations aux dérivées partielles. Au lieu de manifester de l'impatience envers Jean Lascoux pour son usage un peu excessif d'un instrument de travail collectif, Yves Meyer préférait patienter en discutant avec lui. Jean Lascoux lui parle de l'article qu'il est en train de photocopier, qui est précisément le premier article de Jean Morlet et Alex Grossmann sur les ondelettes (Grossmann *et al.* 1984). En voyant les formules de décomposition-recomposition (VI.1) et (VI.2) Yves Meyer reconnait immédiatement la célèbre « formule de reproduction » utilisée par Alberto Calderón dans les années 1960. Intrigué, il descend à Marseille pour discuter avec Alex Grossmann, puis Jean Morlet. De cette interaction entre trois scientifiques de cultures très différentes allait naître un nouveau domaine. Ici, la pluridisciplinarité ne viendra pas (comme c'est le plus souvent le cas) de questions qu'une discipline pose à l'autre mais d'un brassage d'idées constant entre disciplines. Pendant plus de dix ans, les congrès autour des ondelettes étaient systématiquement pluridisciplinaires, et des scientifiques publiaient couramment leurs recherches dans des journaux hors de leur domaine d'expertise. Ces redécouvertes consécutives de la même formule illustrent bien le cloisonnement des sciences : les deux premières fois, au sein des mathématiques pures puis de la physique mathématique, elle est restée cantonnée à ces disciplines ; de façon ironique, ce n'est que lorsqu'elle est redécouverte de façon intuitive et non rigoureuse par un ingénieur, qu'elle finira par avoir un impact scientifique très large, devenant le point de départ d'une nouvelle théorie.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

L'interprétation en traitement du signal de la formule trouvée heuristiquement par Jean Morlet ouvrait des perspectives complètement nouvelles. Pour être utilisable dans les applications, il fallait cependant trouver un moyen de discrétiser les formules de décomposition-recomposition (VI.1) et (VI.2). Une première étape a consisté en la construction de *frames d'ondelettes* : Ingrid Daubechies, une physicienne de Bruxelles qui était venue travailler avec Alex Grossmann, va montrer, en collaboration avec ce dernier et Yves Meyer, que l'on peut échantillonner la fonction $C_{a,b}(f)$ sur un réseau de points suffisamment dense du demi-plan $a > 0, b \in \mathbb{R}$ pour pouvoir reconstituer la fonction f de départ de façon numériquement stable (Daubechies *et al.* 1986).

Un apport central d'Yves Meyer est la découverte, en 1985, d'une autre version discrète, encore plus remarquable, des formules (VI.1) et (VI.2) : pour des choix particuliers de l'ondelette ψ, les translatées-dilatées $\psi(2^j x - k)$, où j et k sont des entiers, permettent de reconstruire la fonction de départ par des formules extrêmement simples : si

$$C_{j,k}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi(2^j t - k)\,\mathrm{d}t, \tag{VI.3}$$

alors

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{j,k} 2^j \psi(2^j x - k) \tag{VI.4}$$

(les fonctions $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, cf (Lemarié *et al.* 1986)). Les ondelettes se déduisant les unes des autres par des translations et des changements d'échelle, cette décomposition est particulièrement bien adaptée à l'analyse de signaux ou d'images présentant des invariances (déterministes ou stochastiques) à travers les échelles.

À la même époque, un nouveau développement s'opère naturellement en direction de l'acoustique et du traitement du signal, du fait des liens entre le groupe d'Alex Grossmann et le laboratoire d'acoustique de Marseille où travaillaient notamment Jean-Claude Risset et Richard Kronland-Martinet ; ils montrent la pertinence de la transformée continue en ondelettes pour l'analyse et la synthèse de signaux musicaux, et aussi, de façon surprenante, le fait que la cochlée effectue, au niveau de l'oreille, un premier traitement « bas-niveau » des signaux sonores qui est très proche d'une analyse en ondelettes. La transformée continue en ondelettes permet aussi d'analyser des fonctions de plusieurs variables : Marie Farge, physicienne spécialiste de la turbulence, teste ses performances sur des simulations d'écoulements turbulents en 2 dimensions, et montre qu'elle permet de mettre en évidence les fameuses « structures cohérentes », et de les séparer de la partie résiduelle de l'écoulement (Farge *et al.* 1988).

Durant l'été 1987, un nouveau pont s'établit de façon plus inattendue, non plus autour d'une photocopieuse, mais sur une plage. Je commençais une thèse de mathématiques sous la direction d'Yves Meyer ; la petite communauté des « ondelettistes » était alors consciente que l'analyse d'image pourrait être un autre terrain d'application fructueux, et, justement, un de mes camarades de promotion de l'École polytechnique, Stéphane Mallat, effectuait une thèse de traitement d'image à Philadelphie ; je charge alors un ami commun, lui aussi mathématicien, de lui parler de cette nouvelle théorie durant leurs vacances

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

en bord de mer. Immédiatement intéressé, Stéphane Mallat me demande de lui envoyer les articles sur le sujet ; il voit aussitôt le lien avec les algorithmes pyramidaux utilisés en analyse d'image, qui permettent de réaliser une séparation de l'image entre une partie « approximation » et une partie « détails » à chaque échelle. Stéphane Mallat rend visite à Yves Meyer lors de l'un de ses déplacements à l'Université de Chicago. En quelques jours de travail fiévreux (dans le bureau d'Antoni Zygmund, le collaborateur principal d'Alberto Calderón), ils élaborent un cadre général, les « analyses multirésolution », basé sur ces algorithmes pyramidaux, et permettant une construction naturelle des bases d'ondelettes (Mallat 1989). Ici, il ne s'agit plus de redécouverte, mais de fertilisations croisées : Les bases orthornormées d'ondelettes fournissent une nouvelle interprétation « continue » des algorithmes pyramidaux qui sont, par nature, discrets ; elles permettent de mieux comprendre les propriétés de ces algorithmes (conséquences des propriétés de régularité et de moments nuls des ondelettes) qui restaient complètement mystérieuses lorsqu'on se cantonnait à un cadre discret ; enfin, le formalisme général des analyses multirésolution permet, grâce aux travaux d'Ingrid Daubechies, de trouver de nouveaux algorithmes de décompositions en ondelettes, présentant de meilleures propriétés numériques (Daubechies 1988). En sens inverse, Stéphane Mallat a montré qu'ils fournissent des méthodes de calcul rapide de décomposition et de recomposition sur les bases orthonormées d'ondelettes. Ces méthodes, plus rapides que la FFT (Fast Fourier Transform) feront le succès des décompositions en ondelettes en traitement du signal et de l'image. Elles sont maintenant devenues un outil incontournable dans toutes les opérations liées au traitement du signal de l'image et de la vidéo (codage, transmission, débruitage, reconstruction d'images floues,...) ; ainsi, le standard JPEG, utilisé comme norme en compression d'image, est, depuis l'an 2000, basé sur les décompositions en ondelettes.

La découverte des bases orthonormées d'ondelettes illustre de nouveau le cloisonnement des connaissances, même au sein d'une discipline scientifique : après avoir effectué la découverte d'une base orthonormée d'ondelettes, Yves Meyer s'est ensuite rendu compte qu'une autre construction avait été effectuée auparavant par Jan-Olov Strömberg, dans le but de construire des *bases inconditionnelles* de certains espaces fonctionnels (Strömberg 1983) : Si E est un espace vectoriel complet muni d'une distance $d(x,y)$ invariante par translation, une suite e_n d'éléments de E forme une base inconditionnelle de E si tout élément f de E s'écrit de façon unique comme limite d'une suite de combinaisons linéaires finies d'éléments de E :

$$f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, \qquad a_n \in \mathbb{R}, \tag{VI.5}$$

et si cette décomposition vérifie un critère de stabilité numérique : il existe $C > 0$ telle que, pour toute suite $\varepsilon_n \in [-1,1]$,

$$\operatorname{dist}\Big(\sum \varepsilon_n a_n e_n, 0\Big) \leqslant C \operatorname{dist}\Big(\sum a_n e_n, 0\Big) \tag{VI.6}$$

(cette condition signifie que la taille d'une combinaisons linéaires n'est pas trop perturbée si l'on modifie un peu ses coefficients). La recherche d'espaces ayant des bases inconditionnelles est une des ligne conductrices de l'analyse mathématique ; la découverte par Jan-Olov Strömberg que les espaces de Hardy, qui

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

jouent un rôle central en analyse harmonique, sont pourvus de telles bases a donc été un évènement important ; mais l'éclairage n'avait pas été porté sur l'outil construit dans ce but. Comme souvent en mathématiques, l'outil s'est finalement révélé plus important que l'objectif qu'il avait permis d'atteindre. Tant pour la transformée continue en ondelettes que pour les bases orthonormées, le fait que les premiers travaux sur ces sujets aient été méconnus des « redécouvreurs » a joué un rôle positif : en effet, dans ces deux cas, c'est la publication d'un nouveau travail sur le sujet qui a fait connaître ces résultats à de nouvelles communautés. Le fait que les ondelettes sont des bases inconditionnelles de nombreux espaces fonctionnels est une propriété remarquable, qui n'est pas partagée par les autres « bases classiques » en mathématiques (Meyer 1990) (elle est, par exemple, complètement fausse pour les séries de Fourier). Curieusement, ce n'est pas au sein de l'analyse fondamentale que cette propriété a eu le plus d'impact, mais en statistique, comme l'ont montré David Donoho et Ian Johnstone. Cette propriété permet notamment de construire des méthodes de débruitage de signaux et d'images qui ont des propriétés remarquables tant sur le plan théorique que pratique. Elles permettent d'enlever le bruit ajouté à une image, sans rendre flous les contours, ce qui était impossible par les méthodes précédentes basées sur une régularisation par convolution. On peut d'ailleurs remarquer que la propriété qui intéresse vraiment les statisticiens dans la notion de base inconditionnelle est seulement la seconde propriété VI.6, qui est vérifiée en fait par plus d'espaces (et qu'ils ont baptisée « propriété des multiplicateurs »). Pour eux, elle éclipse tellement la première qu'ils affirment souvent qu'une base vérifiant seulement cette seconde propriété est inconditionnelle, même quand la première propriété n'est pas vérifiée (c'est par exemple le cas des espaces de Hölder C^s qui sont parmi les plus utilisés de l'analyse) ; cela n'a d'ailleurs pas de conséquence fâcheuse... tant que chacun sait bien de quoi il parle !

L'histoire du début des ondelettes contient d'autres exemples d'interactions entre mathématiques et sciences appliquées où la rigueur mathématique s'est trouvée confrontée à une heuristique qui semblait pourtant raisonnable. Un exemple est fourni par la « conjecture » de Marr, et sa forme précisée par Mallat. David Marr était l'un des grands spécialistes de neuro-physiologie, et il essayait de comprendre comment un premier traitement « bas niveau » de l'information visuelle est effectué par les cellules de la rétine ; il avait conjecturé que l'on peut reconstituer une image à partir des valeurs où s'annule sa transformée continue en ondelettes, en choisissant pour ondelette analysatrice le Laplacien d'une gaussienne :

$$\psi(r,\theta) = \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) e^{-r^2/2} \quad \text{(en coordonnées polaires)} ;$$

il propose de conserver les ensembles où elle s'annule pour une suite de valeurs du paramètre de dilatation $a = \sigma^n$ formant une suite géométrique (expérimentalement, la valeur $\sigma = 1,75$ semblait convenir) (Marr 1982). Yves Meyer avait trouvé un contre-exemple à cette conjecture, et Stéphane Mallat en avait alors fourni une version précisée. Pour cela, il remarque que ces valeurs d'annulation correspondent à des maxima du gradient de la convolution de l'image avec une gaussienne, et il propos de conserver aussi la valeur du gradient à ces maxima. Cette variante garde l'attrait principal de l'algorithme de Marr dont

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

le but était de représenter l'image de façon parcimonieuse, par des quantités invariantes par translation ; il espérait que l'information supplémentaire fournie par ces valeurs du gradient aux maxima locaux pourrait garantir l'unicité de la représentation. Yves Meyer a également trouvé un contre-exemple à cette nouvelle conjecture précisée, au moins pour certaines ondelettes analysatrices, *cf.* (Jaffard *et al.* 2001) et réf. citées. Cela n'assure donc pas que la conjecture est fausse dans tous les cas ; on a d'ailleurs pu penser dans un premier temps que ce contre-exemple correspondait à une construction mathématique artificielle et que, en pratique, il ne remettait pas en cause la validité des algorithmes de reconstruction pour des images « naturelles ». Ce n'est que peu à peu que l'instabilité numérique de ces algorithmes a été reconnue, et on peut l'attribuer aux problèmes de non-unicité soulevés par les travaux d'Yves Meyer.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 2. — L'analyse multifractale.

Prendre part aux premiers colloques sur les ondelettes était une expérience singulière : les participants n'exposaient pas des résultats définitifs, mais on assistait au bouillonnement d'idées d'une science mélangeant toutes les disciplines, en train de se construire. Au milieu de cette effervescence, j'étais fasciné par l'enthousiasme d'un jeune physicien, Alain Arneodo. Venu des systèmes dynamiques et de la physique statistique, il s'était réorienté vers l'étude de la turbulence, et était convaincu que l'analyse par ondelettes permettrait de jeter une lumière nouvelle sur ce phénomène physique très mal compris. De nouvelles données expérimentales de turbulence extrêmement précises, obtenues dans la soufflerie de Modane au début des années 1980, montraient que la vitesse d'un écoulement turbulent a des propriétés remarquables : le signal présente des invariances d'échelle statistiques lorsqu'on l'observe sur un grand nombre d'échelles ; de plus, il est très irrégulier à certains endroits et moins à d'autres, sans que l'on puisse clairement assigner de frontières à ces régions : au sein d'une zone plutôt régulière on voit des zones d'irrégularité et réciproquement, ce mélange apparaissant à toutes les échelles (Frisch 1993). Il est donc naturel de postuler que les ondelettes, qui, par construction, permettent de mettre en évidence, séparer et analyser les composantes d'un signal à différentes échelles, sont adaptées à l'étude de telles données. Plus précisément, Alain Arneodo était particulièrement intéressé par une nouvelle approche qui venait d'être introduite par deux physiciens, Uriel Frisch et Giorgio Parisi : l'*analyse multifractale* (Parisi *et al.* 1985). Elle est apparue pour comprendre et analyser des signaux présentant une telle complexité et pour introduire de nouveaux paramètres quantitatifs permettant leur classification.

Si l'on note f le signal considéré (par exemple la vitesse en un point d'un écoulement turbulent), leur idée était de partir de la *fonction d'échelle* de f, notée $\zeta_f(p)$, définie implicitement au moyen d'une régression log-log par

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \quad \text{quand } \delta \to 0. \tag{VI.7}$$

La fonction $\zeta_f(p)$ a été introduite par Andreï Kolmogorov en 1941 ; il avait montré (Kolmogorov 1941) qu'elle fournit des invariants physiques universels qui

sont une des clefs de la compréhension du mécanisme de dissipation d'énergie des grandes vers les petites échelles au sein d'un écoulement turbulent. La fonction d'échelle avait aussi été utilisée comme outil de classification et de sélection pour les modèles de turbulence ; ainsi, sa détermination avait permis de montrer que des processus aléatoires comme le mouvement brownien fractionnaire ne conviennent pas pour modéliser la turbulence à petite échelle, car sa fonction d'échelle est rectiligne, contrairement à ce qui est mesuré sur des données expérimentales. Uriel Frisch et Giorgio Parisi fournissent une interprétation nouvelle de cette fonction d'échelle : elle donne accès à une information géométrique sur les singularités ponctuelle de f. Soyons plus précis : la régularité ponctuelle d'une fonction f en un point en x_0 est mesurée au moyen de son exposant de Hölder, noté $h_f(x_0)$, que l'on peut définir de façon informelle par

$$|f(x) - f(x_0)| \sim |x - x_0|^{h_f(x_0)}, \quad \text{quand } x \to x_0$$

(du moins pour des exposants de Hölder inférieurs à 1, ce qui est pertinent pour la turbulence). Les ensembles isohölderiens de f sont les ensembles de points présentant la même régularité :

$$E_H(f) = \left\{x_0 : \quad h_f(x_0) = H\right\}.$$

Uriel Frisch et Giorgio Parisi interprètent les constatations heuristiques que nous mentionnions plus haut en conjecturant que, dans le cas de la turbulence, ces ensembles sont fractals (au sens où leur dimension n'est pas un entier). Ils introduisent alors une quantité géométrique fondamentale, le *spectre multifractal* de f, noté $D_f(H)$, qui est la dimension fractionnaire de l'ensemble $E_H(f)$ (mathématiquement, il s'agit de la dimension de Hausdorff). Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, le formalisme multifractal affirme que cette information géométrique sur les singularités ponctuelles de f est liée à sa fonction d'échelle par une *transformée de Legendre*

$$D_f(H) = \inf_p (hp - \zeta_f(p) + d).$$

L'intérêt d'une telle formule est évident : autant il est impossible de déterminer numériquement l'exposant de Hölder d'une fonction en chaque point, et a fortiori les dimensions de Hausdorff de tous les ensembles de niveau de cet exposant, autant la détermination de la fonction $\zeta_f(p)$ est relativement aisée, et cette formule donnerait alors directement accès au spectre multifractal. Uriel Frisch et Giorgio Parisi l'ont élaborée à partir de justifications heuristiques issues de la physique statistique, et leurs arguments n'étaient pas spécifiques à la turbulence. Pour les mathématiciens la justification de cette formule n'est pas rigoureuse ; mais, dès qu'elle a été proposée, elle les a fascinés ; en effet, contrairement à la plupart des formules mathématiques qui sont vraies ou fausses, la situation est plus complexe ici : s'il est facile de lui trouver des contre-exemples, on peut cependant vérifier sa validité sur de très nombreuses fonctions et processus aléatoires, et notamment ceux qui sont utilisés pour modéliser la turbulence. Une première intuition remarquable d'Alain Arneodo a été de proposer une reformulation de ces quantités à l'aide de la transformée en ondelettes : Avec ses collaborateurs Emmanuel Bacry et Jean-François Muzy, il remplace, dans le calcul de la fonction d'échelle, les accroissements de la fonction f à différentes échelles $|f(x + \delta) - f(x)|$ par la transformée continue en

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

ondelette à la même échelle $C_{a,b}(f)$ pour $a = \delta$ et $b = x$. Puis, s'inspirant du codage de la transformée continue en ondelettes qu'effectuait Stéphane Mallat, il discrétise l'intégrale VI.7 en la remplaçant par une sommes prise là où la transformée en ondelettes prend ses valeurs les plus significatives, c'est à dire sur ses extrema locaux (Arneodo *et al.* 1995) ; si l'on note b_k les points où ces extrema sont atteints à l'échelle a, l'intégrale VI.7 est donc remplacée par la somme

$$\sum_{b_k} |C_{a,b_k}(f)|^p \sim a^{\eta_f(p)} \quad \text{quand } a \to 0, \tag{VI.8}$$

conduisant potentiellement à une nouvelle fonction d'échelle $\eta_f(p)$. Cette reformulation permet une meilleure précision numérique dans le calcul de la régression log-log implicite dans l'équation VI.8. Elle permet surtout d'étendre la définition de la fonction d'échelle aux valeurs de p négatives, élargissant ainsi l'ensemble des paramètres pour lesquels ou peut l'utiliser, notamment pour la validation de modèles. Ce point s'est avéré crucial pour l'étude de la turbulence, en effet, de nombreux modèles de turbulence ont essentiellement la même fonction d'échelle pour $p > 0$ et on ne peut les distinguer qu'en étendant la fonction d'échelle aux valeurs négatives de p (Muzy *et al.* 1991, Lashermes *et al.* 2008). Il faut remarquer qu'il n'est pas possible de le faire directement sur la formule (VI.7) ; en effet les accroissements $|f(x+\delta) - f(x)|$ peuvent s'annuler, et les élever à une puissance négative fait en général diverger l'intégrale. Alain Arneodo et ses collaborateurs sont les premiers à proposer une méthode pour « renormaliser » cette intégrale divergente : En la remplaçant par une somme sur les extrema locaux de la transformée en ondelettes, on élimine justement les « zones » qui la faisaient diverger (Arneodo *et al.* 1995).

L'intuition développée par les concepteurs du formalisme multifractal est qu'il doit être vérifié par des fonctions présentant une certaine autosimilarité, ce qui justifiait de l'appliquer dans le cadre de la turbulence, car l'heuristique physique autour de la turbulence affirme qu'elle doit elle aussi vérifier des propriétés d'autosimilarité statistique. Mon premier travail sur le sujet a été de confirmer cette intuition et de vérifier le formalisme multifractal pour des fonctions vérifiant une condition d'autosimilarité déterministe (Jaffard 1997). Si ce premier résultat a été accueilli par Alain Arneodo avec intérêt, il a surtout permis d'initier une collaboration fructueuse. Comme souvent dans les sciences appliquées, ce n'est pas la confirmation mathématique d'une intuition correcte qui intéresse le plus les physiciens, mais c'est plutôt quand le formalisme mathématique leur permet de mettre le doigt sur des situations que leur intuition n'avait pas prévue, ce qui est arrivé à plusieurs reprises en analyse multifractale. Ainsi la justification heuristique qui avait été donnée au formalisme multifractal supposait une organisation hiérarchique précise des singularités présentant des invariances d'échelle ; il semblait donc ne pouvoir être vérifié que pour des fonctions très particulières, présentant effectivement cette propriété (c'est, par exemple, le cas des modèles de turbulence classiques tels que les *cascades multiplicatives* (Barral *et al.* 2015)). Aussi, les premiers résultats de validité générique du formalisme multifractal, qui énoncent qu'il est vérifié par « presque toute » fonction d'un espace fonctionnel, ont capté l'intérêt des physiciens du domaine, précisément parce qu'ils contredisaient leur intuition (ici la notion floue de « presque toute » peut être précisée à l'aide

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

des différentes notions de généricité qui existent en analyse *cf.* (Jaffard 2000, Fraysse *et al.* 2006)).

À une autre occasion, la rigueur mathématique est entrée en conflit avec l'intuition physique, et a conduit à une mine de découvertes : l'intuition derrière le formalisme multifractal était, entre autres, basée sur le fait que si une fonction f a un exposant de Hölder égal à h en x_0, alors la transformée en ondelettes de f vérifie $|C_{a,b}(f)| \sim a^h$ dans le *cône d'influence :* $|b - x_0| \leqslant a$. Cette intuition est à la fois basée sur des calculs explicites pour des « singularités types » telles que les *cusps :* $f(x) = |x - x_0|^h$ et aussi sur une certaine confusion entre la notion de singularité hölderienne et celle d'autosimilarité (en effet, l'autosimilarité d'une fonction implique l'autosimilarité de sa transformée en ondelettes). En démontrant un critère qui permet de caractériser l'exposant de Hölder en un point par des conditions sur le module de la transformée en ondelettes (Jaffard 1989), je me suis aperçu que cette heuristique était mise en défaut par des fonctions ayant des singularités très oscillantes, du type

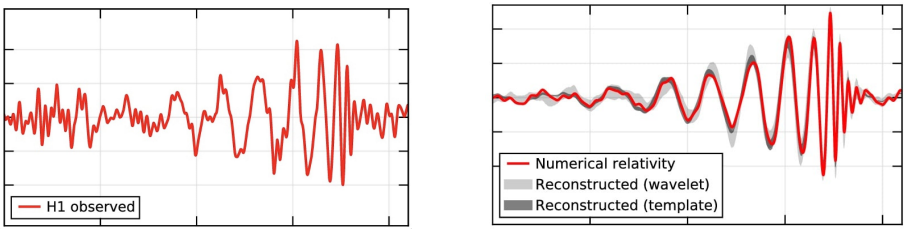
$$f(x) = |x - x_0|^h \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right). \tag{VI.9}$$

De telles fonctions sont appelées « chirps », car leur fréquence instantanée augmente au voisinage de x_0 (comme le pépiement de plus en plus aigu de certains oiseaux). Loin d'être agacé par cette restriction qui était apportée à ses travaux, Alain Arneodo y a vu, au contraire, une opportunité pour enrichir sa vision et mieux comprendre la nature des singularités possibles d'une fonction. Il faut signaler que, pour un physicien, des singularités telles que les chirps ne sont pas des bizarreries dues à la malice des mathématiciens : les chauve-souris émettent des ultra-sons en forme de chirps pour se diriger, et de nombreux problèmes physiques conduisent naturellement à en considérer ; ils apparaissent dans les ondes gravitationnelles issues de la fusion de deux trous noirs, cf par exemple (Chassande-Mottin *et al.* 2016), et, dès les années 1980, il était conjecturé que, au sein même des écoulements turbulents, des chirps peuvent apparaître au voisinage des filaments de vorticité. De tels comportements très oscillatoires méritaient donc d'être considérés avec attention. Une compréhension en profondeur de la transformée en ondelettes de ce type de fonctions a été obtenue sous les efforts conjugués d'un physicien, Bruno Torresani, un spécialiste de traitement du signal, Patrick Flandrin, et un mathématicien, Yves Meyer, *cf.* (Jaffard 1989, Flandrin *et al.* 2018) et ref. citées. Elle m'a ensuite permis, en collaboration avec Alain Arneodo et son équipe, de proposer une nouvelle version du formalisme multifractal, pour laquelle les chirps ne sont plus une exception : elle est au contraire plus riche, au sens où, pour chaque couple (h, β), elle permet d'estimer les dimensions des ensembles de points au voisinage desquels on trouve un comportement du type (VI.9), *cf.* (Arneodo *et al.* 1997, Arneodo *et al.* 1998).

Revenons à la reformulation du formalisme multifractal, proposée par Alain Arneodo, au moyen des extrema locaux de la transformée continue en ondelettes. Paradoxalement, cette reformulation, qui résolvait avec élégance un blocage scientifique profond, épaississait le mystère mathématique entourant le formalisme multifractal ; en effet, pour $p \geqslant 1$, l'exposant $\zeta_f(p)$, s'il est défini par la formule VI.7, s'interprète facilement comme indiquant à quels espaces appartient f parmi toute la gamme fournie par les *espaces de Sobolev*, d'un

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Figure VI.2. Chirps et ondes gravitationnelles.



À gauche : La première onde gravitationnelle enregistrée (après débruitage), suite à la fusion de deux trous noirs, par le détecteur LIGO de Hanford, le 14 septembre 2015.
À droite : Onde gravitationnelle (en rouge) prévue par la théorie, dont les paramètres ont été choisis pour être au plus proche de l'onde détectée. Les régions ombrées indiquent les reconstructions possibles de l'onde gravitationnelle à partir des signaux initiaux, en utilisant une méthode par ondelette (gris clair) et une estimation bayésienne (gris foncé). On reconnait la forme caractéristique des chirps dont la « fréquence instantanée » s'accélère à l'approche de la fusion
Crédit : http://dx.doi.org/10.7935/K5MW2F23, correspondant aux résultats annoncés dans (Abbott *et al.* 2016).

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

usage courant en analyse (Jaffard 1997). Il n'en est plus de même si on le définit au moyen des extrema locaux de la transformée continue en ondelettes (et cette question reste, encore aujourd'hui, mystérieuse). Un petit miracle mathématique s'est alors produit : il suffit de remplacer ces quantités par des suprema locaux des coefficients discrets d'ondelettes (sur une base orthonormée) pour retrouver un cadre mathématique rassurant, qui aligne de « bonnes propriétés » (Jaffard 2004, Jaffard *et al.* 2006). Plus précisément, si l'on indexe les coefficients d'ondelette (équation VI.3) par l'intervalle dyadique

$$\lambda_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$$

sur lequel l'ondelette est « essentiellement concentrée », on définit les *coefficients dominants* de f par

$$D_{j,k}(f) = \sup_{\lambda_{j',k'} \subset \lambda_{j,k}} |C_{j,k}(f)|.$$

La nouvelle fonction d'échelle est de nouveau calculée au moyen d'une régression log-log

$$\sum_k D_{j,k}(f)^p \sim 2^{-\eta_f(p) j} \quad \text{quand } j \to +\infty \tag{VI.10}$$

(le facteur d'échelle discret 2^{-j} joue le rôle du facteur de contraction a dans la transformée continue en ondelettes). On peut alors démontrer que les propriétés suivantes sont vérifiées (Jaffard 2004) :

- Quand p est positif, on obtient ainsi des nouveaux espaces fonctionnels intrinsèques (c'est-à-dire indépendants de la base d'ondelettes choisie).
- On ne peut plus espérer obtenir des espaces fonctionnels quand p est négatif, mais les propriétés ainsi définies restent intrinsèques.

- Les chirps « rentrent dans le rang » quand la régularité ponctuelle est estimée au moyen de régressions log-log de ces sup locaux : ils ne forment plus une exception (et il n'y en a pas d'autres).

C'est donc une suite d'aller-retours entre théorie et applications qui a fini par fournir le « bon cadre » mathématique pour interpréter le formalisme multifractal, et c'est dans ce cadre que l'on peut démontrer qu'il a la validité la plus grande, notamment pour des valeurs de p négatives. Notons que de nombreux problèmes fondamentaux se posent encore. Ainsi, trouver une bonne notion mathématique de généricité qui permette d'affirmer que le formalisme multifractal est vérifié par « presque toute » fonction pour des valeurs négatives de p (pour lesquelles plus aucune interprétation de la fonction d'échelle en termes d'espaces fonctionnels n'est possible) reste un problème complètement ouvert.

Un aspect fascinant de l'analyse multifractale est que, une fois les outils conceptuels et numériques mis en place, cette analyse s'est révélée pertinente dans un très grand nombre de domaines des sciences fondamentales et appliquées ; Alain Arneodo était particulièrement fier des résultats obtenus avec ses collaborateurs pour l'analyse de séquences d'ADN du génome humain, mais aussi pour l'analyse de mammographies, permettant une détection très précoce des cancers du sein, et montrant que cette méthode est une approche très prometteuse pour l'aide au diagnostic en imagerie médicale *cf.* (Arneodo *et al.* 2002) et ref. citées. Dans d'autres directions, des travaux en commun avec Patrice Abry et Herwig Wendt nous ont permis d'établir des différences sur les texture des peintures de Van Gogh de périodes différentes, ou entre des Van Gogh et des imitateurs (Abry *et al.* 2013), pour la classification de papiers photographiques anciens (Abry *et al.* 2016), ou encore l'analyse de battements cardiaques, (Abry *et al.* 2010), *cf.* aussi (Jaffard 2004) où d'autres exemples d'applications sont aussi traités.



Yves Meyer et Alain Arneodo

§ 3. — Conclusion.

Ma collaboration avec Alain Arneodo m'a appris que, contrairement à ce que pensent de nombreux mathématiciens appliqués, les physiciens n'attendent pas de la part des mathématiciens des démonstrations rigoureuses

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

confirmant leur intuition. Leur intérêt est plutôt éveillé quand les mathématiques, au contraire, mettent en défaut leur intuition, mettent en lumière des phénomènes nouveaux et inattendus, et les aident à enrichir ou modifier leur intuition.

Mes interactions avec des collègues issus de sciences expérimentales m'ont aussi permis de constater que les différents disciplines ne placent pas la rigueur au même endroit du processus de découverte. Un mathématicien utilise souvent, au tout début de ce processus, des analogies floues, des intuitions mal fondées. C'est d'ailleurs souvent à cause de son côté complètement heuristique et non justifiable qu'il gomme cette partie de sa démarche dans la version finale qu'il présente à ses pairs. Ce caractère très heuristique et non rigoureux du processus de découverte mathématique ne porte pas à conséquence, car il sera justifié après coup par un raisonnement logique qui le remplacera (et malheureusement le fera le plus souvent disparaitre). Mais ce raisonnement rigoureux ne vient qu'ultérieurement, en justification, pour parachever le travail effectué et ne permet en général pas de comprendre la démarche qui a conduit à la découverte. À l'opposé, dans les sciences expérimentales, la place de la rigueur se situe au tout début, dans le protocole expérimental et elle est absolument nécessaire à ce stade pour bâtir la découverte sur des fondations inattaquables ; par contre les interprétations qui sont données peuvent être plus heuristiques et, de ce fait, le produit final peut sembler moins rigoureux qu'un article de mathématiques. Mais cette impression est erronée, et provient simplement du fait que la rigueur, qui est toujours indispensable dans l'activité scientifique, n'intervient pas au même moment.

Je remercie Yves Meyer et Thierry Paul pour de nombreuses suggestions d'améliorations de la version initiale de ce texte.

§ — Bibliographie.

Abbott B. ***et al.*** (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett*, 116:061102.

Abry P., Jaffard S. et Wendt H. (2013). When Van Gogh meets Mandelbrot : Multifractal classification of painting's texture. *Signal Proces.*, vol. 93, n° 3, p. 554–572.

Abry P. ***et al.*** (2016). Wove Paper Analysis through Texture Similarities. Dans *Proc. IEEE Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, USA.

— (2010). Methodology for multifractal analysis of heart rate variability : From LF/HF ratio to wavelet leaders. Dans *Nonlinear Dynamic Analysis of Biomedical Signals EMBC conference* (*IEEE Engineering in Medicine and Biology Conferences*) *Buenos Aires*.

Arneodo A. ***et al.*** (2002). Wavelet-based multifractal formalism : applications to DNA sequences, satellite images of the cloud structure and stock market data. *The Science of Disasters ; A. Bunde, J. Kropp, H.J. Schellnhuber, Eds.* (*Springer*), p. 27–102.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

— (1997). Oscillating Singularities on Cantor sets. A grand-canonical multifractal formalism. *Journal of Statistical Physics*, vol. 87, n° , p. 179–209.

— (1998). Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities. *J. Fourier analysis and Applications*, vol. 4, p. 159–174.

ARNEODO A., BACRY E. et MUZY J. (1995). The Thermodynamics of Fractals Revisited With Wavelets. *Physica A*, vol. 213, n° 1-2, p. 232–275.

BARRAL J. et PEYRIÈRE S. (2015). Mandelbrot's cascades : A legendary destiny. *Benoit Mandelbrot : A Life in Many Dimensions, M. Frame, Ed., World scientific publishing*, p. 143–172.

CHASSANDE-MOTTIN E., JAFFARD S. et MEYER Y. (2016). Des ondelettes pour détecter les ondes gravitationnelles. *Gazette de la S.M.F.*, vol. 148, p. 61–64.

DAUBECHIES I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and App. Math.*, vol. 41, p. 909–996.

DAUBECHIES I., GROSSMANN A. et MEYER. Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.*, (réédité dans : *Fundamental Papers in Wavelet Theory*, **HEIL C. et WALNUT D.**, éds) 27, p. 1271-–1283.

FARGE M. et RABREAU G. (1988). Transformée en ondelettes pour détecter et analyser les structures cohérentes dans les écoulements turbulents bidimensionnels, *C. R. Acad. Sciences Paris*, s. 2, 307, p. 1479–148.

FLANDRIN P. (2018). *Explorations in Time-Frequency Analysis*, Cambridge University Press.

FRAYSSE A. et JAFFARD S. (2006). How smooth is almost every function in a Sobolev space ? *Rev. Mat. Iberoamer.*, vol. 22, n° 2, p. 663–682.

FRISCH U. (1993). *Turbulence, the Legacy of A.N. Kolmogorov*. Addison-Wesley.

GROSSMANN A. et MORLET J. (1984). Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math.*, vol. 15, p. 723–736.

GROSSMANN A., MORLET J. et PAUL T. (1985). Transforms associated to square integrable representations I. *J. Math. Phys.* (réédité dans : *Fundamental Papers in Wavelet Theory*, **HEIL C. et WALNUT D.**, éds), vol. 26, p. 2473–2479.

JAFFARD S. (1989). Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d'ondelettes. *C. R. Acad. Sciences Paris, Série I* (*réédité dans : Fundamental Papers in Wavelet Theory, C. Heil et D. Walnut, eds.*), vol. 308, n° , p. 79–81.

— (1997). Multifractal formalism for functions. *SIAM J. of Math. Anal.*, vol. 28, n° 4, p. 944–998.

— (2000). On the Frisch-Parisi conjecture. *Jour. Math. Pures Appl.*, vol. 79, n° 6, p. 525–552.

— (2004). Wavelet techniques in multifractal analysis. Dans **LAPIDUS M. et VAN FRANKENHUIJSEN M.**, éds, *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot, Proc. Symp. Pure Math.*, p. 91–152, AMS.

JAFFARD S., LASHERMES B. et ABRY P. (2006). Wavelet leaders in multifractal analysis. Dans **QIAN T., VAI M. et YUESHENG X.**, éds, *Wavelet Analysis and Applications*, p. 219–264, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2021

Jaffard S., Meyer Y. et Ryan R. (2001). *Wavelets, Tools for Science and Technology*. SIAM.

Kolmogorov A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *C. R. Acad. Sciences URSS*, vol. 30, p. 301–305.

Lashermes B. *et al.* (2008). Comprehensive multifractal analysis of turbulent velocity using the wavelet leaders. *European Physical Journal B*, vol. 61, p. 201–215.

Lemarié P.-G. et Meyer Y. (1986). Ondelettes et bases hilbertiennes. *Rev. Mat. Iberoamer.*, vol. 1, p. 1–18.

Mallat S. (1989). Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L^2, *Trans. A.M.S.*, vol. 315, p. 69–87.

Marr D. (1982). *Vision, A computational investigation into the human representation and processing of visual information*. W ; H. Freeman and Co.

Meyer Y. (1990). *Ondelettes et Opérateurs*. Hermann, Paris, English translation : *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, 1992.

Morlet J. (1981). Sampling theory and wave propagation. Dans *Proc. 51st Annual International Meeting of the Society of Exploration Goephysicists*, Los Angeles.

Muzy J., Bacry E. et Arneodo A. (1991). Wavelets and multifractal formalism for singular signals : application to turbulence data. *Phys. Rev Lett.*, vol. 67, p. 3515–3518.

Parisi G. et Frisch U. (1985). Fully developed turbulence and intermittency. Dans **Ghil M., Benzi R. et Parisi G.**, éds, *Turbulence and Predictability in geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, p. 84, North-Holland, Amsterdam.

Strömberg J. (1983). A modified Franklin system and higher order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces. Dans **W. Beckner**, éd, *Conference in honor of Antoni Zygmund*, vol. 2, p. 475–493, Wadsworth Math series.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

© Spartacus-Idh 2021

Science et BD, comme sauvegarder la rigueur en situations extrêmes

Roberto Natalini

On part du « Principe d'indétermination dans la communication de la science » (Pietro Greco 2005 [1])

$$\Delta r \cdot \Delta c \geqslant k$$

où r représente la rigueur et Δr est l'erreur par rapport à la diffusion rigoureuse de l'information dans chaque exemple de la communication de la science, c'est-à-dire la simplification et l'approximation que l'on fait quand on présente un argument scientifique à un public de non spécialistes ; c représente la transmissibilité d'un certain contenu scientifique, et Δc est l'erreur par rapport à la capacité que l'on a à transmettre des informations scientifiques de manière à ce que l'interlocuteur puisse comprendre ; k représente une constante supérieure à zéro ($k > 0$) qui dépend du public et des arguments. C'est évidemment un jeu, une sorte de parodie du principe d'indétermination de Heisenberg, mais qui nous montre bien l'impossibilité de transmettre complètement un certain

Figure VII.1. Archimède dessine sur le sable, Giuseppe Palumbo, *Archimede* nº 1, 2016.



(1) Pietro Greco, What type of Science Communication best suits emerging countries ?, Journal of Science Communication 4 (3), September 2005, https://doi.org/10.22323/2.04030901.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

contenu scientifique sans diminuer drastiquement notre public et dont il faudra toujours se rappeler.

FIGURE VII.2. Il faut bien viser un publique bien déterminé.



Dans la communication de la science, il faut donc toujours se rappeler de ce principe d'indétermination pour essayer de conjuguer rigueur et communication efficace.

Il y a différents types de public et situations : Collaborateurs, Collègues spécialistes, Collègues non spécialistes, Étudiants, Commissions, Directeurs, Évaluation, Politique académique, Jeunes, Grand Public (avec aussi des intersections non vides).

Finalement l'écriture d'un article scientifique est aussi un acte de communication, où l'on décide de garder seulement des éléments choisis pour un public donné. La communication a des motivations internes et externes :

- motivations internes à la communication : justifier sa position, se faire connaître, défendre son propre rôle, créer une niche favorable pour la science.
- motivations externes à la communication de la science : citoyens informés, société digitale et technologique, maîtriser la science, s'opposer aux « armes de destruction mathématique » (Cathy O'Neil, 2016 (2)).

Souvent on trouve énoncé la loi n° 1 de la communication : pour chaque catégorie de public, il faut trouver le registre le mieux adapté pour nous faire comprendre. Mais bien avant de la loi n° 1, il y a la loi n° 0 de la communication : avoir (ou trouver) son propre public. D'habitude on cherche à communiquer en utilisant tous les médias habituels : livres, films, les émissions de science à la radio, les articles de vulgarisation, conférences grand public, vidéos sur youtube. Et il y a aussi les fêtes de la science, les laboratoires pour les enfants. Mais souvent certains de ces médias arrivent seulement à un public déjà intéressé, ou bien les difficultés de réalisation sont insurmontables.

FIGURE VII.3. Il faut trouver quelqu'un qui nous écoute. Mordillo, Football, 1981.



(2) Cathy O'Neal, Weapons of Math Destruction (Crown 2016).

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

On ne peut pas réaliser tous les jours des films comme « A beautiful mind » or « Imitation game », qui, à cause de leur budget élevé, doivent forcement faire un compromis entre le rigueur et le spectacle.

Figure VII.4. Scène du film *Arrival* (*Premier contact*) (2016), tiré de *Story of Your Life* par Ted Chiang.

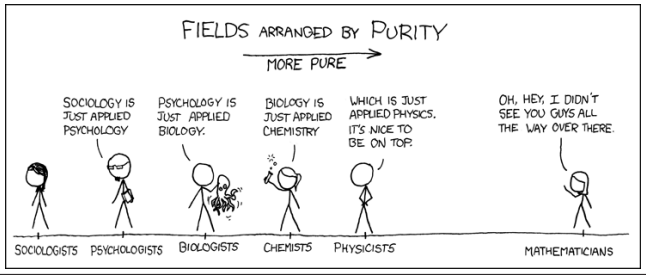


Figure VII.5. Donald au pays des Mathémagiques (1959) - ©Walt Disney.



On peut alors envisager une solution extrême : la bande dessinée. Pourquoi la BD ? Parce que la BD sollicite l'imagination, est directe, est synthétique, est populaire et cultivée, tout ça en même temps. Et avec la BD on peut facilement surmonter la question du budget, tout en gardant une rigueur complète.

Figure VII.6. Purity, by @Xkcd https://xkcd.com/435/.

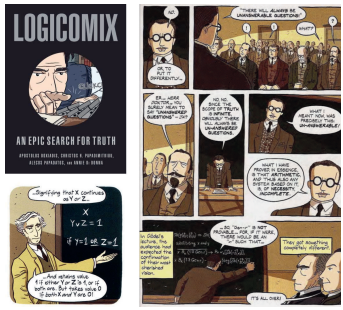


© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 1. — Bestiaire de quelques bouquins indispensables.

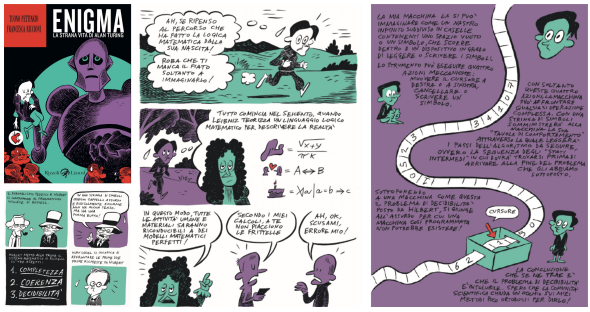
Logicomix est un roman graphique sur la recherche des fondements des mathématiques publié en 2008. Le texte a été écrit par l'écrivain Apóstolos K. Doxiàdis et le professeur et chercheur en informatique théorique Christos H. Papadimitriou (de l'université de Californie, Berkeley). La conception des personnages et les dessins sont d'Alecos Papadatos et la mise en couleurs d'Annie Di Donna.

FIGURE VII.7. Logicomix.



Enigma. La strana vita di Alan Turing, roman graphique en Italien par Tuono Pettinato et Francesca Riccioni, Rizzoli Lizard 2012. L'histoire humaine et scientifique d'Alan Turing, le père de l'intelligence artificielle.

FIGURE VII.8. Enigma. La strana vita di Alan Turing.



Ultima lezione a Gottinga, par Davide Osenda, 001 Edizioni 2009. Une histoire se déroulant en Allemagne pendant la dictature nazie, où un vieux professeur juif et un jeune homme discutent de la théorie de l'infini de Cantor.

FIGURE VII.9. Ultima lezione a Gottinga.



© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 2. — L'expérience sur le terrain.

Comics&Science est une série de CNR Edizioni (de l'Unité de communication et de relations publiques du CNR — *Consiglio Nazionale delle Ricerche*) qui tire son nom de la section homonyme de la programmation culturelle du Festival de la BD à Lucca, Comics & Games, avec laquelle il a un rendez-vous régulier depuis 2012. Son objectif est de promouvoir la relation entre la science et le divertissement, dans la conviction que les deux constituent des moments de formation importants pour la croissance de l'individu et du citoyen. La direction éditoriale est confiée à Roberto Natalini et Andrea Plazzi. Le titre « Comics » fait référence à un langage privilégié, celui de la bande dessinée, choisi comme le moyen idéal pour communiquer idées et histoires. Pour l'instant 16 bandes dessinées ont été publiées [(3)].

Figure VII.10. Andrea Plazzi et Roberto Natalini (à gauche) vus par le célèbre auteur de bandes dessinées Zerocalcare (à droite), tiré de Comics & Science, The Light Issue, 2018.



Poincaré disait : « La géométrie est l'art du raisonnement correct à partir de figures mal dessinées. » Aussi, avec le projet Comics&Science, a-t-on cherché à améliorer le dessin des figures. Au delà de la blague, il est clair que, si l'intuition « rigoureuse » de Poincaré n'a besoin d'aucun support artistique (et encore...), la communication a besoin d'exploiter l'attraction intrinsèque exercée par l'objet artistique qui la véhicule, et la qualité des histoire et des dessins — l'originalité, l'ironie, le comique — deviennent éléments essentiels pour assurer le succès d'une bande dessinée scientifique.

Figure VII.11. De gauche à droite : *The Women in Math Issue*, Alice Milani, Claudia Flandoli, 2018. *The Light Issue*, Zerocalcare, 2018. *The Stellar Issue*. Licia Troisi, Carmine Di Giandomenico, Alessandro Micelli, Leo Colapietro, 2019. *The AI Issue*, Diego Cajelli, Andrea Scoppetta, 2020.



(3) https://www.cnr.it/it/comics-and-science.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

La première bande dessinée de la série Comics & Science, publiée en 2013, avait pour auteur le célèbre dessinateurs Leo Ortolani, qui pour plus de vingt ans a créé les histoires de son personnage Rat-Man. À cette occasion, Ortolani a imaginé une improbable émission télévisée sur la science dans laquelle, parmi la biographie de mathématiciens inventés mais non moins réalistes, tels que Jean-Pierre Bagolot, le véritable mathématicien Cédric Villani, lauréat en 2010 de la médaille Fields, fait son apparition. Cette BD a été vendue à 12.000 exemplaires.

FIGURE VII.12. *Misterius*, Leo Ortolani, 2013.



Qu'est-ce que la bibliothèque d'Alexandrie, l'empire byzantin et un moine amanuensis du XIII[e] siècle ont à voir avec l'occupation nazie de Paris, une vente aux enchères pour millionnaire et les brillantes découvertes mathématiques d'Archimède ? Ou encore, quelle différence y a-t-il entre un papyrus et un parchemin ? Qu'est-ce qu'un palimpseste ? Comment les textes écrits ont-ils été préservés dans l'Antiquité ? Ce sont des questions importantes pour la transmission de la science et du savoir, dans le contexte de l'extraordinaire bande dessinée « Archimède 2.0 » de Giuseppe Palumbo, publiée dans Comics&Science, *The Archimedes Issue*, 2017. C'est l'histoire fascinante et vraie jusque dans les moindres détails de la façon dont les découvertes du génie de Syracuse nous sont parvenues.

FIGURE VII.13. *The Archimedes Issue*, Giuseppe Palumbo, 2017.

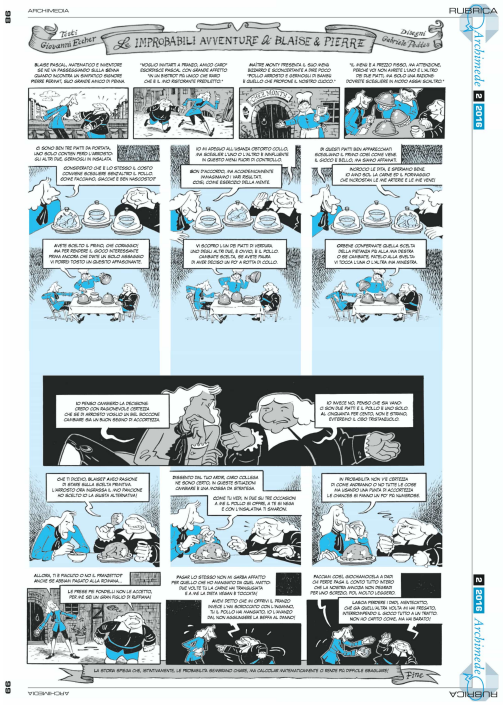


Dans le journal *Archimede*, publié par Mondadori, nous avons présenté le problème de Monty Hall, réinterprété par les auteur de BD Giovanni Eccher et Gabriele Peddes. En 1654, Blaise Pascal et Pierre de Fermat ont tenu une correspondance importante sur le problème des partis : comment partager la mise si un

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

jeu est interrompu avant la fin ? Aujourd'hui, leur correspondance est considérée comme l'acte de naissance de la théorie moderne des probabilités. Nous aimons à imaginer que Pascal et Fermat, sortis victorieux de la comparaison avec les limites de leur propre intuition, auraient trouvé amusants et intéressants les paradoxes que leur travail inspira dans les siècles suivants. Pour cette raison, avec la complicité de Giovanni Eccher et Gabriele Peddes, nous avons décidé de les faire se rencontrer enfin (ils ne se sont jamais rencontrés en personne), dans une histoire écrite en vers et avec la structure de la solution du problème de Monty Hall.

Figure VII.14. le problème de Monty Hall, *Archimede*, Giovanni Eccher et Gabriele Peddes, 2016.



Toujours dans le journal *Archimede*, on a abordé, encore une fois avec la BD, une recherche assez connue de Alan Turing. En 1952, Turing s'occupe de biologie, fondant ainsi toute une branche des bio-mathématiques modernes. Dans *La base chimique de la morphogenèse* Turing observe comment la diversification des organismes vivants, et en particulier des différents motifs récurrents, ou "patterns", typiques de nombreuses structures biologiques, ne s'explique pas à partir de la simple division cellulaire. Il propose donc un modèle de réaction-diffusion entre substances chimiques dans lequel des perturbations, même minimes, évoluent vers une distribution homogène, passant de l'équilibre initial à celui dans lequel « après un certain laps de temps depuis le début de l'instabilité, un schéma de concentrations morphogénétiques apparaît ce qui peut être décrit en termes de "vagues". » Claudia Flandoli a proposé aux lecteurs d'Archimède une interprétation amusante du modèle de Turing en termes d'interactions sociales, en prenant comme exemple la fête du Nouvel An.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Figure VII.15. Le modèle de turing, *Archimede*, Claudia Flandoli.



§ — En guise de conclusion.

Au début, les hommes s'exprimaient par des gestes et des sons inarticulés. Ensuite, ils ont commencé à compter les animaux tués, ou les jours et les saisons, en traçant des marques ou en alignant des cailloux (khalix, calcul). C'est peut-être à partir de ce moment que l'abstraction de la réalité — un signe au lieu d'un véritable objet — et l'art graphique ont commencé leur chemin commun. Et les choses n'ont pas trop changé depuis : lorsque nous avons demandé à l'auteur de la bande dessinée Giuseppe Palumbo une histoire sur Archimède, il a montré celui-ci en train de tracer des figures géométriques sur le sable de la plage de Syracuse. La science et les signes pour la dire sont ensemble depuis longtemps : une idée ancienne et plus actuelle que jamais.

La philosophie du projet Comics&Science est très simple : parler de la science — à un niveau élevé — avec des bandes dessinées faites par les meilleurs auteurs dans le panorama artistique italien (et pas seulement) et accompagnées d'articles développant des perspectives, précis et rigoureux. Des histoires qui surtout divertissent et attirent le public pour ce qu'elles sont : des bandes dessinées intéressantes et valables sur le plan artistique. Nous n'avons jamais pensé à une opération d'affichage purement didactique.

La rigueur artistique, exprimée d'abord par l'excellence des auteurs considérés, s'est bien combinée avec la rigueur mathématique et scientifique. Mais peut-être la plus grande preuve de rigueur a été celle de démontrer, en fait, l'efficacité déraisonnable de l'idée de créer de la curiosité autour de la science à l'aide de la bande dessinée. Et les sujets à raconter, et les auteurs capables de le faire, semblent ne jamais finir.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

Rigueur, technologie et perception

La métaphore de la science dans la musique, la rigueur dans les différents processus de conception sonore et musicale

Núria Giménez Comas



Résumé

La question de fond que nous nous posons dans ce texte est de savoir comment le phénomène physique sonore qui succède à l'abstraction agit sur la « création musicale ou sonore » et comment le compositeur peut faire face à ce sujet. Je vais tenter de dégrossir une conception de la rigueur (en tant que précision ou exactitude) dans les différents processus créatifs : composition d'une pièce (instrumentale, électroacoustique, mixte), la programmation comme processus de composition (développement des outils informatiques pour trouver de nouvelles voies, ou des outils plus adaptés à l'écriture de chacun), recherche sonore ou musicale (qui permet d'aller plus loin dans les idées artistiques). Tout cela en ayant l'espace, le temps et l'idée de métaphore musicale comme points centraux de la réflexion.

Un deuxième échange.

Dans une première rencontre-échange croisée Mathématiques-Musique-Philosophie avec T. Paul, B. Remy et M. Schmidt à l'École polytechnique (1)*, j'ai pu exposer des idées autour de l'usage des « Mathématiques comme métaphore », après les lectures très enrichissantes suggérées notamment par le compositeur Thierry de Mey (Mathematics as métaphore* (2) *par Y. Manin, entre autres). De cette rencontre avec les mathématiciens et philosophes, ainsi que la figure captivante de Pierre Cartier, se sont détachées certaines réflexions et de nouvelles lectures. Ces documentations et cet élargissement de la vision transversale de certains sujets ont également permis d'amorcer une nouvelle discussion avec le musicologue espagnol Pedro Ordóñez-Eslava* sur l'utilisation de la « métaphore mathématique » comme source d'inspiration dans certaines de mes pièces, *qui a mené en partie à l'écriture d'un article pour le livre Twentieth-Century Music and Mathematics* (3) *sur la musique espagnole, avec une*

(1) « Journée Musique-Philo-Math » 12 décembre 2018, https://portail.polytechnique.edu/cmls/journee-musique-philo-math.

(2) Mathematics as métaphore, Yuri L. Manin. Selected essays, American Mathematical Society 2009.

(3) *Twentieth-Century Music and Mathematics.* « Ars combinatoria : poéticas del número en la composición española contemporánea (1980-2018). Breve antología inacabada », Pedro Ordóñez-Eslava.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

analyse transversale de F. Guerrero Marín jusqu'à nos jours. Après certaines convergences d'intérêts dans la discussion finale de cette première session, j'ai envisagé la participation à un deuxième colloque, centré sur le sujet de la « rigueur [4] », comme une continuation de cette réflexion élargie. Selon ma vision, en tant que compositrice, je ne peux qu'aborder le sujet d'après mes expériences musicales et les influences que j'ai reçues (plus concrètes, mais aussi plus abstraites) ainsi que sur la recherche technologique toujours connectée à l'idée artistique. L'idée était de se centrer sur une vision de rigueur musicale à chercher à partir des figures du passé qui ont marqué cet aspect transversal sciences-musique et qui ont influencé ma démarche, comme Xenakis et Risset, et qui m'aident toujours en tant que source d'inspiration pour de nombreuses recherches actuelles. J'aimerais donc aborder ces espaces croisés, en partant toujours d'une conception poïétique qui nous amène à des nouvelles œuvres.

En m'excusant déjà d'une possible manque de « rigueur scientifique ou technique », cette proposition, reste bien sûr personnelle et pourtant subjective.

Cet article s'articule de la manière suivante. Dans l'introduction, nous aborderons la rigueur en tant qu'exactitude ou précision, dans le processus créatif d'une façon globale. Dans la deuxième partie, nous évoquerons le travail de la rigueur dans le processus spécifique de la resynthèse, en tant que « métaphore » sonore, et le rôle de la rigueur et de la précision dans cette reconstruction sonore précisément dans l'œuvre, avec quelques exemples de pièces. Dans le troisième point, nous nous concentrerons sur le travail et les recherches concernant l'espace sonore et musical. Nous conclurons dans la dernière partie, et nous mentionnerons certains aspects issus des discussions pendant le colloque RIGUEUR qui nous permettront d'avoir d'autres points de vue sur les aspects traités, ainsi que d'ébaucher certaines perspectives.

§ 1. — Introduction : sur la rigueur.

Nous allons aborder le sujet de la rigueur en musique confrontée aux « espaces d'ouverture », c'est à dire aux influences d'autres domaines, mais aussi confrontée aux contraintes, aux accidents ou au hasard.

Nous allons aussi considérer certaines problématiques que nous avons rencontrées dans le travail « rigoureux » sur les calculs numériques en musique : connaître les outils informatiques à penser pour faire face à ce sujet et savoir comment ils agissent dans le processus compositionnel : par exemple l'usage des fractales (des modèles de la « nature ») ou d'autres formes (comme des symétries, etc.), et les problématiques rencontrées dans le processus de translation de ces calculs vers le champ musical.

Bien entendu, dans la mesure où la musique (électronique, instrumentale ou mixte) nécessite un son qui vit, dans l'espace et dans le temps, le processus

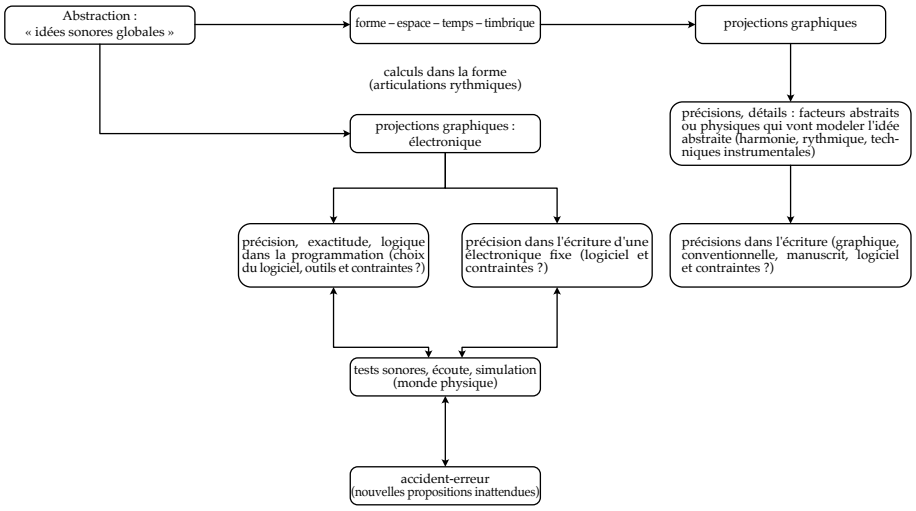
(4) Colloque RIGUEUR, 2-3 juillet 2019, Colloque Multidisciplinaire organisé dans le cadre du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, par Geoffroy Drouin, Thierry Paul, Bertrand Rémy et Michael Schmidt. EHESS – Amphithéâtre François Furet, https://indico.math.cnrs.fr/event/4602/overview

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

de transmission sonore se termine par la perception (de la part de l'auditeur, chercheur, etc.). Dès le départ du processus, on sait que l'abstraction devra interagir avec des intermédiaires qui vont toujours agir - modeler à la fois cette transmission sonore mais aussi la perception du phénomène : l'instrumentiste, la salle, les outils informatiques.

Pour avoir une idée visuelle de ces connexions entre les différents axes — abstraction-recherche, programmation-écriture, interprétation-diffusion et transmission-perception — nous proposons la figure suivante.

Figure VIII.1. Connexions entre les différents axes.



Dans ce schéma, on trouve toutes les connexions, et leurs orientations possibles dans un processus de recherche dans lequel la précision nous oblige parfois à revenir aux étapes précédentes.

Si l'on aborde le jeu instrumental (donc si l'on ne parle pas seulement de la musique électroacoustique), on doit confronter ces modèles abstraits à la « physicalité » (physicality en anglais) du geste de l'instrumentiste ou aux problématiques de l'écriture (notamment pour le rythme, lié aussi à une pratique proprement physique du rythme).

J'aimerais à ce propos citer un de mes articles dans la revue musicale catalane *Sonograma Magazine* : « Matemàtiques com a metàfora. Nous reptes tecnològics » [5] (« Mathématiques comme métaphore. Nouveaux défis technologiques »), dans lequel j'ai proposé de réfléchir aux influences de la musique de Helmut Lachenmann, que nous croyons primordiales pour notre génération. Dans la musique de Lachenmann, l'importance et la physicallité du geste prend un rôle indispensable. Ainsi pouvons nous considérer que le travail formel de Lachenmann reste complètement connecté à la rigueur telle que nous concevons.

(5) « Matemàtiques com a metàfora. Nous repues tecnològics » Núria Giménez Comas, revue *Sonograma Magazine*. Revue de pensée musicale et diffusion culturelle en ligne. http://sonograma.org/2020/01/matematiques-com-a-metafora-nous-reptes-tecnologics/

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Proposons deux exemples d'axes de recherche artistique connectées à ma pièce **Abraxas M** [6] :

- travail sur les fractales et autosimilarité (richesse et unité) — construction de rythmes, gestes mélodiques, etc.
  La première source d'inspiration était une certaine complexité face à une définition algorithmique « simple ». Au niveau sonore, nous arrivons à obtenir des gestes complexes avec une structure simple. Ces idées marchent très bien dans un contexte électronique, bien sûr. Par contre, dans d'autres contextes, les limites physiques pourraient mettre en doute la clarté de la forme proposée (surtout dans des exemples d'une grande densité et/ou vitesse).
- travaux formels et rythmiques, calculs numériques sur la forme et le rythme par exemple sur le travail des symétries,
  Ces travaux prennent évidemment une forme très rigoureuse dans un contexte électronique. Mais nous avons trouvé des problématiques similaires et dans des discussions récurrentes avec d'autres compositeurs : par exemple la problématique de la quantification-écriture (tempo et mesure) [7] de la machine pour obtenir de rythmes qui puissent être joués d'une façon « physiquement » claire ou nette (on revient au geste physique).

§ 2. — Rigueur et technologie (à l'intérieur du processus créatif) : resynthèse.

La resynthèse comme métaphore formalisme-rigueur dans le processus et perception. Nous avons conçu ce concept de métaphore sonore comme étant le passage de l'idée ou pensée abstraite et poétique au fait sonore et, par conséquent, physique : il y a une certaine rigueur dans ce processus de translation, une certaine intuition abstraite et des concepts « philosophiques », et donc abstraits. Notons l'importance de cette même intuition dans la translation de ces idées initiales à des formes artistiques et musicales. Cette sorte d'intuition, combinée à une précision, dans le processus d'adaptation, le choix des outils et enfin le transfert au monde sonore, permettent d'établir les liens suivants : timbrique-électronique, temporalité-forme, matériaux-mémoire.

Rigueur dans le travail de la resynthèse La resynthèse est composée de trois étapes, l'analyse, le traitement des données et le processus de synthèses (resynthèse) de ces données, c'est à dire la reconstitution d'un nouveau son avec plus ou moins de particularités du son initial (son analysé).

Différents éléments peuvent être mis en relief dans ce processus resynthèse, en rapport à la notion de précision et d'exactitude :

(6) **Abraxas M** (2013) pièce acoustique sur la vidéo « Abraxas » of Dan Browne, première à l'Académie Manifeste (version 5.1 et stéréo) de l'IRCAM.

(7) Recherches abordées dans mes pièces ***Abraxas M*** (2013)déjà citée et ***Perì phýseôs - sur la nature*** (2019), pièce écrite pour le percussionniste Laurent Mariusse, commande du GMEM de Marseille.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

- rigueur dans l'analyse : pertinence des paramètres choisis.
- paramètres perceptifs ou non : par exemple l'analyse « Masking effect » qu'on trouve sur le logiciel AudioSclupt [8] et qui utilise l'algorithme de Terhardt (qui prend en compte l'effet de masquage et les paramètres perceptifs du domaine de la psychoacoustique).
- rigueur dans le choix, transformation ou adaptation de ces données pour une utilisation dans le champ instrumental ou pour la resynthèse.
- idée de « perfection » dans la resynthèse (reconstitution sonore) : qui peut être appropriée pour la recherche mais qui, dans un intérêt artistique, tiendra compte de la possibilité de l'erreur qui peut amener à des natures inattendues et hybrides. Nous imaginons ce concept de métaphore sonore comme une palette qui pourrait osciller entre concret et abstrait : par exemple, la reproduction du son concret progressivement transformé, avec des significations chaque fois plus abstraites.

Rigueur dans le processus de resynthèse à l'intérieur du processus créatif
Voici, dans la conception de certaines de mes œuvres, quelques détails concrets sur ce processus de translation de l'abstraction initiale et des données vers l'aspect sonore et musical :

Hyle, Les géants de Vico [9] Pour cette pièce mixte pour laquelle l'espace est essentiel à sa conception formelle, le travail rigoureux apparaît notamment sous deux aspects : les captations (sound-field) et l'analyse. Dans cette pièce qui a une structure basée sur l'idée de discours musical confronté à l'écoute de scènes sonores, la partie instrumentale a été aussi réalisé sur la base des analyses perceptives de scènes sonores. Dans mon article mentionné plus haut, on pourra trouver plus de détails sur les aspects techniques des différentes sections de l'œuvre.

Dans cette pièce a aussi été réalisé un premier travail sur la resynthèse en temps réel et en temps différé, en utilisant la librarie OMChroma [10] (pour construire des modèles pour la re-synthèse).

Notons qu'un autre aspect se révèle pertinent dans la dialectique « rigueur abstraite — rigueur physique » : celui de l'exactitude dans le calcul de la spatialisation (temps réel) et sa pertinence dans la perception. C'est-à-dire celui de la conception d'un « espace utopique versus un espace perceptif » (titre de la conférence donnée au début de ma résidence à l'ICST de Zurich) par les moyens techniques dont on dispose aujourd'hui. Ce sujet, premier pas de discussion avant d'aborder la recherche artistique sur l'idée de « sculpter l'espace » (et donc un travail sur l'espace en prenant l'espace comme point de départ pour la synthèse de nouveaux sons ou textures), sera abordé plus bas dans le paragraphe spécifique que j'ai dédié au travail de l'espace.

Dans la figure VIII.2, nous montrons des trajectoires en 3D créées pour la pièce *Hyle* avec le logiciel Holoedit [11] par des mouvements browniens en 3D.

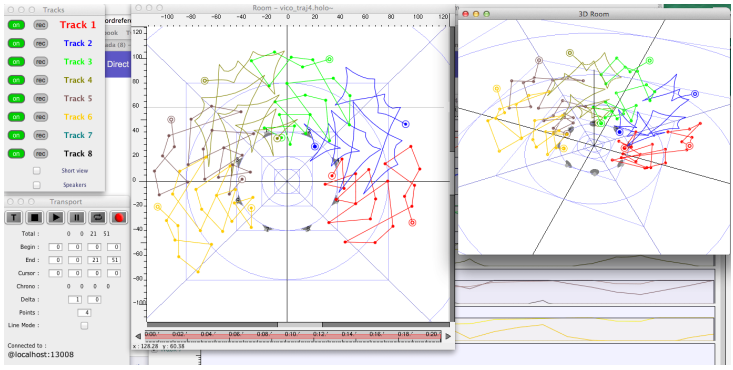
(8) AudioSculp, logiciel de l'Ircam, développé spécialement par l'Équipe d'Analyse et Synthèse des sons

(10) Librairie développée par Marco Stroppa et Jean Bresson, pour le logiciel de composition assistée par ordinateur Open Music (développé par l'Équipe de Représentations Musicales de l'Ircam)

(11) Créé au GMEM de Marseille.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

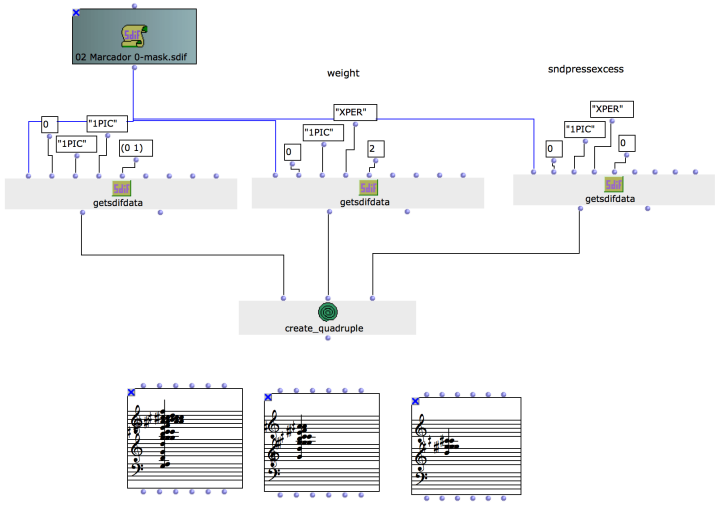
Figure VIII.2. Logiciel Holoedit utilisé pour la pièce *Hyle*.



Pour apaiser le vent et les vagues Dans cette pièce, nous avons mené un travail sur les données visant à obtenir une harmonie-timbre extraite des analyses les plus précises possibles des sons du vent, en utilisant des analyses de « Masking effect » [(12)] (qui implique l'algorithme de Terhardt). Nous avons donc abordé le sujet du filtrage de données (notamment par le paramètre du « poids perceptif »), et abordé aussi le problème de savoir comment ces données pouvaient être réutilisées et adaptées au jeu instrumental (en prenant en compte aussi le geste physique).

Dans le figure VIII.3, nous pouvons voir comment nous réduisons les notes de l'accord, de plus dense à moins dense, en prenant le « poids perceptif » (*Weight*), comme paramètre principal à déterminer, et le *Excess sound pressure level*, pour calculer une amplitude pour chaque note. Et cela en faisant toujours la comparaison avec le paramètre amplitude de la même analyse.

Figure VIII.3. *Poids perceptif* en paramètre principal.



(12) Explication du fonctionnement de cet analyse du logiciel AudioSculpt, par Coralie Diatkine : http://support.ircam.fr/docs/audiosculpt/3.0/co/masking%20effect%20analysis.html

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Perì phýseôs (Sur la nature) ou la pensée poétique : pièce conçue entièrement à partir du travail sur la resynthèse de sons du marimba. Nous avons retravaillé le concept d'« Image étendue », séparation des contenus spectraux (bruité, sinusoïdaux) sur une image étendue resynthetisée. Nous avons abordé le travail de transformation de ces données sur la synthèse et ses limites (après captation et analyse précises). Un des sujets intéressants a été la transformation comme modèle ou comme construction de sonorités abstraites à partir de ces sons instrumentaux. Nous avons imaginé ce début comme une sorte d'« aphorisme », notamment à cause de cette possibilité « infinie » de transformations de ces données obtenues.

Dans cette pièce, le travail sur la « fractalité » dans les rythmes et les rebonds [(13)], apparaît comme une sorte de polyphonie arborescente, sans affecter la complexité de la notation musicale rythmique due au choix de l'utilisation d'une notation graphique.

§ 3. — Rigueur dans la recherche et le processus de travail avec l'espace sonore, spécificités.

Dans un cadre de recherche et d'expérimentation axé notamment sur le paramètre de l'espace sonore, nous avons imaginé un petit schéma légèrement différent (figure VIII.4) présentant d'autres idées sur le travail entre monde physique-perception et les idées formelles ou le travail technologique. Ces réflexions ont été menées dans le cadre d'une résidence artistique Ircam/ZKM « Sculpter l'espace : re/synthèse spatiale en 3D de structures sonores complexes » avec le chercheur Marlon Schumacher : comme nous l'avons déjà mentionné, l'idée était de partir du paramètre de l'espace comme base afin de synthétiser de nouveaux sons et textures en 3D [(14)]. Rappelons que les recherches sur l'espace sont fondamentales pour aller à la découverte de types d'écoutes plus actifs (par exemple dans un cadre d'installation), mais aussi pour réfléchir sur le type d'écoute dans un espace 3D, dans un contexte de création musicale.

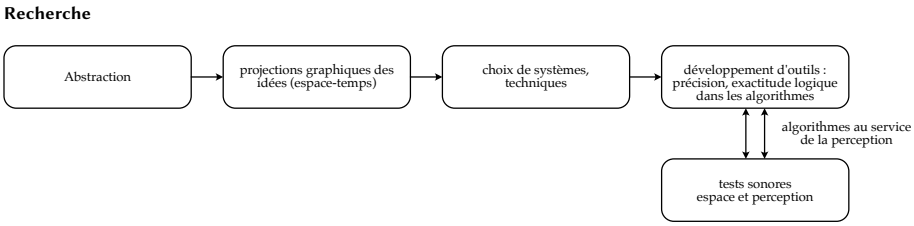
Très semblable à la figure VIII.1, il permet d'avoir une idée visuelle des connexions entre les axes spécifiques au travail centré sur la connexion physique entre espace (sonore) et temps. Ce schéma est issu d'un cadre de recherche où les outils technologiques sont en développement et, par leurs aspects perceptifs, vont le faire évoluer.

(13) Note d'intention inspirée par les textes d' Héraclite : *la pièce commence avec des gestes isolés, complexes, comme des sortes d'aphorismes poétiques. À l'intérieur, on pourra établir des connexions et associations d'éléments mais aussi entre les différentes « sentences ». Le monde instrumental et électronique fondent en un seul geste. Plus tard, des échos, des rebonds de ces « phrases » délimitées vont faire évoluer la pièce vers une partie plus rythmique, avec des rebonds en relations « fractales ». Des réponses dans l'électronique, progressivement plus denses, comme des arborescences vont amener la pièce vers des textures plus continues et avec un dialogue plus évident entre l'instrument et l'électronique.*

(14) Résidence de recherche artistique Ircam/ZKM 2018 avec Marlon Schumacher et en échange constant avec les chercheurs et développeurs de l'Ircam, spécialement Jean Bresson et Thibaut Carpentier, et aussi Marco Stroppa et l'équipe de l'EAC (Espaces Acoustiques et Cognitifs) https://www.ircam.fr/person/nuria-gimenez-comas-et-marlon-schumacher/

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Figure VIII.4. Recherche et expérimentation axées sur le paramètre de l'espace sonore.



Certains points se mettent en relief. Soulignons tout d'abord l'importance fondamentale de l'« expérimentation » (acoustique/psychoacoustique) et les liens entre programmation et perception (algorithme-perception, monde abstrait-monde physique). Par exemple, après les tests sonores, la visualisation de l'énergie sonore dans l'espace devient importante aussi comme outil [(15)], en tant qu'analyse spatiale-sonore. Signalons aussi les contraintes techniques : un travail très précis dans la spatialisation 3D sera beaucoup plus important, mais cela va aussi signifier une plus grande complexité et parfois plus de contraintes techniques (un besoin d'enceintes plus importante par exemple). Un autre fait important déjà mentionné est spécialement pertinent dans cet ambitus de travail de la spatialisation sonore : le travail en temps « différé » va gagner en précision par rapport au temps réel. Notons qu'il s'agit là d'une problématique purement technique (vitesse de calcul de machines, et donc sûrement valable pour très peu de temps...).

§ — Petite conclusion.

En conclusion de ce texte, disons que nous avons mis en relief les phénomènes physiques dans la conception musicale (comme par exemple le son qui vibre dans l'espace, mais aussi le geste instrumental qui le fait vibrer), ainsi que l'analyse de ces phénomènes. Cela nous a permis d'aller plus loin dans la recherche de nouvelles perspectives dans le domaine de la perception sonore, musicale et artistique (globale), pour lesquelles la précision et l'exactitude sont indispensables si l'on veut pouvoir évoluer dans la pensée artistique. C'est dans ces recherches que nous sommes vraiment arrivés à faire le lien entre le côté si abstrait de l'idée musicale et cet aspect si organique du son. Pour finir, nous aimerions souligner à nouveau ce concept de métaphore ou « image sonore » abstraite, par laquelle nous essayons d'atteindre cette dimension qui lie le poétique et le scientifique.

(15) Outils déjà disponibles, comme dans la Librairie Hoa pour Max, développée par le CICM, MSH ParisNord http://hoalibrary.mshparisnord.fr/en

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

La rigueur et l'esthétique cognitive dans le raisonnement mathématique

Gerhard Heinzmann

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Résumé

La preuve déductive donne une justification d'une hypothèse mathématique, mais elle est souvent insuffisante pour comprendre le théorème. Pour rendre justice au caractère épistémique du raisonnement mathématique, différents critères ont été proposés : ils procèdent souvent par restriction des moyens mathématiques ou logiques utilisés dans les preuves (intuitionisme, prédicativisme, finitisme) et conduisent ainsi à une position révisionniste.

Y-a-t-il la place pour un critère non-logique et non mathématique de rigueur en mathématiques ? En interprétant la pensée de Poincaré à la lumière de Peirce, on se propose de reconnaître dans le raisonnement mathématique de Poincaré un caractère esthétique — au sens goodmanien du terme — qui pourrait satisfaire à l'exigence en question. Nous appliquons le résultat obtenu à la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Préliminaires philosophiques

Dans le cadre d'un colloque interdisciplinaire, où le philosophe s'adresse aussi aux scientifiques, il est peut-être utile de rappeler les présuppositions philosophiques générales que j'admets ici sans discussion [(1)].

1. La philosophie a pour objet la découverte du sens des énoncés. Le sens d'un énoncé est une *proposition*.
2. Les sciences ont pour objet la découverte de la vérité des énoncés et des théories.
3. La philosophie ne peut être définie comme une *science* du sens, c'est-à-dire comme « un ensemble d'énoncés vrais », car il faudrait connaître justement le sens de ces énoncés. Régression à l'infini !
4. L'objet de la philosophie est la clarification logique des propositions [= sens]. La philosophie n'est pas une théorie, mais une activité. Le résultat de la philosophie n'est pas un nombre de « propositions philosophiques », mais bien des propositions claires (Wittgenstein).

(1) J'utilise dans la suite librement mes travaux Heinzmann 2010, 2013, 2015 et Heinzmann/van Atten 2020.

5. Le scientifique a deux tâches.

- Il doit découvrir la vérité de certaines énoncés et
- il doit également en découvrir le sens, sinon on doit le découvrir pour lui, mais il est généralement capable de le trouver par lui-même.

Dans la mesure où le scientifique découvre le sens caché des énoncés qu'il utilise dans sa science, il est philosophe.

Tous les grands scientifiques ont donné de merveilleux exemples de la méthode philosophique : Aristote, Descartes, Leibniz, Pascal, Newton ou plus près de nous : Ernst Mach, Henri Poincaré.

Ils ont découvert la signification des mots qui étaient utilisés couramment dans leur science mais dont personne n'avait jamais donné une description parfaitement claire et précise. Lorsque Newton découvrit le concept de « masse », il était alors vraiment un philosophe.

Il n'existe pas de standard de la condition à remplir pour savoir ce que signifie l'évidence du concept général de raisonnement mathématique (preuve attestant des inférences et impliquant une certaine formation de concept) et comment établir la distinction entre un raisonnement évident et un raisonnement suspect.

Une preuve est un acte qui constate qu'une inférence d'énoncé à énoncé gardant la vérité est concluante.

Il se peut qu'il n'est pas juste/correcte de considérer une inférence comme preuve, mais une preuve ne peut pas être fausse ou vraie, ces deux notions étant des prédicats pour des énoncés tandis qu'une preuve est une action, c'est-à-dire un jugement.

Nous savons par les résultats d'incomplétude de Gödel qu'un concept général de preuve, s'il en existe un, ne peut être caractérisé formellement : il existe toujours une proposition non déductible qui n'est pas seulement vrai mais également intuitivement prouvable, c'est-à-dire intuitivement reconnue comme résultat d'une inférence.

Les preuves sont des jugements et les jugements sont à expliquer en termes de conditions d'assertion.

§ 1. — Introduction.

Au mode de justification, le critère de l'inférence mathématique est sa rigueur logique.

Au mode de compréhension, différents critères de conditions d'assertion ont été proposés pour rendre justice au caractère épistémique des preuves ou du raisonnement mathématique :

a) Approches révisionnistes :

- ***i)*** Version forte : intuitionnisme (Brouwer, Heyting, Bishop)
- ***ii)*** Version faible : predicativisme (Weyl, Lorenzen, Wang, Feferman)

b) Approches non révisionnistes

- ***i)*** La métamathématique de Hilbert
- ***ii)*** Considérations esthétiques (Poincaré)

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Dans la suite, je souhaite me limiter à la discussion des deux sujets traités par Poincaré : le prédicativisme et le rôle de l'esthétique pour le raisonnement mathématique. À ce propos, je soutiens deux thèses :

i) Le prédicativisme conduit à l'acceptation d'une intuition non contrôlée.

ii) L'esthétique de Poincaré peut être fondée sur une intuition « rigoureuse » : Le fonctionnement des mathématiques en tant que système symbolique requiert un versant esthétique au sens de Nelson Goodman.

§ 2. — Prédicativisme.

Poincaré identifie en 1912 les définitions non-prédicatives comme circulaires : Une définition par postulat d'un ensemble est non-prédicative si elle contient « une relation entre l'objet à définir et *tous* les individus d'un genre dont l'objet à définir est supposé faire lui-même partie (ou bien sont supposés faire partie des êtres qui ne peuvent être eux-mêmes définis que par l'objet à définir) » [(2)] Pour Poincaré, les antinomies sont le signe d'un cercle vicieux et celui est le signe de l'erreur des cantoriens, à savoir de considérer une totalité comme une donnée indépendante de la construction de ses individus. Il formule deux définitions pour éviter l'imprédicativité :

- la définition $P(1)$ limite la quantification non restreinte aux ensembles déjà construits : il y a une restriction constructive au niveau de l'objet.
- la définition $P(2)$ impose un usage restrictif aux règles de quantification, sans limitation explicite du domaine : il y a une limitation constructive au niveau de la description. [(3)]

C'est Hermann Weyl qui propose probablement la première justification prédicative des nombres réels dans son ouvrage « Das Kontinuum » (1918). Son système utilisant un axiome de compréhension arithmétique ACA :

$\exists X \forall x [x \in X \leftrightarrow \Phi(x)]$ pour tout Φ arithmétique, où la variable X n'est pas dans Φ

est révisionniste : la définition de la borne supérieure dans les nombres réels devient non-prédicative et $\mathbb{R}$ devient donc incomplet.

Dans son ouvrage « *Différential und Integral* » (1965), Paul Lorenzen (1915-1994) obtient dans le cadre des mathématiques opératives quelques résultats classiques en mathématiques :

- la représentation de toutes les fonctions élémentaires à l'aide de la série de Taylor,
- la réduction du calcul intégral au calcul différentiel,
- la réduction des intégrales multidimensionnels à des intégrales unidimensionnels.

(2) Poincaré, La logique de l'infini, *Scientia* **12**, 1912 ; in : Heinzmann 1986, 305-315, 311.
(3) Voir Heinzmann, *Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédicativité*. Paris, Blanchard, 1985, p. 57 *sq*.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Il donne ainsi un aperçu plus large de la formalisation de la prédicativité. Les mathématiques opératives sont prédicatives, mais la prédicativité coïncide-t-elle avec les mathématiques opératives ? La réponse est : non !

L'idée de Hao Wang (1921-1995) était de partir d'une hiérarchie d'ensembles prédicatifs $\sum_\alpha$ ordonnée par des ordinaux récursifs α. Georg Kreisel (1923-2015) a proposé la thèse selon laquelle tous les ensembles prédicativement définissables appartiennent à $\sum \omega_1$, où ω_1 est la borne supérieure des ordinaux récursifs. Stephen Cole Kleene (1923-2015) a prouvé en 1959 que $\sum \omega_1$ coïncide exactement avec ce qu'on appelle la classe

$$\Delta^1_1$$

des ensembles hyperarithmétiques.

Hélas, nous ne pouvons conclure de la validité d'un théorème en analyse hyperarithmique à sa prédicativité. L'analyse prédicative semble se situer quelque part entre l'analyse arithmétique et l'analyse hyperarithmétique.

En plus, une autre difficulté se présente : la classe des ensembles hyperarithmétiques n'est pas elle-même définissable de manière prédicative et spécifie uniquement pour le non-prédicativiste ce que devrait être l'univers prédictif. L'utilisation d'ordinaux, c'est-à-dire la présupposition d'ensembles bien ordonnés [(4)], viole le concept de prédicativité au niveau de la description : la relation de bon ordre est imprédicative.

À partir des deux idées $P(1)$ et $P(2)$ de prédicativité de Poincaré, Solomon Feferman a alors introduit le concept d'« ordres prédicativement bien fondés » ou « d'ordinaux prédicatifs » dont le type d'ordre peut être prédicativement démontré (jusqu'à Γ_0).

Ainsi, la définissabilité prédicative perd son évidence en faveur d'une preuve prédicative. Cependant, le passage vers la preuve ne change rien par rapport à la définissabilité prédicative restée floue, mais ajoute un autre critère. La formalisation de la prédicativité ne va pas plus loin que l'intuition de Poincaré : elle reste floue.

§ 3. — L'esprit de finesse.

L'unité de la preuve. Poincaré souligne à beaucoup d'endroits que d'un point de vue mathématique, une preuve explicative peut « dépasser » une preuve par une suite logique d'énoncés. En d'autres termes, la compréhension logique d'une preuve n'est pas nécessairement explicative, c'est-à-dire ne répond pas à toutes nos questions « pourquoi ? » :

> « *Un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal ? Il en est de même en mathématiques. Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore*

(4) Un ensemble ordonné est dit bien ordonné si chaque sous-ensemble non vide de cet ensemble comporte un premier élément ou si chaque sous-ensemble propre de cet ensemble comporte un premier élément.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

> *la réalité tout entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement.* »
>
> *Science et méthode*, p. 133-134

Ce qui nous est utile est l'unité qui peut être aperçue à travers l'harmonie esthétique :

> « *Les combinaisons utiles, ce sont précisément les plus belles, je veux dire celles qui peuvent le mieux charmer cette sensibilité spéciale que tous les mathématiciens connaissent.* »
>
> *Science et méthode*, p. 58

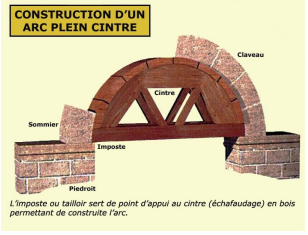
Les modèles du peintre jouent pour le mathématicien un rôle analogue aux modèles du physicien : ils permettent d'embrasser et d'étendre notre connaissance du monde grâce à la mise en place d'une nouvelle harmonie, qui nous fait en retour pressentir de nouvelles lois mathématiques (*ibid.*).

Selon Poincaré, les mathématiques ont un but physique *et* esthétique :

> « *Ces deux buts sont inséparables et le meilleur moyen d'atteindre l'un, c'est de viser l'autre, ou du moins de ne jamais le perdre de vue. C'est ce que je vais m'efforcer de démontrer en précisant la nature des rapports entre la science pure et ses applications.* »
>
> *Valeur de la science*, p. 104

Ainsi se dessine chez Poincaré l'ébauche d'une théorie esthétique de la connaissance mathématique. Pour en percevoir les contours possibles à l'égard du raisonnement mathématique, regardons les critères non-logiques auxquels doivent obéir les preuves conduites par P selon Poincaré :

1. *P* connaît les lignes directrices ou, selon la métaphore de Poincaré, « l'architecture », c'est-à-dire les arches des arcades dont on se débarrasse une fois la construction terminée (Poincaré, Thermodynamique, p. XIV ; *Valeur de la science*, p. 193/194).



2. Il devrait y avoir une interdépendance entre la construction en bois et la courbe abstraite que représente le contour supérieur.
3. Les étapes d'une preuve doivent elles-mêmes être cintrées. En d'autres termes, les raisonnements qui la composent doivent être eux-mêmes des singuliers interdépendants du général qu'ils suggèrent.

Pour Poincaré, comprendre la vérité d'une phrase mathématique est une réconceptualisation de sa preuve « logique ». Il cherche une réponse à un autre question que « pourquoi la preuve est-elle logique rigoureuse ? ». Le contenu

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

explicatif de la réponse à cette question n'est naturellement pas nécessairement plus profond que le raisonnement logique ne l'était pour la question de la rigueur logique.

Poincaré s'intéresse à la question qui concerne « l'unité intuitive » des raisonnements constituant des preuves.

Comment rendre explicite la métaphore poincaréienne de l'architecture ?

Réponse : il faut la combiner avec l'unité esthétique !

Une composante esthétique-intuitive de la preuve explicative. Dans l'esprit de Nelson Goodman, je soutiens la thèse selon laquelle la différence entre les multiples façons d'intuitionner, par perception, par évidence d'un premier niveau pré-linguistique, d'un niveau conceptuel supérieur, etc. ne dépend ni du statut que peuvent avoir les objets impliqués ni de la capacité cognitive utilisée. L'intuition en tant qu'acte cognitif dépend plutôt de l'utilisation que l'on fait du système sémiotique (« représentation ») impliqué.

Dans Heinzmann 2013, j'ai retenu le symptôme suivant pour une utilisation intuitive d'un système sémiotique : un signe est utilisé dans un mode intuitif s'il n'est pas utilisé en tant que *représentation* qui est indépendante de la situation d'utilisation mais comme *présentation iconique*, de sorte qu'une demande de légitimation de la représentation du signe ne se pose pas au même niveau de réflexion. L'intuition est donc une présentation iconique ou un« *seeming* ».

Pour que la *présentation intuitive* puisse être lue comme *représentation intuitive* d'un objet général, il faut introduire un aspect symbolique transformant la présentation en une *exemplification* au sens de Goodman. Ainsi, par exemple, l'objet « carré de tissu rouge » est, chez le tailleur, une *présentation* des prédicats « rouge », « motif x », « texture y » etc. Si on sait de quel prédicat l'objet « carré de tissu rouge » est une instance, c'est-à-dire quel prédicat est présenté, on dit que le « carré de tissu rouge » est une *exemplification* du prédicat. En d'autres termes, dans une exemplification l'objet doit être reconnu comme instance du prédicat qu'il *présente* ou *montre* en même temps, c'est-à-dire dont il est une icône. Les raisonnements d'une preuve mathématique donnent un « aperçu intuitif » s'ils contiennent une utilisation intuitive du langage, c'est-à-dire si des « parties » des raisonnements peuvent être interprétées comme exemplification d'une idée générale (schéma). L'intuitivité et le caractère explicatif de la preuve augmentent proportionnellement aux nombres de ses parties intuitives.

Un exemple mathématique : trois preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ [5].

Première preuve par l'absurde (impliquant le concept de parité).

On suppose qu'ils existent deux nombres entiers naturels p, q non nuls vérifiant la propriété :

(A) $$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

donc

(B) $$2q^2 = p^2.$$

(5) Pour cette partie, je remercie mes collègues François Chargois, Jean-Pierre Ferrier et Alain Genestier.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Cette entrée en matière n'est qu'un dépliage, lequel n'a pas besoin d'être guidé. Notamment le passage de (A) à (B) se fait simplement en explicitant la définition d'une racine carrée. Bien évidemment les deux formulations (A) et (B) sont équivalentes. Cependant la relation entre les termes singuliers p, q et $\sqrt{2}$ peut être lue de deux manières différentes :

- en tant qu'instantiation de « = » ;
- en tant que exemplification « nombre pair » (B), et c'est ce que l'on cherche.

Supposons $\frac{p}{q}$ soit réduit aux plus petits termes (si les deux entiers ont un facteur commun, celui-ci peut être éliminé avec l'algorithme euclidien), alors p^2 est pair et p lui-même doit être pair.

Preuve par contraposition

Si p est impair, alors p^2 l'est également :

$p = 2k + 1$;
$p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, c'est-à-dire le carré d'un nombre impair est impair.

Donc, si p^2 est pair, p l'est également.

Si p est pair, alors $p = 2c$, donc

$$2q^2 = p^2 = (2c)^2 = 4c^2$$
$$q^2 = 2c^2.$$

Ainsi q^2 est pair et donc, pour la même raison que plus haut, q est également pair. Ce qui contredit la présupposition que $\frac{p}{q}$ est réduit au plus petit terme.

Deuxième preuve (*impliquant l'ensemble de tous les nombres premiers*).

On suppose qu'ils existent deux nombres entiers naturels p, q non nuls vérifiant la propriété

(A) $$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

donc

(B) $$2q^2 = p^2.$$

On utilise ensuite le théorème fondamental de l'arithmétique : tout nombre entier non nul admet une factorisation unique en nombres premiers : il s'écrit d'une façon et d'une seule, à l'ordre près, comme un produit de nombres premiers élevés à une puissance entière.
(C1) Considérons les factorisations de p et q en nombres premiers. On en déduit celles de p^2 et q^2en doublant chacun des exposants, lesquels seront, par suite, pairs. En particulier l'exposant du facteur premier 2 sera pair dans l'un et l'autre. Il sera alors impair dans $2q^2$, ce qui contredit (B).

Il semble curieux de faire appel à tous les nombres premiers, alors que seul le facteur premier 2 joue un rôle dans le raisonnement. Pour établir l'énoncé qui est utilisé, il faut non seulement avoir le concept général de nombre premier, le

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

caractère unique de la décomposition mais aussi l'existence d'une telle décomposition ; pour cela il faut vérifier que tout entier > 1 possède au moins un facteur premier. Rien n'est difficile, mais il y a beaucoup de choses qui n'ont pas de relation « intuitive » avec la question.

Il n'y a pas plus qu'un seul exemple intuitif : la relation $2q^2 = p^2$ illustre un lien entre deux membres qui n'ont pas la même factorisation première.

Troisième preuve à l'aide du théorème de la clôture intégrale.

Une courte preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut être obtenue à partir du théorème de la clôture intégrale, c'est-à-dire, si $P(X)$ est un polynôme unitaire à coefficients entiers, alors toute racine rationnelle de $P(X)$ est nécessairement un entier. En appliquant ceci au polynôme $P(X) = X^2 - 2$, il s'ensuit que $\sqrt{2}$ est un entier ou irrationnel. Parce que $\sqrt{2}$ n'est pas un entier (car $1 < \sqrt{2} < 2$), $\sqrt{2}$ doit donc être irrationnel.

Le polynôme

$$X^2 - 2$$

exemplifie le polynôme unitaire à coefficients entiers général

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Néanmoins, il n'est pas conforme à la pratique mathématique de prétendre expliquer une propriété en appliquant une propriété générale, dont la première ne sera qu'un cas particulier, sans expliquer en même temps le « pourquoi » de la propriété générale.

Oublions, dans un premier temps, la clôture intégrale. Rappelons que nous partons de

$$2q^2 = p^2. \tag{B}$$

(C2) On se ramène au cas où p, q sont premiers entre eux. Comme q est premier avec p, il l'est aussi avec p^2. C'est une conséquence du théorème de Bézout :

Théorème de Bézout

Si p et q sont des entiers non nuls, il existe des entiers relatifs u et v tels que

$$\mathrm{pgcd}(p, q) = pu + qv.$$

Dans cette preuve, le théorème de Bézout sert de ligne directrice. En effet, si p et q sont premiers entres eux, leur pgcd vaut 1 et de l'identité de Bezout, on tire :

$$\begin{aligned} 1 &= pu + qv \\ &= pu \cdot 1 + qv \\ &= pu(up + vq) + qv \\ &= p^2u^2 + q(puv + v). \end{aligned} \tag{IX.1}$$

En remplaçant p^2 par $2q^2$, il vient que q divise 1 et donc $q = 1$. Alors 2 serait un carré parfait, ce qui est absurde.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

L'identité de Bézout

$$1 = ua + bv$$

exemplifie le concept d'idéal impropre, c'est-à-dire l'idéal qui est égal à l'anneau tout entier

$$\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$$

engendré par a et b.

Nous pouvons maintenant voir comment s'établit intuitivement le lien avec la clôture intégral de l'anneau intègre $\mathbb{Z}$.

En itérant le calcul IX.1 plus haut, on peut remplacer p^2 par la puissance p^n, où $n \geqslant 1$, de façon à obtenir :

$$1 = p^n u + q w_n.$$

On obtient la même conclusion, $q = 1$, si $\frac{p}{q}$ est une racine du polynôme unitaire

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Cette preuve semble donner une meilleure vision intuitive que la deuxième preuve : elle procède par l'interdépendance d'une question globale du pourquoi avec une question locale du pourquoi : une équation polynomiale générale est instanciée par une équation polynomiale spécifique qui l'exemplifie.

Le fait que le singulier semble dans ces cas « trop singulier » par rapport au général a été dépassé par une série d'autres exemplifications. Ainsi, il semble idoine d'expliquer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel par le fait que $X^2 - 2$ est un polynôme unitaire avec des coefficients entiers.

Conclusion.

Les trois preuves sont convaincantes. Néanmoins, le potentiel explicatif de la troisième preuve semble plus grand que le potentiel explicatif des deux premières, car elle contient des parties plus intuitives. Elle n'« explique » pas parce qu'elle utilise une instance singulière du général considéré, mais parce que le singulier est interdépendant du général, c'est-à-dire une exemplification. Or l'exemplification n'est pas un argument logique mais esthétique au sens de Poincaré-Goodman.

§ — Bibliographie.

Goodman N. (1969). *Languages of Art. An Approach to a Theory of Symbols*, Oxford Univ. Press, Londres.

Heinzmann G. (1985). *Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédicativité*. Blanchard, Paris.

— (1986). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906–1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*, Blanchard, Paris.

— (2013). *L'intuition épistémique. Une approche pragmatique du contexte de justification en mathématiques et en philosophie*, Vrin, collection Mathesis, Paris.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

— (2015). « Pragmatism and the Practical Turn in Philosophy of Mathematics : Explanatory Proofs », in : **Agazzi E. et Heinzmann G.** éds. *Pragmatism and the Practical Turn in Philosophy of Sciences*. Proceedings of the Annual Meeting of the International Academy of the Philosophy of Science, Pont-à-Mousson / France, 10–14 September 2014, Franco Angeli Editore, Milan, p. 113–129.

Heinzmann G. et Jullien C. (2010). « L'esthétique dans la démonstration mathématique », *Mémoires de l'Académie de Stanislas*, année 2006–2007, 8e série, tome XXI, p. 409–423.

Heinzmann G. et van Atten M. (2020). « Révisionnisme mathématique : l'enjeu constructif », in : *Précis de philosophie de la logique et des mathématiques*, sous la direction d'A. Arana, M. Panza, F. Poggiolesi et P. Wagner. Éditions de la Sorbonne, Paris, p. 1–60, à paraître.

Poincaré H. (1912). « La logique de l'infini », *Scientia* 12, 1912. Dans Heinzmann 1986, 305–315, 311.

— (1908). *Théormodynamique*, 2e édition, Gauthier-Villars, Paris.

— (1905). *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1970.

— (1908). *Science et méthode*, Flammarion, Kimé, Paris, 1999.

Weyl H. (1918). *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Chelsea/New York.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Réflexions sur temporalité et langage comme rigueur dans le film *Porcile* de Pasolini



Michael Schmidt

L'unica occasione d'incontrarsi era stata
questo povero punto terrestre.
Elsa Morante

Résumé

Le film *Porcile* de Pier Paolo Pasolini peut être considéré comme un film empreint de rigueur, au sens qu'il met en scène la construction d'une réalité à partir de deux temporalités disparates mises en simultané.

www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2021

§ 1. — Prologue, Histoire du silence.

Dans une conception générale du temps, il y a tendance à considérer le futur, et surtout le présent comme des entités accomplies et pleines, mais en revanche le commencement apparaît plutôt comme faible et creux. Par rapport aux autres moments, le moment présent semble être le plus rempli d'une plénitude, une plénitude qui résume et efface en soi tous les instants précédents. Cette plénitude de la présence ne pourrait être remplacée que par un état futur encore plus plein et plus heureux que le précèdent. Chaque instant abdiqué et remplacé perd donc son caractère progressif, perd son trône décoré avec des petites lumières clignotantes et, telle un candidat malheureux lors d'un quiz-show à la télé, qui est jusqu'alors encore fêté, aimé et frénétiquement applaudit, il disparaît ensuite pour toujours dans les coulisses noires et solitaires de l'oubli. Il chute de la plénitude totale dans le vide complet.

Si le présent actuel et la promesse d'un futur paradisiaque occupent une telle importance expressive et stratégique, c'est que le concept dominant d'un progrès technique et machinal de la croissance comme mesure de bonheur reste, d'une manière sous-jacente, depuis le siècle des lumières et de l'empirisme, attaché à l'idée du temps comme ligne progressive vers un futur accompli. Le temps comme progrès sociétal court comme Heidi vers le bonheur absolu au delà des montagnes (des morts). Évidement on voit depuis longtemps que cette idée du progrès heureux touche à sa fin et qu'il s'agit plutôt, en fin de compte, d'une idéologie mal tissée. Le temps dans cette conception du progrès porte en soi un noyau de sens, qui est à la fois cause et effet d'un consensus social. Car ce sens est porteur d'une moralisation des choses humaines et naturelles. C'est le temps des évaluations et des jugements (consuméristes) en permanence : chaque être humain, chaque chose, chaque parole, chaque action sont valorisés en vue de leur « performacité » possible et leur

valeur consommable. Tout est comparable à tout (plutôt dans des mesures quantitatives) pour servir l'objectif établi d'être exploité et d'être utilisé, et pour être en fin de compte finalisé et capitalisé. Même dans les derniers restes de l'humain et de la culture, on extorque une valeur boursière et de divertissement.

À côté de cela il y a également cette histoire du silence, qui consiste en ce mouvement ou cette quasi fuite désespérée contre le silence qui nous englobe depuis la naissance, quand nous n'avons pas encore le langage pour exprimer notre étonnement et l'horreur d'être né, ici et maintenant. Fuite sans spectateurs d'un feu d'artifice vers la nuit s'éclairant et vers des étoiles mourantes d'un ciel sans mystères.

Nous essayons d'échapper à cette origine muette, qui reste ensevelie, et sous-jacente en nous comme une carpe parlant avec elle-même dans l'eau profonde d'un étang. L'informe, le sombre reste là, sous nos langues comme inondées par l'eau. Ces langues qui ont perdu le souvenir des cris et des échos des ces cris dans les salles désinfectées d'hôpital, avec leur blancheur de carrelage lumineuse dans laquelle se reflète la lumière blanche comme de la neige électrique sans vie. On ferme les yeux, on les ré-ouvre : la lumière du soleil du mois d'août, lourd comme la pesanteur de deux milles ans, glutineuse dans l'air immobile, et les cris des mouettes fantomatiques se reflétant dans les eaux indolentes et mouvementées à la fois du Tibre d'une Rome sans hommes et plein d'ombre. Les eaux qui s'ouvrent et qui se ferment sans bruit, comme une peau fondante, sur le corps blanchâtre d'un garçon nageur sombrant dans les profondeurs sans temps d'un après-midi romain.

Et d'un coup, cette lumière chaude et dorée, qui se brise dans les branches et dans les feuilles des arbres fleuris dans les jardins mystérieux clôturés par des murs anciens. Des arbres qui deviennent lourds, plein de fruits, après ; de mirabelles, de prunes, de cerises, tous ces fruitiers qui se penchent vers nos mains enfantines, leurs branches, qui nous caressent. Et nous restons là, comme un homme primitif dans le désert, les mains en l'air, et seul.

L'attente avant le langage, ce moment fragile entre sommeil et réveil, ce moment entre le silence et le langage, nous fait sauter dans le langage. Le temps du commencement, c'est le temps avant et après la naissance, donc le temps dans lequel l'être humain était encore hors du langage, quand il vivait dans le silence, dans le déroulement du temps sans mémoire. La vraie naissance pour l'homme est celle du langage et de la mémoire. Le début c'est le silence en attente.

C'est-à-dire que la vraie naissance de l'être humain est dans la mémoire et dans la conscience de la mort, la mort qui est le silence qui nous englobera à nouveau et devant lequel nous fuirons en avant. Car, quand nous naissons, nous n'avons pas le langage pour exprimer l'étonnement et quand nous mourrons, nous n'avons plus la force de l'exprimer. Nous sommes à nouveau frappés de mutisme et d'horreur. Nous naissons et nous mourrons hors langage, muets.

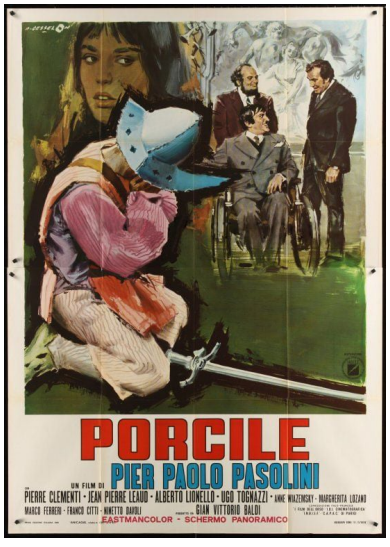
Il apparaîtra dans la suite comment *Porcile* donne forme à cette histoire du silence comme rigueur du langage poétique et cinématographique.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 2. — *Porcile.*

Ainsi pourrait-on dire que *Porcile* ou *Porcherie* en français, tourné par Pier Paolo Pasolini en 1969, est un film assez bizarre et déroutant qui permet de réfléchir sur le concept de la temporalité et de la rigueur, telle qu'elles se présentent dans et à partir d'une œuvre d'art. Une rigueur temporelle qui s'oppose violemment à ce concept de temps progressiste du bonheur absolu, dont il était déjà question plut haut. (1)

D'abord une question qui semble être assez simple. C'est quoi l'histoire de ce film ? Qu'est ce qu'il nous raconte ? Au fond, le film ne raconte rien, et j'aimerais comprendre comment ce rien arrive vers nous, comment ce rien est dit. C'est, il me semble, la question de la rigueur même. Premièrement, d'une façon générale, le film met en scène la relation entre le sacré et le profane, qui dans ce film correspondent à une relation entre le passé et le présent. On pourrait déjà dire que ce film est une mise en scène, une mise en abîme de la politique. *Porcile* pose ainsi une question inhérente à la société moderne même : comment la politique comme politique, mais aussi la justice, ou la beauté, l'art peuvent être encore possibles dans une société que Pasolini désigne déjà comme post-politique et pré-consommation. Cette division entre deux pôles, sacré/profane, passé/présent trouve sa continuation dans la structure narrative même. Le film nous offre deux films pour le prix d'un. Une partie historique située dans une Italie provinciale du XVI^e^ ou du XVII^e^ siècle et une partie contemporaine au film située en Allemagne au début des années soixante-dix, mais aussi le sud et le nord, le haut et le bas, le silence et le langage.



Affiche de Porcile.

(1) On pourrait dire avec Adorno « Philosophie ist der Begriff des Fortschritts darin, dass er während er die gesellschaftliche Bewegung artikuliert, dieser zugleich widerspricht », (« La philosophie est le concept de progrès en cela que, tandis qu'il articule le mouvement de la société, il le contredit aussi tôt. »), T.W.Adorno, *Fortschritt, Stichworte*, dans GS, Band 10.2, Frankfurt am Main 1973, p. 623.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

L'épisode historique, et archaïque au sens propre (mais sans que l'époque et le lieu soient clairement explicités), montre un homme apparemment pauvre et solitaire qui devient petit à petit cannibale. Dans cet épisode du film, il n'y a pratiquement aucun langage. L'homme, joué par un acteur français, vit probablement aux alentours de l'Etna dans un XVI^e^ siècle très stylisé, probablement sous l'occupation espagnole de l'Italie. On voit par exemple des soldats portant des carapaces dans le style militaire espagnol de l'époque. Est donc évoquée, sans pour autant être précisée, l'époque de l'absolutisme et de la contre-réforme. (2) Le cannibale a su convaincre certains hommes et femmes que la chair humaine est mieux adaptée à la santé humaine que le *glutenfree* et autre *vegan*, et il se retrouve donc avec un petit cercle de disciples cannibales. Évidemment, là où il y a des gens heureux, il y en a qui ne le sont pas, et les cannibales sont finalement arrêtés par les autorités et condamnés à mort : ils sont ligotés sur un champ avec bras et jambes écartés pour être dévorés vivants par des chiens sauvages. Ninetto est témoin de cette condamnation, tout comme il fera partie de la scène moderne. Tout se passe dans une nature abandonnée par les dieux même, un paysage de lune, un paysage de catastrophe, de guerre atomique, et cela donne l'impression que les scènes d'un passé archaïque se dérouleraient déjà dans un futur fini et sans espoir. C'est déjà un monde d'après, et le début apparaît ainsi comme une fin. (3) Mais, indirectement, cette nature sauvage et brute du film est ainsi le lieu à la fois de la poésie et de l'écriture même. (4)

L'épisode, ou anecdote, du cannibale raconte l'horreur humaine comme une espèce de chemin de croix, vers un au-delà encore possible malgré l'existence d'un monde vide et sans sens. C'est presque une légende de saint. On voit pourtant un visage, un corps grimper sur une montagne, puis c'est un silence tendu, comme si c'était juste un intervalle entre deux cris qui restent inaudibles. Bien que le cannibale soit mis à mort, il vise, dans sa disparation même, autre chose. (5) C'est sur le corps et sur le visage du saint, qui n'expriment rien, que se retourne cet extérieur vers un intérieur qui est aussi lui-même extérieur, comme les visages de Vierges dans des tableaux de Piero della Francesca. Nous verrons que c'est le problème de la rigueur comme mouvement statique qui est ainsi posé par le film *Porcherie*.

(2) Donc la tentative, à l'époque des institutions de l'église catholique et de l'état monarchique de reconstruire un consensus, une hégémonie refaite après les avènements des doutes métaphysiques et de la guerre de trente ans dans le sillage de la Réformation protestante mais aussi de la découverte de l'Amérique. Un peu peut-être comme pour nous aujourd'hui, qui semblons vivre avec le libéralisme contemporain, un retour et un progrès vers le paradoxe d'une société néolibérale féodale.

(3) Dans le film sur les oiseaux, *Ucellacci e uccellini*, Pasolini filme par exemple, les constructions des logements nouveaux ou les ponts d'autoroute, comme des vestiges d'une autre époque, antérieure et postérieure au présent. Ainsi le présent apparaît comme une utopie ou une catastrophe dans un futur ou un passé déjà et encore lointains.

(4) L'Etna évoque naturellement Empédocle, et la pièce de théâtre de Friedrich Hölderlin, c'est-à-dire le poète se jette dans le vide, pour créer le plein, comme le film de Pasolini, comme on va voir par la suite.

(5) Ou pour le dire comme Walter Benjamin l'a écrit sur le héros tragique :« Sondern in der Tragödie besinnt sich der heidnische Mensch, dass er besser ist als seine Götter, aber diese Erkenntnis verschlägt ihm die Sprache. », (« Mais dans la tragédie, l'homme païen se souvient qu'il est meilleur que ses dieux, mais cette prise de conscience le laisse sans voix. »), Walter Benjamin, *Schicksal und Charakter*, dans : *Sprache und Geschichte*, Stuttgart 1992, p. 99.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com



L'homme rigoureux.

Le monde du présent dans le film, en revanche, semble être, à première vue beaucoup plus serein et beau. Le garçon est beau et la fille est belle. Ils se disent fiancés, mais ils n'ont pas de rapports intimes. Le garçon Julien ne veut pas. Il dit être amoureux de quelqu'un d'autre, sans dire de qui. Tous les deux sont représentés par deux jeunes acteurs français célèbres. Ils vivent une vie de riches industriels dans une Allemagne, un peu avant et durant la révolte de 68 et avant le terrorisme quelques années plus tard (comme nous le savons aujourd'hui : ils vivent entre deux parenthèses de violence). Ils parlent italien. Ninetto est encore là comme « Gastarbeiter ». Il sera ici le témoin de l'action finale de l'épisode présent, c'est-à-dire quand le riche jeune homme sera dévoré par les cochons qui étaient pourtant ses meilleurs copains (on comprendra que les porcs étaient ses partenaires sexuels). Durant l'oisiveté de ces jeunes gens, leur riche père industriel est en train de négocier un gros contrat avec un autre industriel invité à la maison. Ce dernier est un ancien nazi important qui s'est transformé en *business partner* honorable et convoité. Le père compte sur le passé nazi de son invité pour en tirer un avantage dans l'affaire à conclure, mais, quel dommage, l'ancien nazi lui-même est au courant de la perversion du fils. Par deux chantages réciproques, ils trouvent un compromis, un deal, qui rend « happy » tout le monde. Un festin, qui ne fait plus partie du film, peut donc commencer. Dans *Porcile*, le temps officiel et progressiste, l'histoire, est représenté par les deux pères cyniques.

§ 3. — Anecdotes.

Au premier abord, ce film apparaît naturellement comme un commentaire sur la violence humaine : l'homme bouffe l'homme, et la différence entre l'horreur du passé et celle d'aujourd'hui consiste seulement en le fait que la modernité a seulement su élargir, grâce à ses nouvelles techniques, le nombre possible des hommes et des femmes à tuer. Je voudrais ici moins insister sur l'aspect métaphorique du film, et sa critique du fascisme économique, mais plutôt sur sa structure narrative.

Les deux épisodes réciproques de *Porcile* ont pour thème des faits divers, ou des événements qui semblent issus, comme pour l'épisode historique, d'une chronique ancienne. Le cannibale ne fait pas partie de la grande Histoire, le fait que le fils industriel satisfait ses désirs et ses frustrations sexuelles avec

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

des porcs pourrait être un article dans la presse people ou être un cas dans un livre de psychologie. Donc, le film se réfère, surtout dans le deuxième épisode, à une écriture standardisée, industrielle, médicale et médiatique qui a pour fonction de captiver l'expression de la vie même, de la rendre impossible, c'est à dire efficace. (6)

Par le fait que *Porcile* thématise deux histoires d'un caractère plutôt anecdotique (comme c'est d'ailleurs le cas dans *Teorema*), Pasolini laisse sous-entendre que ce qu'est l'Histoire ne se dévoile pas dans les grands récits officialisés, mais plutôt dans des anecdotes cachées, secrètes et oubliées (en tant que telles elles sont à distinguer de faits divers médiatiques, qui servent justement à stabiliser le discours comme discours). Les anecdotes se laissent décrire comme des récits qui ne mènent nulle part, qui, au fond, n'ont pas de sens et qui ne sont pas exploitables. Elles permettent, en revanche, dans leur ouverture vers un non-sens, de faire ressentir ce petit choc d'incrédulité (7) devant leur cheminement vers nulle part. Il y a quelque chose dans les anecdotes qui se laisserait qualifier de manque inhérent et consternant à créer un consensus temporel et continu. Elles sont dans une présence non définissable. Les anecdotes ébranlent et déconstruisent l'ordre systématique et temporel établi par la tradition officielle. Elles donnent et garantissent une vérité, qui vise le singulier et le non-répétable (8). De la manière dont les anecdotes sont mises en scène dans *Porcherie*, elles deviennent des formes de vérités, qui sont simultanément temporelles et a-temporelles. (9) En quelque sorte (en tout cas de la façon dont elles sont présentées par Pasolini, mais aussi par Morante dans ses romans) elles vont plus loin que la vérité établie. Car pour Pasolini l'anecdote garde toujours un lien vivant avec le langage. Le langage ne peut pas distancier le

(6) Les deux lieux du film sont également caractérisés par le fait qu'ils sont dans un certain recul par rapport au temps. Dans la villa, les gens aisés disposent de leur temps. On peut dire avec Jacques Rancière que dans notre époque contemporaine, la possibilité de disposer librement de son temps représente un signe du pouvoir. De cette façon les êtres humains se distinguent entre ceux qui ont du temps et ceux qui ne l'ont pas.

(7) Ah bon, mais alors!? E allora!? So what!? Na, und!? Elles laissent entrevoir le spectre du doute que toutes les démarches pour saisir la vérité, ou pour saisir le monde, se dérouleraient finalement devant un néant noir et absolu. Même le langage ne nous soutiendrait plus et pour le dire malgré tout, avec un vers du poème *Grodek* de Georg Trakl : tous les routes débuchent dans une putréfaction noire. (« Alle Straßen münden in schwarze Verwesung »).

(8) « Aber sie geben uns die Wahrheit, die *ganze* Wahrheit [...] Dazu kommt, dass solche Denkwürdigkeiten in der Regel unterhaltender sind als die Mehrzahl der eigentlichen historischen Werke, weil der Verfasser sich eben nicht vornahm, gravitätisch zu sein, und weil oft gerade die Planlosigkeit der Erzählung ihrer Mannigfaltigkeit Raum gab. Die Zeitgeschichte in ihrem ganzen Umfange sollen sie darstellen, nicht bloss die politsche ; und jede merkwürdige Erscheinung findet ihren Platz. », (« Mais elles nous donnent la vérité, toute la vérité [...] En outre, ces anecdotes sont généralement plus divertissantes que la majorité des œuvres historiques réelles, parce que l'auteur n'avait pas l'intention d'être grave, et parce que souvent, c'est précisément l'absence de plan qui a donné place à la diversité du récit. Ils visent à présenter l'histoire contemporaine dans son ensemble, et pas seulement l'histoire politique, et chaque phénomène étrange retrouve sa place. »), Carl Gustav Jochmann, Die Rückschritte der Poesie und andere Schriften, Frankfurt am Main 1967, page 34.

(9) Quelques années plus tard, Elsa Morante raconte à son tour une anecdote dans son roman *La storia*. Le texte développe sur plusieurs centaines de pages un fait divers advenu quelques temps après la guerre : une femme, modeste et solitaire, étouffe son petit-fils de six ans et se suicide après. Morante écrit une histoire en dessous des récits officiels, et dénonce de cette façon le côté invisible et violent de chaque discours du pouvoir.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2021

passé qui reste constamment co-présent en lui. L'horizon de la connaissance du monde est aussi pour Pasolini dessiné par le langage, sauf que ni le réel ni le langage ne s'épuisent réciproquement l'un dans l'autre. Il reste toujours un très fin abime entre eux. C'est cette frontière invisible qui permet à l'anecdote pasolinienne d'ouvrir cette brèche dans la perception pour transformer le visible en une ambivalence inquiétante. Par exemple, l'anecdote épouvantable des années soixante-dix, le jeune homme dévoré par les porcs, devient d'un coup une histoire de saint à l'envers. L'anecdote des cannibales devient à son tour dans sa crudité une critique de la violence contemporaine.

En tout cas, les anecdotes apparaissent comme des événements à qui l'on donne après coup une structure narrative afin de les normaliser et pour les rendre pensables, bien que ces événements anecdotiques se refusent par leur caractère même à être homogénéisés. Au fond, ils ne sont pas destinés à être publiés. Les anecdotes sont, si l'on veut, des oubliées de l'histoire du progrès. Elles se placent à côté de la grande Histoire et garantissent d'une telle façon une autre forme du vrai. Ninetto, c'est-à-dire le regard infantile et bouffon, est dans chaque anecdote le témoin de la violence, ou plutôt il témoigne du moment dans lequel la violence d'une société se transforme en justice ou en silence. Les cannibales ligotés et dévorés vivants par des chiens sauvages confirment et mettent à la fois en doute la vérité d'une justice divine ou humaine. Ainsi en est-il du fils dévoré par les porcs pendant que son père donne un festin en l'honneur d'un grand contrat pour son riche invité industriel et nazi. Dans ce contexte, la mort violente du fils apparaît paradoxalement comme un grand festin. Le grand festin du père, qui a besoin d'un sacrifice humain pour être à son comble. C'est à partir de cette mort violente et secrète, à partir de ce « sacrifice » absurde, que le pouvoir néocapitaliste justifie, pour Pasolini, l'état d'exception. L'état d'exception, le fait d'avoir intégré en soi le sacrifice, a pour but de sanctionner le fonctionnement et la raison d'être du pouvoir même. C'est justement par sa capacité à maîtriser et à mater l'événement exceptionnel et horrible que le pouvoir adhère à sa vérité propre. Car c'est lui seul qui peut garantir la sécurité, la tranquillité et finalement le bonheur des hommes.

Par le montage des opposés extrêmes, il devient compréhensible que dans une société non capitaliste la violence peut malgré tout et contre elle même « pointer » vers « un plus haut », un au-delà, vers une forme de justice. Dans la société capitaliste, consumériste, le mourir est un rien, il ne signifie rien, il est réduit au silence, bien qu'il soit présent, bien qu'il soit là. Dans l'Allemagne moderne les morts ne sont plus présents, ils n'ont même pas droit à l'image. Ils sont là, sans être évoqués ni que le problème de la culpabilité soit même posé.

§ 4. — **Consensus.**

Pour Pasolini, la société moderne est ainsi consensus, la violence est consensus, le non agir est consensus, l'agir est consensus : la jeune femme n'est que l'image active opposée au jeune homme passif, flemmard et consumériste. La femme, selon ses propre dires, vise la révolution, la libération mais finalement elle se marie avec un autre jeune homme riche plus motivé que Julien et elle reste ainsi dans le cercle du pouvoir qu'elle va reproduire, bien qu'elle déclare

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

vouloir le révolutionner. Le jeune homme en revanche sera dévoré par son propre désir, les cochons, et commet ainsi, malgré lui, une transgression. (car le jeune homme, transgressant la différence entre l'homme et l'animal devient ainsi créature lui-même). Par le fait qu'il meure d'une mort aussi violente, il met en lumière la violence non visible et refoulée de la société. Du même coup, cette transgression reste invisible et semble n'avoir aucun effet, sauf peut-être de stabiliser le pouvoir même. La tragédie, s'il y en a une, est condamnée au silence, car dans cette société-là, il n'y a aucun moyen pour elle de s'exprimer. C'est une tragédie sans paroles ou plutôt une tragédie des paroles effacées.



Conversation piece.

Dans la mesure où tout doit rentrer dans le profit du consensus et du progrès, le temps objectif et technologique a pour but de stabiliser le pouvoir établi. Le pouvoir pour Pasolini, soit fasciste, soit économique, cherche à détruire les frontières entre la nature et de la culture. C'est pour cela que Pasolini entreprend de défendre le passé (comme passé futur) contre les interprétations du pouvoir, qui cherche justement, dans ses idées sur le temps comme profit et progrès, à absorber le passé. Il s'agit de créer un passé neutralisé, et par là même un temps figé. Un temps qui ne connait, au fond, ni alternance ni variation. C'est le temps absorbé par le concept de l'absolu et de l'Un. Toutes les expressions temporelles possibles expriment qu'au fond toutes les choses sont identiques avec l'Un. Rien ne peut être changé. Car pour cette idéologie du temps et de la vie comme profit progressif, les choses et les hommes sont seulement là pour exprimer leur différence dans l'identique. C'est-à-dire que leur différences disparaissent dans l'identique construit par le pouvoir, qui imite et vide de leur sens l'ontologie, la pensée, la science et l'art. Le capitalisme/pouvoir se comporte comme s'il était une ontologie de l'Un. Pour ce pouvoir de l'imaginaire industriel, le passé standardisé préfigure déjà le présent. Le futur à son tour est pensé comme une continuation encore plus dense et heureuse du présent. Celui-ci reste donc, dans ses fondements, toujours identique à lui même. Le présent exprime et varie seulement ce qui est déjà connu. Il renforce ainsi le consensus établi.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

Certes, il y a en permanence des mouvements et des changements en surface. Mais ceux-ci sont capturés et structurés par le pouvoir de façon à ce qu'ils montrent que finalement la vie même est déjà une forme de travail et de profit. On pourrait penser à Hannah Arendt et sa distinction célèbre entre *vita activa* et *vita contemplativa* : Arendt montre que, dans les temps modernes, la société capitaliste a su assimiler et identifier la vie et la pensée avec le travail. La triple liaison entre ces derniers est tellement serrée qu'ils forment une unité, ou pour le dire avec Foucault : ils forment le concept du bio-pouvoir. Pasolini met donc en doute dans son film cette conception de la vie comme production utilitariste (C'est pour cela que les créatures, mais aussi les deux hommes, représentent la vie innocente et libre). Pour le capitalisme/pouvoir, la seule jouissance et le seul bonheur possible consistent en le fait de pousser ses propres désirs vers la limite extrême et de se faire consommer par eux-mêmes. Mais, en même temps, les désirs sont considérés comme une menace pour le fonctionnement de la société et doivent ainsi être réglés pour éviter tout excès. Pour cela ils doivent devenir consensuels. Il s'agit donc de former une unité entre la volonté intime et la volonté publique. On ne peut vouloir que ce qu'on veut pouvoir. Pour Pasolini dans les années soixante-dix, l'acte de résistance peut encore consister à transformer cet acte de consensus en un acte d'excès. Il met ainsi en doute notre contact normalisé avec le monde sociétal même.

§ 5. — Le futur passé.

Qu'est ce que raconte donc le film *Porcile* ? Comme une histoire classique, le film de Pasolini semble avoir un début et une fin. Mais où commencent-ils au juste ? D'ailleurs commencent-ils ? Où s'arrêtent-ils ? Arrêtent-ils ? (10) Est-ce que le début réel du récit et du film se localise dans ce 16e siècle un peu abstrait et aussi un peu absent ? Ou est-ce que le début du film est dans l'époque contemporaine bien présente, mais à la fois « filtrée » par le fait que les événements se déroulent dans une luxueuse villa en Allemagne de l'Ouest, loin de tout 'signe' concret et des événements historiques comme la révolte des étudiants. D'ailleurs tous ces débuts pourraient être également des fins, des points finaux. (11)

Ces deux événements mis ensemble dans *Porcile* ne se déroulent pas dans un *il était une fois*, *es war einmal*, *c'era una volta*, *once upon a time*, mais dans un *quelque chose aura été* (*wird gewesen sein*), *quelque chose était* (*etwas war*) : un temps qui

(10) Cette « vérité » est aujourd'hui exploitée par toutes les séries télé américaines qui se veulent cool et innovatrices, comme par exemple, *How to get away with murder, Quantico, Americain horror story.* Elles racontent à la fois leur début et leur fin. Une stratégie narrative que ne met pas en doute l'idée de suspense (basé sur l'idée de la vérité qui doit être dévoilée) et sur le dogme selon lequel il y a quelque chose qui vaut bien la peine d'être raconté. C'est une forme de normalisation des standards sociétaux pour des spectateurs consommateurs qui ont déjà tout vu, qui connaissent tout, qui ne se laissent plus surprendre et qui ont besoin de l'ironie pour être flattés dans leur intelligence « critique ».

(11) On sait bien que chaque commencement de récit garde toujours un côté fictif, créant ainsi sa propre temporalité et sa propre fin. Nietzsche décrit ce problème dans l'Antéchrist : pourquoi ne pas compter le temps à partir de Nietzsche et ses livres même, au lieu de partir de la naissance du Christ !?

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

n'est ni achevé et ni archivé, mais qui reste/résiste comme une sorte d'interrogation et de menace. C'est un présent (c'est garanti par le film) qui est déjà un passé, mais qui est aussi un avenir : nous les spectateurs du film aujourd'hui. Le film met en scène un mouvement simultané, l'histoire n'est pas une histoire proprement dite, mais plutôt un mouvement entre deux extrêmes. L'histoire se fait ainsi au dépend d'une histoire.

Rappelons-nous que dans une narration classique, le narrateur par principe connaît déjà la fin dès le début. C'est justement sa motivation pour raconter quelque chose, cette histoire-là, et pas une autre. Dans ce sens là, chaque narration commence avec sa fin, ou si l'on veut, a pour condition la mort en général et sa propre mort en particulier. Sans la fin (ou la mort, l'arrêt) le début ne serait même pas pensable, ou racontable. (12)

On comprend donc qu'en fin de compte, c'est la mort (vivante) qui est racontée dans *Porcile*. (13) C'est à partir de cette absence 'absolue', qui est à la fois présence, que se font les images du film. Les vivants que l'on voit sont déjà des morts, aussi morts qu'un homme inconnu du 16e siècle. On voit le cannibale, mais il est déjà mort, on voit le jeune homme riche, mais on sait qu'il va mourir. (D'ailleurs dans une grande partie du film, il reste sans bouger et parler dans son lit). C'est un film zombie dans le sens que les zombies et les cannibales unissent en eux les temps, à la fois d'être en vie, et à la fois d'être mort. Ils représentent un non-temps. (14) En paraphrasant Leibniz, on pourrait dire qu'ils expriment le paradoxe : c'est plutôt rien que quelque chose. Ils sont une négativité que vise une synthèse sans pourtant s'achever dans celle-ci. C'est à partir de ce rien que se structure le récit, l'événement. (15) Dans les images montrées, cette absence comme absence devient visible et met justement en mouvement

(12) Dans la littérature c'est le policier qui met cette idée en scène. On pourrait également penser au premier roman d'Elsa Morante, *Menzogna e sortilegio :* la narratrice isolée du roman écrit l'histoire de sa mère décédée. L'intrigue tourne autour du fait que la mère morte a fait la lecture des lettres à la mère du défunt, qu'elle s'est écrit à elle-même au nom de son amant, lui-même mort durant la guerre. Le récit anecdotique est en fin de compte la mort même qui raconte la mort comme si c'était encore la vie.

(13) « [...] Il cinema in practica è come una vita dopa la morte. Mentre Stalin viveva egli si trovava in un *continuum* indecifrabile, approssimativo, mitico e violentemente fisico insieme, ambiguo e menzognero : dopo la morte tale *continuum* si è concentrato fuori dal tempo, in una serie fissa di atti morali : ossia quelli che i communisti chiamo, eufemisticamente e classicisticamente, i "crimini" di Stalin. Il montaggio è dunque molto simile alla scelta che la morte fa degli atti della vita collocandoli fuori dal tempo. ». (« En pratique, le cinéma est comme une vie après la mort. Tant que Staline était en vie, il se trouvait dans un continuum indéchiffrable, approximatif, à la fois mythique et violemment physique, ambigu et mensonger : après la mort, ce continuum se concentrait en dehors du temps, dans une série fixe d'actes moraux : c'est-à-dire ce que les communistes appellent par euphémisme et de façon classique les "crimes" de Staline. Le montage est donc très proche du choix que fait la mort des actes de la vie en les plaçant hors du temps. »,) Pier Paolo Pasolini, *Empirismo eretico*, Milano 1977, p. 253.

(14) Le film montre en quelque sorte une fausse éternité et une fausse immortalité mais qui deviennent vraies par le geste du film, de l'œuvre d'art même. Pour citer Saint Augustin, « C'est ainsi que vous nous appelez à comprendre le Verbe, qui est Dieu auprès de vous, également Dieu qui est prononcé de toute éternité, et en qui tout est prononcé de toute éternité. Il n'y a pas là un ordre de succession tel qu'une fois une articulation terminée, une autre lui succède de manière que tout puisse être dit, non, tout est dit en même temps et éternellement. Autrement il y aurait là ordre temporel, vicissitude, ce ne serait plus la vraie éternité ni la vraie immortalité. » Saint Augustin, *Les confessions* Libre 11, VII 9, p. 302, Collection des universités de France, 1954.

(15) Et ce rien est le non-exprimable du langage même. C'est l'abime entre le « au-delà » de l'expérience, un non-lieu, c'est-à-dire le lieu utopique par excellence. Aujourd'hui le cauchemar de

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2021

l'arrêt du temps même. Dans chaque image, on voit l'autre image, l'autre film, qui est absent de « l'autre » film, mais conditionne dans son absence même « l'autre » partie. Il n'y a pas un lien direct, logique ou narratif entre ces deux films/événements. Donc chaque film est l'absence pour l'autre film. Il annule l'autre partie pour, à la fois, la mettre en relief. Les horreurs ne sont pas visibles, elles ne sont jamais montrées à cru, la violence est dans les visages, mais la paix aussi (Ninetto). L'absence insiste sur son état d'absence.

Les temps linéaires auxquels chaque bout du film doit obéir dans sa narration, deviennent dans leur unité séparée, un temps opaque, dense, uni et continu, mais qui, dans cette densité même, devient fragmentaire, accidentel, instant. Par le fait que les images sont visibles et invisibles simultanément, qu'elles sont mises dans un mouvement qui les devise et les rapproche à la fois, elles pointent curieusement vers la parole et le silence. On constate ainsi que le film accentue l'ambivalence de la société dans laquelle il se situe. Le cinéma est la réalité même, écrit Pasolini, mais il transforme celle-ci en un état hors du temps, à la fois passé, présent et futur, qui se réalise à travers l'histoire des hommes. (16) *Porcile* démontre ainsi que le temps humain est à la même distance de son propre achèvement (sa mort) que l'œuvre d'art de l'infini.

§ 6. — Disparaitre, *cinéma de la poésie*.

Par le fait que le film met ensemble deux temps disparates, ou disons plutôt qu'il met ensemble le simulacre de deux temps différents (car la réalité du film est la réalité du présent et du monde même), le temps filmique, le temps filmé devient à la fois contre-temps, contre-image et contre-parole. Il semble que *Porcile* coupe tout les liens avec le monde réel, comme dans un rêve, pour, dans cet acte de prise de distance, affirmer et nier au même moment

Pasolini semble être réalisé. Un langage digéré par la technocratie médiatique qui a complètement absorbé ce non-lieu utopique. La technologie, en se réalisant dans ses machines, est la vie, c'est-à-dire le langage même.

(16) « Lo stesso inespresso e inconscio Codice della Realtà che ognuno di noi ha dentro di sé, e che gli fa ricononscere la realtà (per es. ciò che dice una faccia vista per un attimo per strada), è lo stesso che gli fa riconoscere la realtà nel cinema (la stessa faccia "riprodotta" di uno che passa per strada). Ma cos'è che rende la realtà "naturalistica", ciò irreale ? È il tempo. In tal senso il cinema non è più naturalistico, perché, MAI, IN PRACTICA, CIOÈ NEI VARI FILMS, il suo tempo è quello della realtà. Esso cioè non è irreale, come la realtà, che è fondata su un'illusione : ossia sul passare di qualcosa che non c'è, il tempo. Il cinema è fondato, al contrario, sull'abolizione del tempo come continuità, e quindi sulla sua trasformazione in realtà significativa e morale, sempre (anche nei films commerciali, in cui naturalmente significazione e moralità sono degenerate). », (« Le même code tacite et inconscient de la réalité que chacun de nous a en lui et qui nous fait reconnaître la réalité (par exemple, ce que dit un visage vu un instant dans la rue) est le même que celui qui nous fait reconnaître la réalité au cinéma (le même visage "reproduit" de quelqu'un qui passe dans la rue). Mais qu'est-ce qui rend la réalité "naturaliste" irréelle ? C'est le temps. En ce sens, le cinéma n'est plus naturaliste car, JAMAIS DANS LA PRATIQUE, C'EST-À-DIRE DANS LES DIFFÉRENTS FILMS, son temps est celui de la réalité. C'est-à-dire qu'il n'est pas irréel, comme la réalité, qui est basée sur une illusion : à savoir sur le passage de quelque chose qui n'existe pas, le temps. Le cinéma est au contraire fondé sur l'abolition du temps en tant que continuité, et donc sur sa transformation en une réalité significative et morale, toujours. (C'est la même chose dans les films commerciaux, bien que chez eux la signification et la morale sont naturellement dégénérés). »), Pasolini, *Empirismo eretico*, Milan 1977, pages 252-253.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

ce réel. Prendre distance pour se rapprocher ensuite d'une façon critique et réflexive, c'est l'acte de la pensée et de la résistance par excellence. *Aus der Zeit treten*, sortir du temps, est le rêve de l'œuvre d'art comme refuge de résistance. Naturellement, sortir du temps ne veut pas dire se divertir pour évincer le réel et ses structures profondément machinales. *Aus der Zeit treten* signifie ne plus participer, arrêter pour un moment de faire avec. Le *je* pour un instant ne prend plus part au jeu. Dans cet instant précis de la contemplation, le *je* disparait dans les choses et dans les œuvres même. Le *je* disparait pour faire apparaître le monde comme monde sans le *moi.* L'expérience d'art est ainsi, comme « montre » *Porcile*, l'expérience paradoxale du monde sans le *moi.* Le monde s'élargit et prend la forme d'un tissu charnel et sensuel, qui se tisse avec et autour du *moi effacé.* « Überall greift sie in mein Gewebe », « Partout elle interfère dans mon tissu. » (17) De cette façon, l'œuvre d'art fait apparaître comme un éclair le bonheur de ne plus être obligé de dire *je* ou *moi*, mais de devenir l'autre, et d'être avec l'autre, et de disparaitre ainsi dans le langage et dans le tissu du monde. Ainsi peut-on dire que les grands romans de langage, comme par exemple ceux d'Adalbert Stifter, de Gustave Flaubert, de Claude Simon, d'Emilio Gadda, d'Elsa Morante ou d'Elfriede Jelinek, font tout pour éviter le *je* et pour faire parler le langage dans son réel même.

Cet acte de dispersion du *je* dans le langage ou dans l'image est un acte de résistance dans la société technocratique. Si le *je* s'éclipse dans l'instant de la contemplation ou dans le langage, c'est justement pour libérer le monde du pouvoir et de s'opposer comme le jeune San Francesco à la volonté du pouvoir. En échappant et en résistant à la mort et à la négation totale, c'est un acte dans le temps contre le temps même. En transformant aussi la mort dans autre chose de sorte que, dans cette absence et dans cet effroi qui nous entourent, puisse encore apparaître quelque chose comme le beau comme pensée critique et contrebalancer dans son apparition même cette absence. Pasolini appelle ceci *Il cinema di poesia*, le *cinéma de la poésie.*

§ 7. — **Possibilités et rigueur.**

Ainsi, le film se passe sous le signe du songe et de la mémoire. C'est comme un retour du lointain. (18) C'est un passage de rêve, d'irréel qui n'est pas une expression du fantastique mais plutôt l'expression d'une mémoire. L'image « se souvient » d'un état antérieur de l'humanité, mais sans pourtant y participer à

(17) « Mein Herz geht langsam unter/Ich weiss nicht wo- / Vielleicht in Deiner Hand./ Überall greift sie in mein Gewebe », de poème *Leise sagen* d'Else Lasker-Schüler. (« Mon cœur sombre lentement / Je ne sais pas où / Peut-être dans ta main / Partout elle interfère dans mon tissu »).

(18) « Ma c'è di piu — direbbe un teorico : ossia c'è tutto un mondo, nell'uomo, che si esprime con prevalenza attraverso immagini significanti (vogliamo inventare, per analogia, il termine im-segni ?) : *si tratta del mondo della memoria e dei sogni.* », (« Mais il y a plus — dirait un théoricien — c'est-à-dire qu'il y a tout un monde dans l'homme, qui s'exprime principalement par des images significatives (voulons-nous inventer, par analogie, le terme *im-segni* ?) : c'est le monde de la mémoire et des songes »), Pasolini, *Empirismo eretico*, Milan 1977, p. 168.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

ce souvenir comme à un souvenir individuel. (19) Ainsi l'œuvre d'art propose une autre mémoire, une autre parole, une autre image au monde. Dans une évocation d'un possible non réalisé, les souvenirs collectifs se transforment en quelque chose d'autre. Comme dans la grande vision de Leibniz, dans laquelle tous les mondes possibles restent malgré tout, malgré leur absence, à l'intérieur du monde réalisé. Les possibles non réalisés continuent d'exister comme une nuance du réel même. Celui-ci devient à son tour, paradoxalement, une expression de toutes ces absences du possible. Dans cette perspective le réel se présente seulement comme un pli plus dense et plus ferme comparé aux possibles non réalisés. Le monde se situe ainsi dans et par des mouvements de simultanéité. *Porcile* est donc une réalisation d'un possible en montrant le réel par le réel. (20)

Le possible du film, c'est cette distance même qui le sépare du réel, son mouvement de séparation qui l'éloigne du point réel (*c'était ici, hier war es*) pour le rejoindre à nouveau dans les répétions possibles de sa propre absence : *c'était là*, (*das war es,*), *il aura été* (*es wird gewesen sein*). Le film (se) creuse donc dans cette distance qui l'éloigne et le rapproche à la fois de son propre réel. L'image porte en soi l'état des choses objectives d'un autre temps, d'un autre monde qui n'existe plus. Mais, dans le film, cet état de choses devient une promesse et une menace pour le réel présent. Une promesse et une menace car l'œuvre laisse sous-entendre qu'il était une fois une autre chose, qui ne se répétera plus, mais qui rappelle par son absence même que les choses participent à cette autre chose, qu'elles ne se résument jamais tout à fait à leur apparences sanctionnées par le pouvoir. Il y a toujours quelque chose qui échappe au pouvoir (le visage de Ninetto par exemple), et cet échappement réside pour Pasolini dans la tradition et dans le langage même. *Porcile* met en scène la distance entre l'événement présent et l'événement passé. *Porcile* les met dans une relation de simultanéité, ce qui signifie que cette distance rapprochée peut garantir une forme de liberté et d'avenir.

Dans ce sens-là, le film unit en son sein deux temporalités pour en faire une seule, mais sans pourtant les synthétiser. Dans ce sens là, la rigueur réside dans le fait que le non-pensé, le « sans-forme » prend durant un moment donné figure, pour retomber et donner ainsi un changement à la possibilité de la réalité même. La rigueur consiste en cette construction rigoureuse d'une réalité à partir de deux temporalités disparates mises en simultané.

Deux temps qui explosent dans un troisième qui *aura été* (*gewesen sein wird*). Concernant le caractère de ce troisième état, on pourrait dire : *quelque chose était* et *quelque chose va avoir été* ((*wird gewesen sein.*) C'est un temps sans temps,

(19) « [...] gli archetipi linguistici degli im-segni sono le immagini della memoria e del sogno, ossia immagini di "communicazione con se stesso"[...] »)., « [...] les archétypes linguistiques des *im-segno* sont les images de la mémoire et du songe, c'est-à-dire les images de la "communication avec soi-même". »), Pasolini, *Empirismo eretico*, Milan 1977, p. 173.

(20) « Ecco perché : il cinema è un piano-sequenze infinito che esprime la realtà con la realtà. C'è sempre davanti a ognuno di noi una eventuale e virtuale macchina da presa, dallo châssis inesauribile, che "gira" la nostra vita quando nasciamo a quando moriamo. Perché il nostro linguaggio PRIMO E PURO è la nostra presenza, realtà nella realtà », (« Voilà pourquoi : le cinéma est un plan-séquence infini qui exprime la réalité avec la réalité. Il y a toujours devant chacun de nous une caméra possible et virtuelle, issue du châssis inépuisable, qui "filme" notre vie de quand nous naissons à quand nous mourons. Parce que notre PREMIÈRE langue PURE est notre présence, la réalité dans la réalité. »), Pier Paolo Pasolini, *Empirismo eretico*, page 252, Aldo Garzanti, Milano 1977.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

mais qui est quand même un temps de tension. *Il est temps qu'il soit temps.* (*Es ist Zeit, dass es Zeit wird*) [(21)], et, *Le temps en sursis/ devient visible à l'horizon* (*Die auf Widerruf gestundete Zeit/ wird sichtbar am Horizont.* [(22)]).

On pourrait presque dire que dans *Porcile*, la rigueur prend la place du sens. Si on considère le sens naïvement comme quelque chose qui, tel un secret, doit être dévoilé, comme une sorte d'arrière des apparitions qui doit être mis en avant, il n'y a pas de sens dans *Porcile*. Au fond, il n'y a rien à expliquer, tout semble être clair devant nos yeux. Ici le concept de la rigueur prend en revanche tout son sens, si je peux m'exprimer ainsi. La construction spéciale du film ne sert pas à illustrer un propos, elle n'est pas la démonstration d'un postulat, mais sa construction rigoureuse fait intégralement partie de son contenu. C'est elle, cette rigueur, qui pousse les choses en avant. À la fois elle reste invisible, comme l'histoire, elle n'est pas vraiment saisissable, mais, elle est aussi la condition et le résultat de sa propre démarche. Avec et dans la rigueur du film, l'invisible se structurise, pour être visible, sans pour autant s'épuiser dans cette visibilité.

Mais pour se faire quand même visible, pour se faire sentir, cette rigueur de Pasolini s'installe entre des extrêmes : la mort/la vie, le passé/le présent, le sacré/le profane, l'homme/la créature. (Ici les animaux punissent les hommes, les créatures, les chiens sauvages et les porcs, exécutent une forme de justice qui, par sa propre nature 'non-humaine', rendent paradoxalement aux hommes leur dignité perdue.)

La rigueur de Pasolini est une immanence, elle se crée dans ses propres conditions pour se surmonter. C'est en quelque sorte la rigueur qui transforme l'horreur en autre chose. La rigueur comme simultanée des extrêmes apparaît chez Pasolini comme un arrêt dans le temps, ou comme une contemplation active. De cette façon, elle devient le contre mouvement possible dans une société dans laquelle le concept basique est le mouvement accéléré lui-même. Un mouvement sans fin, perpétuel, et surtout sans but (ici le progrès), sauf pour garantir le mouvement lui-même, qui ainsi devient le garant du progrès et du profit. Un mouvement sans but est une forme de conservatisme du statu quo, une dépolitisation de la société, une parodie libérale de la dialectique. [(23)]

Dans ce sens-là, le film *Porcile* et sa conception du temps se posent contre ce projet consensuel et vide de progrès comme mouvement linéaire et creux qui promet le futur et le présent comme une sorte de différence et d'alternance à attendre dans le même. C'est pour cela que dans *Porcile*, c'est le début prétendu, si l'on accepte l'épisode du cannibale comme étant historique, qui apparaît comme plein et prometteur d'un autre temps, le temps du passé futur.

(21) Vers du poème *Corona* de Paul Celan.

(22) Vers du poème *Die gestundete Zeit* d'Ingeborg Bachmann.

(23) « L'affermazione del Bernstein secondo cui il movimento è tutto e il fine è nulla, sotto l'apparenza di una interpretazione "ortodossa" della dialettica, nasconde una concezione meccanicista della vita e del movimento storico : le forze umane sono considerate come passive e non consapevole, come un elemento non dissimile dalle cose materiali, e il concetto di evoluzione volgare, nel senso naturalistico, viene sostituito al concetto di svolgimento e di sviluppo. » (« L'affirmation de Bernstein selon laquelle le mouvement est tout et la fin n'est rien, sous l'apparence d'une interprétation "orthodoxe" de la dialectique, cache une conception mécaniciste de la vie et du mouvement historique : les forces humaines sont considérées comme passives et non conscientes, comme un élément non dissemblable des choses matérielles, et le concept d'évolution vulgaire, au sens naturaliste, est remplacé par le concept de déploiement et de développement. »), Antonio Gramsci, *Passato e presente*, Editore Riunti, Rome 1973, p. 248.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 8. — L'Immanence.

Dans *Porcile*, malgré ou plutôt grâce aux situations extrêmes, la simultanéisation rigoureuse apparaît comme solidarité des instants contre le progrès du profit, et se pose contre l'idée et l'usage quotidien de l'évaluation des choses et des actions humaines. L'autre qui était, qui a été, devient ainsi pour Pasolini une promesse de bonheur solitaire et solidaire. Il s'agissait encore pour Pasolini d'arrêter l'histoire pour faire l'histoire. (24)

En ce sens-là, *Porcile*, comme œuvre d'art, entreprend de changer l'immanence en un simulacre de transcendance, c'est-à-dire d'un ailleurs qui est ici. Ainsi *Porcile* se situe dans un renversement perpétuel, ou, si l'on veut, il met en scène l'ambivalence, l'échappement de l'expérience (artistique) d'un monde sans présent car courant vers l'origine, qui est aussi l'avenir. La tension du film, sa rigueur, s'établit justement dans le non-mouvement par le déni d'une histoire au sens propre. C'est, si l'on veut, l'instant qui crée la durée dans le film. Et cette durée est à la fois durée et fausse durée, car les deux événements en juxtaposition sont seulement le simulacre d'un film, d'une histoire et de la durée. Par cette construction rigoureuse de deux films indépendants, la durée (du film complet) s'annule, devient instant, s'individualise. C'est à partir de cette défaillance du temps que se développe un « sens », une « écriture », qui est vide et plein à la fois. Il y a en permanence un détournement des instants et des images. Le temps comme instant est un événement individuel et mondial à la fois, car chaque moment temporel porte son propre passé. C'est l'immanence qui se transforme en transcendance et vice versa. On pourrait même aller jusqu'à dire que l'épisode historique se déroule après l'épisode du présent. L'immanence, pour Pasolini, génère sa propre transcendance dans le passé même. La transcendance ici est une sorte de renversement de l'immanence sur elle-même, pour ainsi engendrer, durant un instant, l'illusion d'un au-delà possible dans le monde même. La transcendance qui est ainsi déclenchée par le singulier exprime en fin de compte que l'histoire n'est pas un mouvement objectif du sens qui se réaliserait dans la promesse d'un futur. Pour Pasolini, dans *Porcile*, il n'y a pas une fin du passé. Car l'événement passé reste toujours *co-présent* (*mitanwesend*) dans le présent singulier. Cet instant apparaît comme un futur passé et celui-ci est comme une fenêtre sur la totalité du temps.

§ 9. — Langage et réalité.

Le *cinéma de la poésie* n'est pas seulement une représentation de la réalité, c'est-à-dire un discours sur le monde, il est aussi *avec* et *dans* le monde (*mitsein*). Car, pour Pasolini, toute la réalité est langage (« La realtà è linguaggio. »). (25) Le cinéma et la poésie ont pour cette raison une position privilégiée dans la

(24) « Augustin hat erkannt, dass Erlösung und Geschichte nicht ohne einander sind und nicht ineinander, sondern in einer Spannung, deren gestaute Energie schliesslich nicht weniger will als die Aufhebung der geschichtlichen Welt selber. », (« Augustin a reconnu que le salut et l'histoire ne sont pas l'un sans l'autre ni l'un dans l'autre, mais dans une tension dont l'énergie refoulée ne veut finalement rien de moins que l'abolition du monde historique lui-même. »), T.W. Adorno, *Fortschritt, Stichworte*, dans : GS Band 10.2, Frankfurt am Main 1973, p. 622.
(25) Pasolini, *Empirismo eretico*, Milan 1977, p. 232.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

société technocratique : ils défendent comme ils peuvent, malgré et contre tout, le statut primordial du langage pour l'expérience humaine du monde.

Dans l'action de nous faire voir quelque chose, le film, c'est-à-dire le cinéma dans sa concrétisation, met ainsi en lumière que tout est langage (et image). Comme déjà mentionné, le *parler-cinéma* vacille pour Pasolini entre songe et mémoire. C'est-à-dire que le cinéma repère un état archaïque de l'homme, un état archaïque qui fait partie à la fois d'une mémoire collective et individuelle. On pourrait dire que le spectateur d'une image cinématographique voit à travers cette image son propre imaginaire individuel qui le lie avec les temporalités de l'humain. Nous avons rêvé à ce que nous nous remémorons. (*Wir haben von dem geträumt, an das wir uns erinnern*). Le langage du cinéma et de la poésie est un langage expressif (*lingua expressiva*) par sa capacité à évoquer le développement à la fois culturel et individuel. Le langage expressif apparaît ainsi comme un carrefour mobile et fluide entre ces deux domaines de l'expérience de l'homme. Nous remontons par le langage dans les profondeurs enfouies de la culture humaine (des passés humains) qui se trouvent silencieusement en nous.



Réveil dans un monde sans secret.

Dans ce sens-là, le *cinéma de la poésie* est une immanence pure, se transformant dans son immanence même en transcendance, un au-delà dans un *maintenant*, (*jetzt*) s'effaçant dans son affirmation même. Ainsi voit-on que le langage expressif du *cinéma de la poésie* exprime d'une façon aiguë la liberté. Si la liberté consiste comme pour Spinoza et pour Kant dans l'affirmation du nécessaire, on trouve une analogie de ce concept dans le langage même : les hommes sont nécessairement dans le langage dont les règles les ont dressés. Les règles du langage donnent de cette façon la liberté d'expression aux êtres humains (Wittgenstein). Finalement on exprime à partir de cette nécessité quelque chose qui n'est plus langage, mais liberté structurée et même non structurée. Ou si l'on veut, l'homme pointe l'état *sprachlos* (l'état d'être sans langage, d'être coi, d'être effrayé), c'est-à-dire le temps uniforme entre la naissance physique du corps et la naissance du langage. Le langage donne ce faisant naissance à la mémoire même.

Ainsi le cinéma et la poésie nous projettent vers une contemplation en action, un étonnement muet (comme l'expression de la tête d'une biche qui entend quelque chose inconnu, à la fois effrayée et émerveillée). La poésie

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

et le cinéma ouvrent cet abyme du silence qui est simultanément l'étonnement de l'existence du monde même et l'étonnement de sa destruction (et celle du langage et de la pensée) par la société néocapitaliste et technocratique (Voir par exemple l'expérience de Friedrich Hölderlin, d'Adalbert Stifter, d'Elsa Morante). Il y a ainsi une relation entre la liberté et le monde, simplement par le fait que, au fond, le monde ne me concerne pas (*je* ne suis pas le monde, dans lequel *je* suis rentré en silence et muet). Le *je* n'est pas lié au monde d'une façon logique et le *je* ne peut pas conclure logiquement au monde. Comme pour la liberté, le *je* est obligé de présupposer le monde, et c'est ainsi que se génère paradoxalement entre le monde et l'humain une responsabilité solidaire.

En ce sens, reconnaître le monde signifie le reconnaître, dans son paradoxe d'une historicité utopique, comme une promesse non réalisée, *qui a été, qui aura été.* En même temps, reconnaître le monde dans son historicité utopique implique aussi le constat prosaïque que fait Pasolini que ce monde comme utopie est disparu pour faire place au monde repensé par la technologie (et le terme monde ne signifie ici plus rien, ou si peu). Dans celui-ci, le monde n'est pratiquement plus qu'un modèle statistique, un modèle formel qui ne devance pas l'expérience humaine dans le langage, mais qui impose, par une sorte de dictature formelle et de dispositif technologique, un consensus linguistique, utilitariste, industriel et total. (26)

Comme nous avons vu, le *cinéma de la poésie* montre le *so-sein* (être dans un tel état) du monde, par le paradoxe de l'image montrant l'absence des choses : ici où là a été quelque chose qui n'est plus. C'est vrai que l'image montre le fait paradoxal qu'il y avait quelque chose qui était là autrefois, sans pourtant qu'elle représente ce non-être là. Ce qui se fait voir à partir de l'image, sans être visible, est quelque chose comme le soupçon d'un disparu, qui devient malgré tout, présent. Cette présence, qui n'est pas une présence au sens propre, est la répétition du toujours pareil dans son absence. Le *cinéma de la poésie* convoque cette absence du présent. Comme la poésie crée un meta-langage pour évoquer cette absence, le film *Porcile* crée une meta-image. Le film est dans ce sens là à la fois une rétrospective et une répétition nécessaire de ce qui a été, afin de l'actualiser à nouveau en permanence dans l'image. Il s'agit ainsi d'un retour du même, une répétition qui est aussi décalage. Le simultané rigoureux de *Porcile* est généré par le fait même que la répétition et son décalage ne fusionnent pas complètement dans la chose ou dans l'action filmée. L'image garde toujours sa propre réalité en soi. *Porcile* est une mise en scène et une cristallisation de cette tension. D'une façon plus générale on peut dire que l'art et la pensée philosophique sont des intensités immobiles, des contemplations en voyage. Toujours ici, dans leur état d'être d'ailleurs, une mémoire qui se projette vers

(26) « Ma nel caso che tutta una lingua sia "omologata e modificata" dal linguaggio della tecnica, si recreerà presumibilmente in tutta la vita sociale il fenomeno che oggi si verifica solo dentro la fabbrica : l'identificazione della lingua del tecnocrate con la lingua dell'operaio, e la susseguente soppressione del margine di libertà assicurato dai vari livelli linguistici », (« Mais dans le cas où toute une langue serait "homologuée et modifiée" par le langage de la technologie, se recréera vraisemblablement dans toute la vie sociale le phénomène qui ne se produit aujourd'hui qu'à l'intérieur de l'usine : l'identification de la langue du technocrate avec la langue de l'ouvrier, et la suppression qui la suit de la marge de liberté assurée par les différents niveaux linguistiques. »). Pasolini, *Empirismo eretico*, Milan 1977, p. 103.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

l'avant. Un écoulement rigoureux et simultanément entre la fiction et la non-fiction. Mais, contrairement à la société technologique qui cherche justement à anéantir cette simultanéité, à étouffer chaque échappement réel, Pasolini prend cette simultanéité interne du cinéma, sa 'nostalgie immanente' et son intensité immobile, pour les accélérer dans leur immobilité et simultanéité même, pour les faire basculer dans un état utopique [27] (Chaque musique de Mozart, Corelli, Nono crache dans la gueule du grand amusement, chaque tableau de Piero della Francesca, Titien, Beuys taille le couteau pour le remuer dans le ventre de cette société du consensus total, malgré leur rôles dociles assignés par le pouvoir même). Comme pour la mémoire, ou pour les songes, Pasolini démontre ceci : si les images (et l'écriture) conservent quelque chose du réel, c'est seulement pour déconstruire, pour ouvrir, c'est-à-dire, qu'elles s'abattent dans le rien de leur propre absence, qu'elles sautent dans l'irrationnel de la société comme la raison de Kierkegaard dans la croyance. [28] Elles se livrent à l'abime qui est le seuil entre le visible et l'invisible, le fini et l'infini. On comprend ainsi mieux la structure bipolaire dans *Porcile* : l'absence inhérente des images dans un film est « comblée » par l'autre image de l'autre film, pour former un état rigoureux qui, malgré cette rigueur, reste quasi insaisissable. De cette façon nait une intensité immobile entre ces deux images.

§ 10. — Critique de la raison technologique.

Pasolini a bien pris conscience à son époque du fait que la technologie et sa façon d'être utilisée dans la société néocapitaliste ont généré une nouvelle forme d'expérience du temps, pour transformer ainsi profondément le langage et du même coup la façon de penser et le comportement des êtres humains. Tout comme l'avènement de l'horloge au Moyen Âge, la technologie fait surgir de nouvelles structures de temps réglementées et réglementaires qui combinent à la fois le temps de loisir et le temps de travail. [29] Ainsi devient-il de plus en plus difficile, pour ne pas dire impossible, de faire une distinction stricte entre ces deux temps. Cette différentiation entre ces domaines temporels devient encore plus difficile parce qu'ils peuvent être traités et travaillés d'une manière flexible et libre (Il n'y a pas, pour le dire avec cette métaphore journalistique et politique un maitre de l'horloge, mais une maitrise généralisée du temps). Pour Pasolini, la technologie (néocapitaliste) produit dans la modernité contemporaine l'expérience d'un temps absolu, absorbant en lui tout les autres temps possibles. Ainsi, si l'on veut, la technologie vampirise et étouffe les temporalités des œuvres d'art, mais aussi celles de la vie sociale en changeant profondément le langage et la façon de voir et appréhender le monde. L'art et la vie sociale individuelle auront de plus en plus de mal à s'exprimer d'une façon non standardisée et consensualisée. Chaque expression

(27) Pasolini pouvait encore rêver.
(28) Le non-pensable est finalement moins un secret dans les choses même qu'une échappatoire au langage et à la pensée dans leur propre fondement : leur possibilité générale de saisir le monde. Pasolini montre dans *Porcile* que le non-pensable devance la pensée et le langage. Le langage est dans ce sens l'évocation de son propre origine qu'il évoque dans chacun de ses gestes.
(29) Dans ce contexte, on peut penser, par exemple, aux analyses de Jacques Le Goff sur le régime temporel du Moyen Âge.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

risque d'être déjà absorbée par le consensus et, ce qui est peut-être le pire, de le soutenir malgré elle.

Le langage, et l'art et la vie en général, deviennent fonctionnels et pratiques. On pourrait presque dire que leur fonction désignée par la société technologique est quasiment une fonction sanitaire et pédagogique : gérer le bien-être des gens. Dans la *Kulturindustrie*, le langage et l'art deviennent une sorte de sous-section de la grande santé généralisée.



Je vois quelque chose que tu ne vois pas.

Il est vrai que les temporalités des œuvres d'art entretiennent depuis toujours un rapport conflictuel et étroit avec le temps officiel, industrialisé et sociétal. Mais à l'époque où le pouvoir capitaliste n'était pas encore complètement rationalisé et technocratisé, c'est-à-dire depuis le début de l'industrialisation jusqu'aux années quatre-vingt-dix du XX^{e} siècle, il pouvait encore y avoir des failles dans son système. Il y avait des temporalités oubliées et mises à part par le pouvoir lui-même. (30) Par rapport à cette période, le XXI^{e} siècle se dévoile de plus en plus comme le siècle de la gestion totale et absolue du temps dans toutes ses ramifications. Le temps managé apparaît comme un outil subtil du pouvoir qui s'interpose jusqu'à l'intime, jusqu'à tous les détails les plus banals, par les machines, par l'information et par le concept du travail dé-corporalisé. Jusqu'alors existaient des temporalités qui gardaient encore une extériorité libre vis-à-vis du pouvoir et qui n'étaient pas encore totalement absorbées dans le concept du progrès comme production et exploitation frénétiques et managériales afin de capturer et saisir toutes les *surplus* possibles et pensables de la vie et de la pensée. Il y avait encore dans l'ancien régime

(30) Pour Pasolini par exemple la culture paysanne italienne, les cultures des pays du sud ou la culture populaire étaient les vestiges, les survivants et l'espérance d'un autre temps humain.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

capitaliste, malgré les tentatives pour réglementer tous les expressions de la vie et de la pensée, la possibilité d'un temps non profitable et non gérable. (31)

Gramsci aussi montre, par exemple, dans ses notes sur le fordisme et l'américanisme que le capitalisme était assez tôt conscient de ce problème d'un temps vital non capitalisé, et fait tout pour réglementer ce temps dans toutes ses expressions.

Dans ce contexte-là, l'œuvre d'art produisait et conservait une contre-temporalité, qui était peut-être, d'une certaine manière, encore plus facilement « solidaire » avec la réflexion critique. Mais il est bien connu, comme Marx l'a démontré, qu'un des effets de la machine industrielle est d'absorber le temps humain, d'unifier le temps de la vie et le temps du travail, et de fabriquer de ce fait un temps devenu encore plus machinal et exploitable. Le temps éclaté et exploité ainsi par la technologie ne se transforme pas en un contre-temps, mais en un temps sécurisé du divertissement et de la capitalisation. Dans ce contexte des années soixante-dix, Pasolini peut encore tout entreprendre afin que le cinéma soit une contre technique et une contre parole. Son espoir est de voir la temporalité s'accélérer, pour devenir historicité.

Il est bien connu que le noyau de la société moderne est la machine avec sa production d'un temps linéaire et uniforme. C'est elle qui façonne et conditionne la conscience et le langage. (32) Il est aussi bien connu qu'une des caractéristiques de la fabrique et de la machine consiste encore à l'époque de Pasolini à répéter toujours le même geste sans variation possible. Cette répétition sans variation est justement le signe fondamental des *Temps modernes*, comme le souligne Charlie Chaplin dans le film célèbre. (33) Et les temps

(31) « Ma intanto urge notare che, se la libertà si manifesta, nel mondo capitalistico, solo parzialmente, grazie alla diversità dei suoi livelli (coesitenza di forme arcaiche di vita, di regione o nazzione sottosviluppate ecc.), *la tecnicizzazione serà definitivamente livellatrice :* anzi, si presenta già sostanzialmente come livellamento potenziale. », (« Mais en attendant, il est urgent de constater que, si la liberté ne se manifeste que partiellement dans le monde capitaliste, c'est grâce à la diversité de ses niveaux (coexistence de formes de vie archaïques, de régions ou de nations sous-développées, etc.). La technicisation sera définitivement un nivellement : en effet, elle se présente déjà substantiellement comme un nivellement potentiel. ») Pasolini, *Empirismo eretico*, Milan 1977, p. 102.

(32) « Non per nulla già *era la macchina*, non la scienza, la vera protagonista delle paleoavanguardie. », (« Ce n'est pas pour rien que c'est la machine, et non la science, qui a été le véritable protagoniste de la paléo-avant-garde. »), Pasolini, *Empirismo eretico*, Milan 1977, p. 131.

(33) « Non per niente Charlot ha intitolato *Tempi moderni* il suo film : la caratteristica della fabbrica è proprio questa : di essere moderna, ma moderna come mai niente è stato nella storia. [...] Perché oggi, con la svolta tecnologica et tecnocratica, la vita di fabbrica viene a porsi come modulo fondamentale e direi unico *di tutta la vita.* [...] Questo uomo "espressivo" che si contrappone al mondo "comunicativo" o meglio "funzionale" della tecnica, dovrebbe in definitiva essere il poeta. ». (« Ce n'est pas pour rien que Charlot a appelé son film *Les temps modernes* : la caractéristique de l'usine est précisément celle-ci : être moderne, mais moderne comme rien ne l'a jamais été dans l'histoire. [...] Parce qu'aujourd'hui, avec le tournant technologique et technocratique, la vie en usine devient un module fondamental et je dirais même unique de toute la vie. [...] Cet homme "expressif" qui s'oppose au monde "communicatif"ou plutôt "fonctionnel" de la technologie, devrait en fin de compte être le poète. »), Pasolini, *Le belle bandiere*, Editori Riuniti, Rome 1996, p. 274.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2021

modernes sont le temps sans événement et sans expérience. (34) Ainsi peut-on dire que par leur structure temporelle, les temps modernes entreprennent d'empêcher autant qu'il est possible l'imprévu événementiel.

Donnant une expression à cette répétition sans variation des temps modernes, le *cinéma de la poésie* se présente donc comme un mouvement antithétique et paradoxal. Cette expression devient événement car c'est elle qui ouvre une brèche dans ce temps machinal, sécurisé et sécurisant du pouvoir technocratique. L'événement *tritt aus der Zeit*, sort du temps pour affirmer un autre temps vivant. L'événement ne se laisse pas assimiler au pur sentiment de *liker* ou de *disliker*. Ainsi, *Porcile* dénonce le caractère pseudo événementiel du pouvoir (et de la communication, de la publicité, de la politique technocrate).

De telle sorte que *Porcile*, comme œuvre d'art, refond dans chacun de ses gestes l'histoire, rend l'histoire, c'est-à-dire le temps accompli, à nouveau pensable, tangible et vivable. On pourrait dire que Pasolini entreprend avec *Porcile* de sauver la vie innocente, c'est-à-dire la vie des créatures, en l'intégrant dans son expressivité figé et immobile. *Porcile* nie à travers cette intensité statique l'idée du progrès comptable et quantitatif dans l'art même. Le vrai bonheur n'est pas saisissable comme but préétabli, parce que c'est une apparence furtive (*Erscheiung*). Il y a une intensité tendue entre la vérité (a)historique et (a)temporelle, qui résiste à sa réduction au factice et à l'information. L'intensité statique et véridique d'une œuvre d'art croît avec le temps, et ainsi s'accroit aussi sa capacité de simultanéité rigoureuse et ambivalente entre (a)historicité et (a)temporalité. Dans *Porcile* se voit justement le paradoxe de cette simultanéité rigoureuse entre historicité et a-temporalité, un retournement permanent entre temporalité et a-historicité. C'est dans ce sens que l'œuvre d'art ne connaît pas de progrès au sens temporel linéaire. Le *cinéma de la poésie* est toujours en décalage par rapport au présent. Il est l'excédent d'un présent sans variations véritables de la société technocratique. Son contenu, tout comme celui du langage (poétique), réside dans une ambivalence suprême : dans un retournement de situation permanent (*Wende*) être toujours le trop tard ou le trop tôt. (35)

Pour Pasolini, la répétition devient, de cette façon par son « non-caractère » même, un événement. L'œuvre d'art apparaît ainsi comme fondatrice, et l'expression la plus puissante pour créer la simultanéité comme rigueur et événement. Ainsi comprend-on pourquoi *Porcile*, comme événement et rigueur, ne raconte pas, ne dit rien et ne fait pas d'histoires. Comme tel il résiste contre le factice (*das gegen das Bestehende besteht*), est dans le temps sans être dans le temps, et un coup d'éternité sans être éternel, n'est rien, mais a quand même

(34) « Nous savons pourtant, aujourd'hui, que pour détruire l'expérience point n'est besoin d'une catastrophe : la vie quotidienne, dans une grande ville, suffit parfaitement en temps de paix à garantir ce résultat. Dans une journée d'homme contemporain, il n'est presque plus rien en effet qui puisse se traduire en expérience [...]. »), Giorgio Agamben, *Enfance et histoire*, Payot, Paris 2000, p. 20.

(35) « Il linguaggio della poesia è un linguaggio a parte. Sua caratteristica interna e permanente è la diacronicità. Perciò un poeta è sempre ritardato o anticipato rispetto alla circonstanza storica e in genere al suo tempo. [...] Il tempo della poesia è il romoto, l'imperfetto o il futoro [...]. » (« La langue de la poésie est une langue à part. Sa caractéristique interne et permanente est la diachronicité. Par conséquent, un poète est toujours retardé ou anticipé par rapport aux circonstances historiques de son époque. [...] Le temps de la poésie est le lointain, l'imparfait ou le futur [...] »). Pasolini, *Le belle bandiere*, Editori Riuniti, Rome 1992, p. 310.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

réussi. Le paradoxe du film consiste en le fait que la répétition devient ici un événement. C'est-à-dire que bien que chaque événement se caractérise comme étant unique, non prévisible et non répétable, l'événement, dans le *cinéma de la poésie*, est transformé par celui-ci en répétition afin de devenir une simultanéité rigoureuse et une intensité statique. Dans ce sens-là, la répétition s'accomplit dans un commencement dans l'avenir passé.

Le passé n'est donc pas passé dans *Porcile*, il porte déjà en lui l'avenir, pas comme progrès, mais comme hasard, instant, solitude. Il n'y a pas d'achèvement du passé, parce que le passé reste toujours co-présent dans le présent. Dans l'arrêt du temps, la totalité des possibilités lèvent les yeux. L'objet, le monde n'est plus fonctionnel. Les possibilités non réalisées, d'un texte où d'une vie par exemple, deviennent pensables à nouveau (différemment).



© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Fragments d'un questionnement amoureux

La rigueur en musique et philosophie interrogée par un mathématicien

Thierry Paul

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Résumé

Le mathématicien souffre et jubile dans la rigueur. Le « dernier petit lemme pour la route » qui mène à la construction finale du beau Théorème peut résister longtemps, sans garantie d'ailleurs qu'il existe vraiment. Mais lorsqu'il apparaît enfin, c'est toute une voûte qui se cabre et qui, alors, donne pleinement satisfaction. Le non-mathématicien ne voit souvent que cet énoncé final, et perçoit rarement la peine et la jubilation qui vont avec l'éclosion du lemme salvateur. De son côté, le mathématicien en souffrance regarde avec envie le discours philosophique et musical, combien de fois tenté par ces « passer-outre » qui font la fierté du philosophe et du compositeur. Et de se demander, transi : mais comment diable font-ils ? Que la rigueur soit le réel en mathématique est la base d'une vision non-platonicienne. Mais différentes occurrences de la rigueur en musique et en philosophie la ferons se rapprocher de plus en plus à nos yeux d'une certaine idée de réalisme. L'identification sera même totale pour nous en ce qui concerne la mécanique quantique, permettant de clore à nos oreilles tout débat sur son interprétation. La rigueur nous apparaît donc in fine comme le réel du mathématicien, du musicien, du philosophe, et, puisqu'il est quantique, du monde même.

§ 1. — Une anecdote.

Un étudiant, ayant écrit une égalité totalement fausse, vient se plaindre à son professeur d'avoir obtenu zéro point, argumentant que « *le membre de droite est correct. Je devrais donc obtenir la moitié des points !* ».

Cette anecdote rend habituellement hilares tous les mathématiciens à qui on la raconte, mais fait difficilement (à peine) sourire les non-mathématiciens. Il me semble intéressant de se demander pourquoi.

Le signe $=$ est le signe roi des mathématiques, il exprime l'identité entre deux choses a priori différentes et est emblématique de la jouissance du mathématicien dominant la puissance de corps opposés.

Le carré de l'hypoténuse = la somme des carrés des deux autres côtés.

Voilà bien un énoncé choc, valable pour tous les triangles rectangles, que seule la puissance du mathématicien peut augurer.

Mais notons tout d'abord, et nous y reviendrons largement plus tard, que pour qu'il y ait beauté dans l'égalité entre un membre de droite et un membre de gauche, il faut que les dits membres soient beaux eux-aussi, soient savoureux, soient puissants chacun de son côté. Si le triangle n'est pas rectangle, une formule analogie au Théorème de Pythagore existe, mais les membres de droite et de gauche font intervenir non seulement leurs longueurs, mais aussi l'angle entre deux côtés et (pas mal) de trigonométrie. Et patatras, tout l'esthétique s'effondre, sali par les cosinus et les sinus, voire même les tangentes. Les beaux mots de carré et de somme n'y suffisent plus.

Il y a donc bien des membres de droite qui perdurent, dépassent l'égalité (même fausse) avec un membre de gauche. Et l'étudiant de tout à l'heure méritait peut-être mieux que zéro....

Nous verrons par la suite comment des membres de droite existent sans égalité à leur gauche en musique, peut-être en philosophie, mais aussi en mathématiques, mais voyons tout de suite comment le piédestal de l'égalité lui-même est fait d'argile et non de marbre.

Depuis longtemps, le signe $=$ se décline sous différentes formes

$$\begin{aligned} \dots &= \dots \text{ modulo } \varepsilon \\ \dots &= \dots \text{ presque partout} \\ \dots &= \dots \text{ asymptotiquement lorsque } x \to \infty \\ \dots &= \dots \text{ sur les rationnels} \\ \dots &= \dots \text{ au sens que } \dots \\ &\textit{etc} \end{aligned}$$

jusqu'au déclin suprême : le signe $\leqslant$.

Dire que $a \leqslant b$, c'est dire que, peut-être $a = b$, mais que peut-être pas, et que, de toutes façons, a est plus petit que b : le jeu des possibles s'est considérablement élargi. Certains mathématiciens [(1)], au moins en plaisantant, pensent que c'est là un véritable déclin car les mathématiques doivent dire le verbe (égaler), qu'ils doivent être les seuls à le dire, et ne doivent dire rien d'autre.

Si peu de mathématiciens pensent encore ainsi, je ne suis pas sûr que l'image qu'ils ont donnée des mathématiques ne perdure pas dans le grand public, réduisant l'idée de rigueur, justement, à celle d'identité rigide. Et de là la méprise entre les mathématiques d'un côté et de l'autre les arts : ces pays où les membres de droite peuvent être justes sans être égaux aux membre de gauche.

(1) J'ai entendu au Courant Institute en 1988 Peter Lax présenter son ami Raoul Bott en disant que ce dernier avait choisi l'algèbre parce qu'« en analyse, il n'y a jamais d'égalité, seulement des inégalités ! »

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 2. — Poincaré, les résultats négatifs et le membre de droite non égal mais juste.

S'il est un mathématicien qui a travaillé dans l'identité et son contraire, dans le vrai et le faux, le positif et le négatif, c'est bien Henri Poincaré.

> *« J'attire l'attention du lecteur sur les résultats négatifs présents dans ce mémoire... ».*

C'est en ces termes étranges que Poincaré conclut l'introduction de son célèbre mémoire sur la mécanique quantique (Poincaré 1912). Étranges pour nous chercheurs du XXI^e^ siècle à qui l'on a inculqué la culture du positif, unique méthode pour obtenir un poste, un financement. Mais pas étranges du tout pour Poincaré.

En effet, dans cet article, que fait-il ? Il veut montrer que la célèbre loi de Planck, obtenue par ce dernier au prix d'une discrétisation ad hoc, les quanta, peut être dérivée, établie dans le cadre de la physique classique, celle du continu. Autrement dit, il voudrait montrer que

Loi de Planck	$=$	*physique des milieux continus*
mais il n'y arrive pas.		Il obtient donc que
Loi de Planck	$\neq$	*physique des milieux continus*
c'est son résultat *négatif.*		Mais, en fait, il montre que
Loi de Planck	$=$	$\boxed{\textit{physique des quanta}}$
au sens que		
seule l'hypothèse des quanta	$\Rightarrow$	*la loi de Planck.*

QED.

Ce que Poincaré présente comme un résultat négatif est en fait une démonstration de la nécessité de l'hypothèse des quanta de Planck. Et cette nécessité rend le « membre de droite » encadré dans le diagramme ci-dessus absolument détaché, indépendant de l'égalité qui le précède : la physique quantique est réellement née ontologiquement ce jour-là. Elle survivra à tout, sans sa béquille qui la lie à la loi de Planck qui, elle, n'étant qu'une loi, sera surpassée par l'équation de Schrödinger quelques vingt-cinq ans plus tard.

Il semble que Poincaré ne soit pas vraiment conscient de cet état de fait, d'où la phrase sibylline qui conclut l'introduction de l'article. Il s'est posé un problème, a espéré le résoudre dans le positif en restant dans le domaine de la science classique (c'est son côté conservateur) et échoue à trouver une distribution continue d'énergie qui entraine la loi de Planck. Ce qui le fait aller plus loin, et « dériver » le fameux membre de droite encadré ci-dessus, c'est à la fois une forme de rigueur intellectuelle absolue (disons une rigueur de la curiosité) qui le porte à aller plus loin, et une rigueur logique qui le fera passer du signe $\neq$ au signe $\Rightarrow$ dans le diagramme ci-dessus. Il démontre en effet

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

dans la deuxième partie de l'article que la distribution d'énergie en question doit avoir des sauts, des discontinuités, sur un ensemble discret de valeurs de l'énergie : les fameux quanta.

Ce qui est unique chez Poincaré, c'est son attitude très personnelle face à ces deux types de rigueur : intellectuelle et logique. Car si la rigueur intellectuelle, celle de la curiosité, est un moteur habituel de la création scientifique, il faut tout de même remarquer que Poincaré est le seul à l'exercer autant dans l'espace du négatif : au fond, le faux et le vrai semble l'exciter autant l'un que l'autre. En ce qui concerne la rigueur logique, celle qui va intuiter le $\Rightarrow$ à partir du $\neq$, on apprend généralement au mathématicien en herbe qu'on ne transige absolument pas avec elle. Et pourtant.

Et pourtant c'est ce que va faire Poincaré dans un autre de ses résultats les plus célèbres : le problème à 3 corps.

On connait l'histoire, résumons drastiquement : Poincaré gagne le prix offert par le roi de Suède en montrant que le système à 3 corps de la mécanique céleste est intégrable [(2)]. Mais on lui fait remarquer que sa preuve n'est pas complète, elle comporte une partie non réellement démontrée. Poincaré reprend sa preuve ... et montre le contraire : le système à 3 corps n'est pas intégrable.

Être ou ne pas être intégrable est une alternative, tel faire jour ou faire nuit. Ne pas montrer que le système à 3 corps est intégrable est aussi éloigné de montrer qu'il n'est pas intégrable que ne pas voir qu'il fait jour (e.g. rester en quarantaine dans un appartement obscur pour échapper à un virus) est loin de voir qu'il fait nuit. C'est pourtant cette entrave à une troisième forme de rigueur, psychologique, très « humaine », que Poincaré franchit hardiment : si sa preuve de l'intégrabilité est fausse, c'est que l'intégrabilité est fausse. Énoncé qu'il lui faudra démontrer « à la main » puisqu'en dehors de toute rigueur logique a priori.

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. Là où la rigueur, celle de la curiosité et celle de la logique, va entrer à nouveau en jeu, c'est quand Poincaré va élargir le jeu phénoménologique des possibles. Si un système aussi simple que les trois corps — extension minimale du système des deux corps, intégrable, lui, comme on le sait depuis Newton — n'est pas intégrable, c'est qu'un système dynamique en général n'a pas à l'être. Et alors tout est possible : les divergences mathématiques rencontrée dans la tentative de preuve de l'intégrabilité deviennent source d'un nouveau paradigme : le chaos — strictement opposé à l'intégrabilité et non plus sa simple négation. L'usage et non usage de ces trois forme de rigueur — psychologique, curieuse et logique — est vertigineux. Et nous semble si loin et si moderne comparé au structuralisme mathématique des années cinquante. Le diagramme suivant s'impose.

$$\begin{array}{ccc} \textit{Système à 3 corps} & = & \textit{intégrable} \\ & \text{devient} & \\ \textit{Système à 3 corps} & \neq & \textit{intégrable} \\ & \text{puis} & \\ \ldots & \ldots & \boxed{\textit{chaos}} \end{array}$$

(2) Bien que cela n'ait pas trop d'importance pour notre argument ici, rappelons qu'un système dynamique, tel les planètes en mouvement, est dit intégrable lorsque l'on peut le rendre équivalent à un système simple évoluant périodiquement en chacune de ses dimensions.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Cette fois-ci non seulement un membre de droite est né, qui n'est plus égal à un membre de gauche, mais ni le membre de gauche ni l'égalité ne perdurent. Le membre de droite encadré « est », il « est » tout seul, et il est correct. Et l'on sait le succès qu'il aura au siècle suivant.

Le vertige de cette construction n'est pas sans rappeler le vertige compositionnel que l'on trouve, par exemple [3], dans les trois moments musicaux suivants : le début du développement du premier mouvement de la quarantième symphonie de Mozart (mesures 95-115) [4], le milieux (variation fuguée avant la variation « andante ») [5] du dernier mouvement de l'héroïque de Beethoven et certains passages des Gruppen de Stockhausen [6]. Ces trois instants convoquent trois formes très strictes de composition : le style classique (forme sonate), les variations et le sérialisme généralisé des années cinquante [7] . Trois formes de rigueur musicale drastiques maltraitées, explosées, déstructurées [8] par une . . . rigueur musicale qui semble exténuée par la rigueur formelle. Nous y reviendrons.

§ 3. — Membres de droite et signes égal en musique et philosophie.

Dans la discussion de la section précédente, est-on vraiment loin de la musique, de la philosophie ?

Une autre anecdote, duale en quelque sorte de celle de l'étudiant revendiquant qu'un membre de droite d'une égalité fausse puisse intrinsèquement être correct, nous aidera peut-être à y voir plus clair. Il s'agit de Leonard Bernstein jouant à son « Maître » Nadia Boulanger une petite chanson tout juste composée par lui. À un moment donné, Nadia Boulanger stoppe brusquement Bernstein par un :« *s'il vous plait, pas de si bémol ici !* ». Ainsi dans le monde que l'on imagine tellement libre de la création musicale à Broadway, où l'on pense que les membres de droite virevoltent sans fin, électrisés par des néons clignotants, et bien, dans ce monde, les membres de droite peuvent rencontrer un signe $\neq$ et l'identité « $=$ *si bémol* » peut être fausse. Et Leonard Berstein d'avouer, dépité comme l'étudiant mathématicien de tout à l'heure, qu'il a enlevé le si bémol « *parce que Madeumouaselle* [9] *me l'a demandé.* ».

Je reviendrai sur la place de la rigueur dans le processus compositionnel dans la section suivante, en particulier en comparant son lieu temporel à celui de la rigueur en mathématiques, mais essayons tout d'abord d'esquisser ce qui pourrait être un membre de droite sans égalité en musique. La plupart des fugues apparaissent dans la littérature musicale dans un diptyque *Prélude et Fugue* : une fugue aime bien (esthétiquement) être préludée. Peut-être le

(3) On pourrait en citer bien d'autres.
(4) https://www.youtube.com/watch?v=LQ_FZmILobE, 1:50 – 2:07
(5) https://www.youtube.com/watch?v=g6hl29t8qf0, 4:24 – 5:13
(6) https://www.youtube.com/watch?v=6IZMWEtksII, *e.g.*14:35 – 15:30
(7) Rappelons que Gruppen est écrit pour un orchestre divisé en trois groupes, chacun dirigé par un chef et avec son propre tempo.
(8) Déconstruites ?
(9) Mademoiselle : surnom de Nadia Boulanger.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

rôle du prélude est-il de flatter l'oreille de l'auditeur avant une certaine austérité contrapuntique que nous offrent les fugues ? Peut-être, quand elles étaient improvisée, l'interprète avait-il besoin de se faire les doigts ? En tous cas un lien, une identité organique lie le prélude à la fugue.

Mais tout comme l'identité = en mathématiques, ce lien se décline sous différentes formes : on a des préludes de chorals, on a des prélude-choral-et-fugue, le prélude peut devenir plus important en longueur que la fugue. Mieux encore, le prélude peut être fugué, à tel point que l'on croit entendre parfois non plus un prélude et fugue, mais une fugue et postlude.

Et puis Chopin franchit le pas en composant vingt-quatre préludes sans fugue. Et pour brouiller encore un peu plus les cartes, il les publie dans un seul opus (*op*. 28) comme si chacun allait préluder l'autre dans la série. Cependant, il semble que Chopin ne souhaitait pas les entendre jouer ainsi, à la suite et dans l'enchainement harmonique un peu conventionnel dans lequel ils sont édités [(10)], il s'agit donc bien d'un ensemble non ordonné de 24 œuvres musicales différentiées. Mais quelle est alors leur identité ?

Un prélude sans fugue est un peu un membre de droite (plutôt de gauche en l'occurrence) sans égalité : le lien organique avec la fugue qu'on lui associait a disparu. Mais alors pourquoi l'appeler prélude et non pas pièce, bagatelle, impromptu ? Justement parce que, sans sa fugue, le prélude continue à préluder. On le sent très bien à l'audition de l'*op*. 28 : chaque prélude nous place à sa fin en position d'attente, d'interrogation, un peu comme au bord du gouffre. Mais, me direz-vous, et le dernier ? Et bien le dernier (dans l'hypothèse où on les joue tous dans l'ordre dans lequel ils sont édités) se « termine » par une seule note fortissimo dans l'extrême grave du piano, tellement basse et tellement forte qu'elle sonne comme dissonante. Un accord dissonant à une note, quoi de plus interrogatif, de plus vertigineux, de plus inabouti ?

Tout comme un membre de droite acquiert un statut ontologique quand il se retrouve sans égalité, un prélude sans fugue prélude. Il prélude intransitivement.

Notons que le même statut libéré a été acquis par la suite par d'autres formes musicales. Ainsi en va-t-il des trois intermezzi, *op*. 117 de Brahms (Brahms 1892) : un intermèdes entre deux intermèdes... chacun sans rien « de l'autre côté ».

Si, comme nous le verrons bientôt, la rigueur semble constitutive du processus de composition musicale, tout comme du processus de création mathématique, la philosophie, lieu privilégié des concepts, notions, idées par excellence, ne semblerait voir briller en son ciel que des membres de droite sans signe égal associé. Au moins sans la nécessité de la béquille =. Mais lorsque Jocelyn Benoist nous dit qu'un concept n'est concept que parce qu'il agit sur quelque chose, cette action nécessaire ne ressemble-t-elle pas au branchement de quelque chose sur un membre de droite procuré par un signe = ? Les membres de droite philosophiques seraient-ils plus « branchés » à une égalité rigoureuse que ne le sont leurs pendants mathématiques ? Nous y reviendrons.

(10) Il est fascinant à ce propos d'écouter les enregistrements live de Sviatoslav Richter qui n'en joue qu'une sous-suite et dans un ordre différent à chaque fois : chaque prélude acquiert ainsi une personnalité que l'on ne détecte pas quand placé dans le flot, en particulier harmonique, initial.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 4. — De Chevalley à Stravinsky : le chef d'œuvre inconnu.

Deux anecdotes, duales l'une de l'autre encore une fois, vont nous éclairer sur la différence qu'entretiennent les rigueurs mathématique et musicale.

Alors qu'il donnait une conférence au tableau noir, le grand mathématicien Claude Chevalley eut un trou de mémoire lors de l'exposition de la preuve de l'un des résultats qu'il venait d'exposer. Il se rapprocha alors du tableau et fit en catimini un petit dessin diagrammatique, caché par son épaule, qui lui permit de retrouver le chemin de sa preuve qu'il exposa alors brillamment... après avoir pris grand soin d'effacer le dessin salvateur.

Igor Stravinsky composa ses merveilleux Moments (Stravinsky 1958) pour piano et orchestre à la fin de sa vie, dans cette période où il utilisait la langage sériel strict de Schönberg et Webern, tout comme les jeunes Boulez, Berio et Stockhausen. D'après André Boucourechliev (Boucourechliev 1983), il se fit fort d'avoir écrit une œuvre sérielle tellement élaborée (bien que tellement courte) qu'il faisait fis à quiconque de pouvoir retrouver la série originale [(11)].

Ces deux anecdotes sont bien duales : d'un côté un mathématicien se défend d'exprimer en public une idée qui ne serait pas totalement fixée par des formules écrites, de l'autre un musicien qui prétend cacher la rigueur de sa composition pour n'exprimer que le sensible, le sensuel.

Chevalley a bien sûr tort, car le dessin, s'il ne constitue pas une preuve, aide tout autant l'auditeur que le conférencier à la comprendre. Mais je pense aussi que Stravinsky a tort — non pas seulement au sens que l'on peut (dixit Boucou) retrouver la série originelle — mais bien de vouloir la cacher, car elle peut aider non seulement l'analyse, et donc l'interprétation, mais parce que je prétend qu'elle fait partie du sensuel de l'œuvre.

La traversée du pays fertile n'est pas seulement nécessaire au compositeur, elle l'est aussi, d'après moi, à l'auditeur. Nous reviendrons là-dessus bientôt. Dans le cas de Chevalley comme dans celui de Stravinsky, il y a bien un chef d'œuvre inconnu : la sensualité d'un dessin face à la rigueur mathématique et la rigueur de l'acte de composition face à la sensualité sonore de l'œuvre musicale.

Les musiciens des années cinquante, après avoir exhibé a hue et a dia les séries, ont voulu tout d'abord les cacher pour finalement les faire disparaitre afin de prétendument privilégier le sensuel par rapport au rigoureux, au rigoureux prétendument rugueux. Fatal error aurait dit un PC s'il y en avait eu à l'époque.

§ 5. — Rigueur math. vs. musique : question de temps.

Les mathématiques et la musique ont en commun d'avoir leur propre langage. C'est une particularité rare, que semblent ne pas posséder la physique ou la danse, par exemple. Mais qui dit langage dit grammaire, c'est-a-dire rigueur et contraintes. Les langages tonal, modal ou sériel sont de parfaits exemples de rigueur en musique. N'est-ce pas rigoureux et contraignant que de composer en n'utilisant qu'un sous-ensemble choisi à l'avance de notes parmi les douze qui vont du do au si ? Autant que de convenir que si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors, *nécessairement*, $a \leqslant c$.

(11) Boucourechliev prétend que si, c'est possible... mais sans donner la série retrouvée.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Puisque composer et démontrer font appel tous deux à la notion de rigueur, les compositeurs démontreraient-ils des sonates et les mathématiciens composeraient-ils des théorèmes ?

Si la réponse est partiellement positive, l'usage de la rigueur, effective en mathématiques et en musique, se situe en deux « moments » différents de la création dans les deux disciplines : la rigueur est première en musique et finale en mathématiques. On compose « a priori » dans une tonalité ou dans le cadre d'une série ou d'un matériau donnés à l'avance et l'on boucle « a posteriori » la démonstration d'un théorème dont on avait déjà, depuis longtemps parfois, l'énoncé (Paul 2014). Le compositeur commence à travailler dans un choix rigoureux de tonalité, une série, un tableau de signes, un algorithme, puis s'en affranchit au cours du travail de composition : il en a le droit, c'est lui l'artiste ! Un mathématicien qui veut démontrer le résultat qu'il a en tête commence tous azimuts, hors de toute rigueur, simplement pour avoir des idées ; mais, à la fin, il vérifie tous les lemmes (et il y en a qui résistent longtemps) au nom de la rigueur qui lui donne enfin le droit de proclamer son résultat.

On retrouve aussi dans d'autres espaces de valeurs ce type d'opposition de hiérarchies de la rigueur en musique et en mathématiques. L'*op.* 27 numéro 1, (Beethoven 1802), de Beethoven s'appelle « sonata quasi una fantasia » :

sonata quasi una fantasia : pourquoi pas « fantasia quasi una sonata » ?

De même, il existe en mathématiques des fonction « (infiniment) différentiables quasi-analytiques » [(12)].

quasi-analytique : pourquoi pas « quasi-différentiable » ?

Être analytique est plus contraignant, plus rigoureux qu'être différentiable, tout comme une sonate est plus rigoureuse qu'une fantaisie. On a donc bien les équivalences renversée :

$$\begin{aligned} quasi\ una\ fantasia &\leftrightarrow quasi-différentiable, \\ quasi-analytique &\leftrightarrow quasi\ una\ sonata. \end{aligned}$$

La rigueur est première ici aussi en musique, pas en mathématiques : le musicien part de la rigueur sonate, le mathématicien arrive à la rigueur analytique. La rigueur est le matériau premier du compositeur, elle est le romantisme final du mathématicien. Lorsque ce dernier boucle le dernier lemme qui lui a donné tant de mal, alors, et alors seulement, « c'est lui l'artiste ! ».

§ 6. — Rigueur math. vs. philo. : question d'espace.

Pour un mathématicien amoureux (de la philosophie) une question revient souvent à l'esprit : qu'est-ce qui fait qu'un texte, écrit donc, est un texte de philosophie plutôt qu'un texte d'une autre discipline. On « sent » très bien la différence qu'il y a entre un poème ou une nouvelle et... le mode d'emploi

(12) Une fonction infiniment différentiable est une fonction qui a un développement de Taylor a tout ordre (elle peut être approximée par un polynôme à tout ordre), elle est analytique si ce développement converge.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2021

d'un mixer : la finalité n'est pas la même. Mais entre un chapitre d'un roman disons philosophique et un chapitre d'un livre de philosophie ? La finalité cette fois peut être assez semblable : réfléchir sur un même sujet, le commenter, en découvrir ses structures, etc. Mais là où le littéraire va illustrer, émouvoir, créer des personnages, le philosophe va (vouloir) argumenter, prouver, démontrer une construction de pensée. L'émotion finale viendra (dans les bons cas) de cette construction. Au moins en partie.

Cette dynamique de rigueur philosophique rapproche le philosophe du mathématicien. Est-ce que l'émotion mentionnée l'en sépare ? Certains le pensent [13], ils ont totalement tort. « $-\hbar^2\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{r}$ est auto-adjoint » est aussi émouvant au mathématicien que ne l'est « l'existence précède l'essence » au philosophe ou « la sauterelle est bougonne » au poète [14].

Les mathématiciens, tout comme les philosophes, aiment parler. Parler de leurs travaux, exprimer oralement ce qu'ils consignent par écrit. Cela les différencie des auteurs littéraires qui écrivent mais ne lisent pas, en général, leurs productions en public. Et, au fond, un exposé de math n'est pas si différent que ça d'un exposé de philo. Les matheux accusent souvent les philosophes d'avoir dans leurs laïus trop d'histoire de la philo [15], et les philosophes aux mathématiciens d'en manquer. Mais, dans les deux disciplines, les exposés durent une heure en général, ont une introduction, un développement, une conclusion, et suscitent une séance de questions du public. C'est donc dans l'espace de l'écrit qu'il faut chercher une différence.

Posons nous donc la question : quel est l'espace du texte philosophique (rigoureux) ?

Les mathématiciens présentent leurs résultats récents et pointus dans des articles à paraître dans des journaux, les philosophes dans des livres. Si un article de mathématique est long (cela arrive), c'est en général justifié par une spécificité du champ étudié (la classification exhaustive des groupes finis existe, c'est un théorème, mais la liste est longue), les livres de philosophie sont moins long qu'autrefois, mais quand même ! Il y a une esthétique de la concision en math comme il y a une esthétique de l'abondance en philo.

Bien sûr, les mathématiciens écrivent aussi des livres. Mais plus tard, après, et souvent moins techniques, voire pas du tout. Généralement à l'attention d'un plus large public que celui ciblé par les articles originaux. Et, de leur côté, les philosophes écrivent aussi des articles, mais souvent, là encore, dans des revues grand public. On voit donc une différence nette entre les espaces de l'écriture en math et en philo, non pas une différence qualitative (les deux utilisent un langage etc) mais bien quantitative : des espaces de taille modeste en math, large en philo.

Il me semble que l'on est là au cœur de l'expression de la rigueur dans les deux disciplines. Une preuve d'un résultat mathématique plus courte que

(13) Ceux qui pensent des mathématicien, tel San Antonio de Bérurier, qu'ils ont un sixième sens mais aucun des cinq autres.

(14) Pour ne citer que des « résultats » presque contemporains de l'après-guerre.

(15) Exposer de la philosophie sans histoire de la philosophe, c'est un peu comme jouer juste du violon : on ne peut jamais parfaitement le faire, mais comme disait David Oitrakh (à propos de violon), il y en a quand même qui exagèrent !

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

celle originalement publiée par l'auteur sera considérée sinon comme supérieure, en tous cas comme intéressante, surprenante, inattendue. L'économie de moyens sera vue comme une virtuosité pas seulement technique de la rigueur mathématique : une preuve plus courte sera plus belle aux yeux de la communauté mathématique. La rigueur en philosophie aura besoin, au contraire, de la longueur : l'argumentation se fera souvent par l'exemple, la répétition,..., bref tout ce que le mathématicien verra comme de la redondance. Le philosophe verra quant à lui de la sècheresse dans la concision du mathématicien.

En somme deux expressions de la rigueur habitant deux espaces différents, tout comme en math et musique deux expressions de la rigueur vivant en deux temps différents.

§ 7. — Rigueur, un mal nécessaire, un bien suffisant ? Ou la complainte du but.

La rigueur est douloureuse au mathématicien, comme « les escaliers de la butte sont durs aux miséreux ». Douloureuse ascension que l'établissement d'un résultat, à cause de ce petit lemme qui résiste toujours. Alors, comme « les ailes des moulins protègent les amoureux », le mathématicien publie parfois le résultat modulo le petit lemme, c'est-à-dire sous la forme : supposons que le petit lemme soit vrai, alors le gros théorème est vrai aussi. Mais c'est une démarche insatisfaisante. Insatisfaisante parce cette douleur ascensionnelle est un mal nécessaire, nécessaire au fait que le résultat final soit un bien, un bien qui sera suffisant au mathématicien pour jouir alors de toute l'aventure. Il ne faut voir en cela nulle trace de judéochristianisme, ou de masochisme, mais plutôt le fait qu'en mathématique, le résultat arrive et s'expose *avec* sa preuve [(16)]. Sans une preuve complète, le mathématicien est en général triste, « sous le ciel sans lune, je pleure à la brune mon rêve évanoui ». Il faut le génie de Poincaré pour pouvoir fièrement passer outre une telle incomplétude, « la lune trop rousse de gloire éclabousse ton jupon plein d'trous ».

En musique, la rigueur, qui rappelons-le apparaît au début, est plutôt un bien suffisant. Suffisant à produire un matériau capable de trier dans le jeu infini des possibles, d'exhiber un chemin de composition. La forme sonate, la tonalité, la série sont de cet ordre. Ils limitent par la contrainte de façon très efficace le jeu des possibles. Leur efficacité est redoutable, mais pas universelle ; combien de sonates composée au XVIIIème siècle justement oubliées, combien de séries restées sèches musicalement, et surtout combien de fugues académiques ? Pour accéder au statut musical, il faut instiller, nécessairement, autre chose. Un autre chose à qui l'on confèrera tous les pouvoirs, tous les pouvoirs absolus, y compris celui de revenir sur, d'entamer les principes rigoureux de composition initiaux. Cet *autre chose* qui fera d'une fugue un chef d'œuvre par l'introduction d'une strette dès le début, ou fera d'une a priori banale marche funèbre un hymne infini en faisant se succéder des accords de quarte, cet autre chose n'apparaît-il pas lui-même comme une rigueur, puisque plus fort que la rigueur initiale ? Le

(16) Et c'est pour cela que lorsqu'une preuve plus courte arrive, comme nous l'avons évoqué plus haut, le résultat aussi s'en trouve changé.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

musicien s'efforçant d'ailleurs très vite d'oublier cette dernière, « un poète et une inconnue s'aimèrent l'espace d'un instant mais il ne l'a jamais revue ». Et cette nécessité musicale ne joue-t-elle pas le rôle chez le musicien de la rigueur-mal-nécessaire du mathématicien dont je parlais plus haut ?

Une inversion, encore une fois.

§ 8. — Retour aux limites du pays fertile : plaidoyer pour la musique des années cinquante.

Les musiciens, comme les artistes en prise avec le spectacle vivant en général, sont sujets (assujettis parfois) à la mode. Bien sûr pas la mode d'un public pour un compositeur de musique, disons, classique. Mais probablement celle (d'un sous-ensemble choisi) de ses condisciples. C'est vrai historiquement et c'est souvent cruel [17]. Jusqu'aux années cinquante, cette évolution se passait par transmission d'une génération à l'autre. Et c'était de bonne guerre [18].

Mais ce qui s'est passé avec la génération 1925, ces jeunes compositeurs de la tout juste après-guerre, est spécial : après voir fait table rase de leur milieu culturel contemporain, ils ont adopté la grammaire du sérialissme webernien qu'ils ont généralisé et étendu. Rien que de plus normal à ça. Mais ils ont très vite rejeté eux-même cette période-là de leur propre création. En tout cas d'une partie, celle qui était « à la limite du pays fertile ». Et comme ils étaient souvent leurs propres interprètes, en tous cas en ce qui concerne la direction d'orchestre, c'est tout un pan du répertoire, heureusement préservé par le disque, qui a plus ou moins disparu des salles de concert.

Ce pays fertile (et ses prétendues limites), c'était celui d'une rigueur extrême en musique, d'une période où l'on composait, comme l'a dit Stockhausen, « au double décimètre ». Et bien que la limite du pays fertile fut ensuite franchie par, pourrait-on dire, un « retour » au musical sensiblement audible, à une certaine souplesse acoustique, le public ne suivit pas vraiment et la musique contemporaine devint la musique jouée dans les concerts de musique contemporaine. Je ne peux imaginer autre raison à cela que l'abandon du répertoire de cette musique estampillée « années cinquante » qui a privé le public futur de cette traversée du pays fertile, jusques et y compris ses limites pénibles à dépasser. Et il, le public, en avait besoin.

Lorsqu'aux « Fêtes musicales en Touraine » de 1987, Sviatoslave Richter invita Pierre Boulez et l'EIC, ils jouèrent ensemble deux pièces de Stravinsky : le Capriccio, petit bijou du début de la période neo-classique et les Moments, œuvre sérielle de la période ultime. On pensa alors que Richter avait choisit le premier et Boulez le second. C'était en fait le contraire qui s'était produit : Richter avait voulu les Moments (comme il avait voulu auparavant le Kammerkonzert de Berg), une œuvre trop strictement sérielle pour le Boulez de l'époque, qui ne l'avait d'ailleurs jamais enregistrée (jouée ?). Le concert, auquel j'assistai, fut saisissant, Richter entrant dans les Moments avec une force, un geste et un son dénués de tout inhibition post-structuraliste. J'ai

(17) Que l'on pense au vieux Jean-Sébastien Bach à qui l'on préférait ses fils !

(18) « Fuyons, il va développer ! » Debussy après l'exposition du premier mouvement lors de la création parisienne de la quatrième symphonie de Brahms.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

su bien des années après [19] que Boulez aurait dit que, « évidemment, jouée comme Richter l'avait fait, l'œuvre prenait un sens ». Autrement dit, la rigueur pour la rigueur et pour la rigueur seulement devenait musique.

Il me semble qu'une nouvelle appropriation de la musique sérielle du type de celle des années cinquante pourrait, maintenant, nous apprendre beaucoup. Un peu comme le retour vers Rameau et Couperin fut jadis salutaire aux Debussy et autre Ravel du début du siècle dernier. En tous cas [20] la musique des années cinquante me semble rafraichissante ces jours-ci, après quelques décennies d'enivrement sonore fourni par l'audition de tant de virtuosité de timbres, rythmes et masses acoustiques créés (ou pas) grâce à l'aide de l'informatique en temps réel. Nous, les auditeurs, saturons un peu par l'abondance portée à nos oreilles depuis le début du XXIème siècle. Tout comme ont saturé les oreilles des compositeurs français au début du XXème (l'histoire se reproduirait-elle ?) à l'audition d'une certaine perversion du style classique, roborative par trop de modulations, développements et gigantisme dimensionnel.

La raison d'être de cette longue digression est la suivante. Boulez « explique » l'intérêt de l'ouverture [21] dans « Éclats »(Boulez 1965) par le fait de créer une grande tension chez les instrumentistes de l'orchestre qui ne savent, jusqu'à l'extrême dernier moment, ni la note ni quand ils doivent la jouer. On sent donc bien là une occurrence de rigueur : c'est plus la structure de la composition que les notes elles-même qui sont confiés aux interprètes, le chef qui choisit et les instrumentistes qui sont poussés à bout, transmettant pas là-même cette nervosité au public comme événement musical.

Mais ce qui se passe dans (ce moment d') « Éclats », on le retrouve en grande partie dans toute la musique de cette période lorsque on l'écoute interprétée à l'époque de sa création. Les interprètes sont alors confrontés a une grammaire totalement nouvelle, et la tension créée est bien plus grande que lors de l'interprétation de cette musique de nos jours. Il faut écouter les enregistrements d'époque [22] pour que le côté rigueur apparaisse par un côté rugueux. Écoutez le premier livre des Structures pour deux pianos de Boulez par les frères Kontarski : c'est extraordinairement, magnifiquement musical. Autant qu'est merveilleusement musical la façon dont Mozart « résout » la rigueur du développement du premier mouvement du KV 550 ou l'héroïsme [23] instrumental que demande Beethoven dans les rigoureuses variations finales de l'*op*. 55.

Dans tous les exemples mentionnés, la rigueur se révèle comme *réellement* ressentie musicalement : la rigueur des années 50 est musicale, tout comme la rigueur mathématique est esthétique.

Mais, vous avez dit réel ?

(19) Par Antoine Bonnet.
(20) Faites-en l'expérience !
(21) Pour certaines séquences de « Eclats », l'interprète (le chef) choisit au hasard (c'est-à-dire d'ailleurs, en principe, ne choisit pas,) au dernier moment, l'ordre et le début d'intervention des différents instrumentistes. On a donc bien une seule œuvre, « Eclats, dont chaque interprétation est différente »(Paul 2012). C'est ce que l'on appelle une œuvre ouverte.
(22) Et grâce au disque, nous pouvons nous permettre d'être véritablement « baroqueux » et entendre cette musique sur instrument(iste)s d'époque.
(23) Écoutez l'enregistrement de Hermann Scherchen en 1958 mentionné plus haut (les années cinquante encore) dirigeant un orchestre de l'opéra de Vienne au bord de l'apoplexie !

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 9. — Réalisme en math, philo, musique.

La musique a un statut particulier par rapport aux mathématiques et à la philosophie (un peu moins pour cette dernière) : elle se joue. Bien sûr il y a des séminaires de math et de philo, mais ce sont des échanges entre mathématiciens et des échanges entre philosophes. La musique est jouée pour des non-musiciens. De là une certaine idée peut-être de réalisme naïf : est réel ce qui est immédiatement musical. De nos jours, trop de rigueur est jugé comme non musical. Il en est de même pour l'ouverture : l'utilisation de l'aléa (pourtant si quantique en esprit (Paul 2012)) a été supplanté par l'usage de l'informatique au tournant des années soixante-dix.

En mathématiques, le débat sur le réalisme a longtemps été occupé par la fameuse alternative platonicienne : les mathématiques existent elles en tant que telles ou bien émergent-elles d'un a priori, situé quelque part, on ne sait où ? Mais la discussion sur cette alternative (stérile selon moi) a été mise à mal au cours du XXème siècle par l'apparition de méthodes de plus en plus abstraites ou au moins distantes les unes des autres pour étudier les objets mathématiques (Paul 2021, Paul 2015). Ces méthodes ont vu et fait naitre des entités « au dessus » des objets, situées sur un étage supérieur et bientôt promptes à se débarrasser de l'étage inférieur, celui a priori bien « réel » des objets. Les mathématiques ont ainsi englobé le platonisme (mathématique) pour en faire une partie d'elle même avec sa grammaire rigoureuse propre, loin (et même à l'opposé) d'un quelconque regard méta-mathématique.

Le réalisme en philosophie ouvre un champ beaucoup plus large, et tout à fait d'actualité. Traditionnellement, le réalisme philosophique veut saisir de façon indépendante de l'esprit ce qui doit être connu. Mais le concept d'indépendance vis-a-vis de l'esprit doit être individualisé selon les formes d'activité de l'esprit actives en relation avec ce que l'on considère : la réalité n'a donc pas la même forme suivant les types de connaissance en jeu. D'où la mise en cause, dans la période contemporaine, de cette conception du réel par trop naïve. Et la floraison récente de nouveaux réalismes, de doctrines et attitudes très variées : réalisme contextuel, relativisme, absolutisme,...

On voit donc apparaître dans ces trois disciplines la critique, sinon la condamnation, de formes de réalisme trop simples, trop directes, peut-être trop phénoménologiques : un réel trop strictement acoustique, un platonisme trop absolu et enfin un réalisme trop libéré de l'esprit.

Mais il ne suffit pas de supprimer ces réalismes-là pour en créer d'autres plus convenables. Encore faut-il isoler dans ces matériaux — musical, mathématique et philosophique — ce qui sera, intrinsèquement, sans être sujet à caution, le réel.

§ 10. — Rigueur = réalisme.

Et voici un membre de droite à nouveau. Et un membre de droite, juste, correct, très signifiant. Alors qu'en est-il de son « lien organique » avec la rigueur ?

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

En mathématiques, « rigueur = réalisme » est séduisant. En particulier, il permet d'évacuer le débat platonicien : que les résultats soient ou non inscrits « quelque part » n'a plus d'importance si ce qui est réel se ramène à leur démonstration. C'est aussi une vision qui rend bien réelles les « entités sans objets » mentionnées plus haut. Et puis, et surtout, les faux résultats étant souvent plus beaux que les vrais, il faut bien placer le réalisme dans leur démonstration.

Nous avons vu plus haut que la rigueur est, selon Boulez accompagnant Richter dans Stravinsky, réellement musicale. Et ce dans la « pire » des périodes où ce fait ait été contesté. Injustement d'ailleurs, car que dire de ces musiques du XIVème siècle où les rythmes étaient composé avant que ne le soient les lignes mélodiques ? Bien sûr, une jolie mélodie peut-être musicale, mais à elle seule elle ne peut pas donner un mouvement de symphonie. Mais elle peut suffire musicalement à une chanson, c'est-à-dire un morceau court où le texte chanté a autant d'importance que la musique. Dans les pages de grande envergure, c'est la rigueur que l'on entend. C'est aussi la rigueur qui est universelle, indépendante de la qualité des instrumentistes, de l'interprétation, de la qualité sonore de l'enregistrement [(24)].

Et c'est avec la rigueur que l'on pense en philosophie. Voyons de plus près l'incidence de ceci sur le réalisme en philosophie. Nous l'avons déjà évoqué, dans la période contemporaine celui-ci est multiple. Mais c'est évidement du côté du réalisme contextuel, ou plutôt dans sa direction comme nous allons le voir, qu'il faut chercher une idée qui nous rapproche de la situation musicale et mathématique. En effet, contexte il y a lors de la création d'une œuvre musicale dans un contexte de rigueur avancée telle que le sérialisme dont nous avons déjà parlé. Mais sérialisme de quoi ? Très vite les séries de notes (hauteurs) vont suggérer les séries de rythmes, les séries de timbres, un esprit sériel d'appropriation du temps dans sa dimension allant du microscopique (le timbre) au macroscopique (l'œuvre musicale) chez Stockhausen (Stockhausen 1987). Un sérialisme contextuel délocalisé, impossible à fixer, à attacher à quoi que ce soit. Et contexte il y a aussi, on pourrait presque dire « et seulement contexte », dans ses entités mathématiques sans objet universel, platonicien, sous-jacent. Un contexte presque sans contexte en quelque sorte, un contexte qui n'habite ni ne peut (plus) habiter nulle part, l'étage inférieur ayant disparu. Exactement comme est sans adresse, et même sans possibilité d'en avoir, la vision du réalisme contextuel par Jocelyn Benoist (Benoist 2019, Benoist 2011). Un réel intrinsèquement contextuel — par là même strictement opposé à, et donc à même de remplacer, l'indépendance de l'esprit du réalisme naïf — mais aussi, et c'est le plus important pour nous, résolument non-spéculatif, c'est-à-dire rigoureux, proche si ce n'est l'analogue, justement par sa rigueur indéfectible, du réalismes musical et mathématique que nous venons d'essayer de construire.

(24) Je trouve d'ailleurs que le baroquisme fait ressortir cela cruellement pour les œuvres faibles et justement oubliées du baroque dont l'intérêt ne dépassent pas l'attrait jouissif d'une interprétation ostensiblement colorée et estampillée « baroque ». Les autres, elles, qu'on préfèrent ou pas les écouter sur instruments et dans le style modernes ou (prétendument) historiques, n'en ont pas moins été jouées, écoutées et diffusées pendant des décennies sans nul besoin d'idéologie baroquisante.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

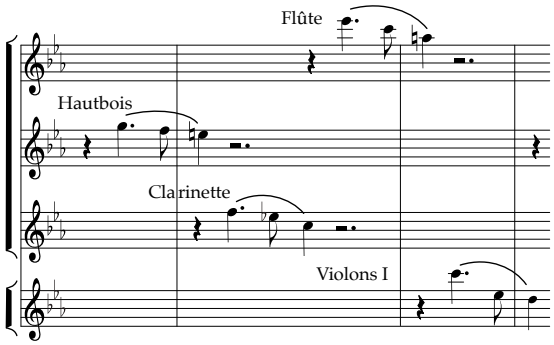
Les trois disciplines dont nous venons de parler ont en commun un côté disons abstrait, un côté premier plutôt. Premier comme une philosophie première, comme quelque chose d'a priori. Les mathématiques non seulement vivent d'elles-même mais elles s'exportent, s'appliquent par exemple aux sciences *mathématisées*. La musique est un art qui s'exporte aussi vers le cinéma, le théâtre, la radio, la poésie (via la chanson). Quant à la philosophie, que fait-elle d'autre qu'aider toutes les autres disciplines à penser ?

Ces trois disciplines ouvrent par ailleurs tout un champ naïf de conceptions du réalisme. L'alternative platonicienne pour les mathématiques, la co-présence d'une partition écrite et d'un concert joué pour la musique et enfin un réel que l'on voudrait appréhender sans avoir l'air d'y toucher pour la philosophie. Et l'on pourrait en citer bien d'autres.

Mais ce qui reste universel dans le réalisme commun aux trois c'est bien la rigueur, rigueur de la démonstration, de la composition et de la pensée.

Prenons pour finir un dernier exemple musical, puisque, au fond, c'est bien la musique qui nous guide dans tout ce texte. Les mesures 45 à 49 du premier mouvement de l'héroïque de Beethoven, *op*. 55 (Beethoven 1805).

Figure XI.1. *Héroïque* de Beethoven, *op.* 55.



Qu'entendons nous réellement dans ce passage, parfaite réalisation de Klangfarbenmelodie plus d'un siècle avant l'*op*. 16 de Schönberg (Schönberg 1909). Un hautbois, puis une clarinette, une flute et enfin des violons ? Non. Un brin de mélodie, de rythme plutôt, répété quatre fois par quatre instruments différents dont chaque timbre attirerait pour soi-même notre oreille ? Non. Ce que nous entendons, c'est une mélodie dans un nouvel espace « abstrait » où chaque note est ce brin de mélodie et la « hauteur » est le timbre de l'instrument. Et peu importe ce que sont ces timbres : changer de timbre reviendrait à transposer comme on change les hauteurs, peu importe le brin, comme peu importe d'avoir des noires ou des croches. Ce que nous entendons réellement, c'est ce nouveau paradigme d'espace musical inventé par Beethoven dans sa rigueur de compositeur expérimental, et qui sera retrouvé par Schönberg et alors intronisé au rang de rigueur compositionnelle établie.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

§ 11. — La rigueur est une histoire de réalisme : l'exemple de la mécanique quantique.

« Qu'est-ce qui est réel ? » se demandait en 1960 Schrödinger dans un article célèbre. La question du réalisme n'a cessé depuis 1925 (presque'un siècle) d'embarrasser abusivement la théorie physique la plus précise que l'histoire des sciences ait connue, à grands coups de prétendus paradoxes et autres manques de confrontation à l'observation expérimentale.

Or, rappelons-le, il n'y a aucun paradoxe en mécanique quantique dès lors que l'on se réfère à ses axiomes (dits de l'école de Copenhague et en fait établis par John von Neumann (Paul 2007, Paul 2009)) exprimés dans le langage quantique mathématique, strictement.

De plus, signalons pour ceux qui ne le sauraient pas encore, que toutes les *Gedankenexperiment* des pères fondateurs et de ceux qui les ont suivis ont été réalisées expérimentalement et ont toutes donné raison au formalisme de Copenhague.

D'où vient donc (le problème de) tant de résistance face à une théorie si bien établie dans son formalisme (bien mieux que ne l'est la dynamique classique) et tellement bien en accord avec l'expérience ?

La première raison qui vient à l'esprit est bien sûr le conservatisme. Le changement de paradigme est tel que les penseurs classiques n'y retrouvent pas leurs petits. Et l'on essaie d'expliquer, d'interpréter la mécanique quantique avec le vocabulaire classique, et là les paradoxes arrivent. On a beau changer les noms (le quanton), les images classiques perdurent, qui ruinent une approche directe du formalisme. Tout cela a longtemps semblé, au fond, encore une fois, de bonne guerre. Une espèce de philosophie réactionnaire devant un nouveau « Eppur si muove ! » [(25)].

Mais tout de même, un siècle après ! Il ne peut pas ne pas y avoir une autre explication à cette floraison journalière d'idées de torture de l'animal domestique préféré du docteur Schrödinger.

Il me semble que l'explication de ce mal-amour du quantique vient de ce que le tournant épistémologique de 1925 est une nouvelle révolution copernicienne, alors que l'on continue à appréhender le quantique à l'aune de la première. Si Copernic-Galilée-Newton nous disent que la nature s'écrit dans la langue mathématique, on garde la possibilité de la lire dans la langage réaliste de tous les jours. Les étoiles sont comme des vers luisants dans la nuit, leurs trajectoires sont semblables à des dessins sur un tableau et les masses différentes qui tombe(raie)nt à la même vitesse d'une tour mal construite sont des cailloux et des plumes. Tous objets communs de la praxis prè-Copernicienne.

C'est ce réalisme-là qui fait totalement défaut au quantique. Plus exactement, il faudrait au quantique un imaginaire réaliste, un « comme si », si cher a Bachelard (Bachelard 1966), référant à la physique classique. Mais rien n'y fait depuis un siècle : Heisenberg ne peut pas rentrer dans le costume trop petit de Kant. Et si l'on essaie d'habiller Kant avec le costume trop grand de Heisenberg,

(25) « Et pourtant, elle tourne ! »

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

le pauvre Imanuel doit se contorsionner horriblement pour que le costume de Werner lui « tombe » bien [(26)].

Il faut donc se rendre à l'évidence : il n'y a pas pour la mécanique quantique d'imaginaire réaliste naïf « hors quantique ». Donc pas de « comme si », comme il y en a tant en mathématiques récentes (Paul 2015) — et l'esprit de Bachelard de nous indiquer la direction vers la nouvelle étape, celle d'un « pourquoi pas ». Alors pourquoi pas des univers parallèles, des principes de relativité, des théories de la double solution ondes pilotes et autres interprétations ontologique et causale à la « deBB » (hélas pas « de BB », ça serait plus agréable !). Pourquoi pas ? Et bien parce que si les manches du costume de Heisenberg cachent les mains de Kant, elles tombent à merveille sur les poignets de Heisenberg. L'axiomatique de Copenhague sied parfaitement à la mécanique quantique, pas un seul pli inopportun, pas un seul fil qui dépasse, pas une retouche à faire. C'est normal, il n'y a pas eu de patron, pas de modèle : telle une robe de Marlène Dietrich, il a été cousu sur elle. Nul besoin de l'élargir, le formalisme mathématique dit tout. Et il dit tout à tout le monde, pas seulement aux mathématiciens, pas seulement aux physiciens : sa « gigantesque » simplicité lui permet d'être accessible à tous (Paul 2007, Paul 2009, Paul s.d.).

Car dire que « la mathématique s'identifie purement et simplement à son formalisme et n'est rien au-delà de lui » (Benoist-Paul 2012), ne veut pas dire que le formalisme mathématique en soi ne puisse être quelque chose au delà de lui-même. Grâce à sa rigueur, justement. Et que l'on ne pense pas là que ce formalisme est formel, c'est-à-dire dépourvu de sens, les mathématiques présentes dans l'axiomatique de Copenhague sont, pour la plupart d'entre elles, nées de la physique quantique, leur réalisme est contextuellement, entre autres, quantique [(27)]. On voit bien là le début d'une chaine logique qu'il convient de terminer. Plus précisément, von Neumann a bâti l'axiomatique de Copenhague à partir du réalisme quantique bancal du début de la mécanique quantique. Bancal parce que classiquement contextualisé. Et l'immense découverte de von Neumann fut de découvrir que cette « bancalité » disparaissait dans une formulation en quatre simples axiomes mathématiques. Mais attention !, quatre axiomes dont la puissance venait de leur cohérence parfaitement rigoureuse logiquement. Qu'un seul axiome, même exhibé dans une situation particulièrement extrême, même pernicieusement extrême, vienne à mordre la queue de l'un des autres membre du quatuor, patatras, tout s'effondrerait alors, immédiatement [(28)]. Et c'est cette rigueur, indiscutable, qui permet au formalisme mathématique de von Neumann de réintégrer la place du réalisme quantique initialement bancal dont il était issu. C'est ce réalisme scandinave que, rappelons-le, on observe maintenant tous les jours dans les

(26) Tout comme dans le sketch célèbre du tailleur de Fernand Raynaud (https://www.youtube.com/watch?v=lX7dtki8EvY, 9:00). Et la conclusion, cruelle, est la même : les gens qui voient Kant contorsionné portant un costume qui lui va si bien pensent : « Vu comme il est foutu, il doit avoir un sacré tailleur ! ». Et l'épistémologue tailleur de costumes de remporter le paquet.

(27) Il suffit pour s'en apercevoir de ne pas oublier qu'elles ont été formalisées par un von Neumann qui, après s'être intéressé aux fondements des mathématiques « à la Hilbert », s'en est très vite éloigné dès la naissance du Théorème de Gödel et n'a cessé dès lors de, au fond, (re)fonder les mathématiques depuis le réel (certains diront pour le meilleur et pour le pire).

(28) Entrez dans l'axiomatique de Copenhague vous verez comment, par exemple, la si décriée réduction du paquet d'onde est nécessaire à l'axiome de la mesure, afin que le résultat d'une nouvelle mesure infiniment proche en temps, redonne bien le même résultat (Paul 2007, Paul 2009).

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Gedankenexperiment, qui assure la stabilité de la matière, qui viole les inégalités de Bell... la liste est longue. Et c'est bien la rigueur-réalisme quantique qui assure la réalité du cryptage quantique, tellement plus sûr que son géniteur classique, qui développe l'information quantique, qui nous permettra peut-être un jour d'enfermer la complexité d'une môle de gaz dans un ordinateur quantique à seulement cent (qu)bits [(29)].

Qu'on le veuille ou non, un électron est un espace vectoriel et l'état dans lequel il est est un élément de cet espace. Tout comme deux électrons sont le carré *tensoriel* de l'espace précédent. Et c'est la rigueur de la construction tensorielle, universelle d'ailleurs, qui assure, qui est l'émergence de l'intrication, ce mal responsable de tous les maux du réalisme bancal primitif qui est devenu au fil des ans un bien réel incontournable de la mécanique quantique, de notre monde.

On le voit, il n'y a de réel en mécanique quantique que son formalisme mathématique, formalisme que l'on ne peut chercher à interpréter extérieurement, qui est sa propre interprétation.

Qu'est-ce qui est réel en mécanique quantique ? La rigueur de son formalisme mathématique.

§ 12. — Bibliographie.

Bachelard G. (1966). « La philosophie du non, Essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique ». Les Presses universitaires de France, Paris.

Beethoven L. van (1802). Sonata quasi una fantasia, *op*. 27, n° 1, Gio. Cappi e Comp., Vienne.

— (1805) Sinfonie n° 3 (Es-Dur), *op*. 55, Stimmen, Bureau des Arts et d'Industrie, Vienne.

Benoist J. (2011). « Éléments de philosophie réaliste », Vrin, Paris.

— (2019) « L'adresse du réel », Vrin, Paris.

Benoist J. et Paul T. (2012). « Pour une phénoménologie du formalisme mathématique », dans « Dynamique du formalisme mathématique » (**Benoist J. et Paul T.** éds) Hermann. Paris.

Boucourechliev A. (1983). « Stravinsky », Fayard, Paris.

Boulez P. (1965). « Éclats », Universal, Vienne.

Brahms J. (1892). 3 Intermezzi, *op*. 117.

Chopin F. (1839). Vingt-quatre préludes, *op*. 28, Paris et Leipzig.

Paul T. (2007). « La mécanique quantique vue comme processus dynamique », dans « Logique, dynamique et cognition » (dir. J.-B. Joinet), collection « Logique, langage, sciences, philosophie », Publications de la Sorbonne, Paris.

(29) Tout simplement parce que si cent bits classiques contiennent deux cents ($= 2 \times 100$) informations différentes, cent qubits en contiennent 1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376 ($= 2^{100} \sim 1,2610^{30}$), un nombre largement supérieur au nombre d'Avogadro 602 214 076 000 000 000 000 000 $\sim 6.10^{23}$.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2021

— (2009). « À propos du formalisme mathématique de la Mécanique Quantique », dans « Logique et Interaction : Géométrie de la cognition » Actes du colloque et école thématique du CNRS « Logique, Sciences, Philosophie » à Cerisy, Hermann, Paris.

— (2012). « Des sons et des quanta », dans « Mathématique / Musique / Philosophie » (**Alunni C., Andreatta M. et Nicolas F.**, éds), Collection « Musique / Sciences », IRCAM-Delatour.

— (2014). « Rigueur-contraintes : mathématiques-musique », Gazette des Mathématiciens 139, p. 71–77.

— (2015). « Le presque, le non, l'anti et la rigueur », dans « Le presque » (**Benoist J. et Paul T.** éds) Hermann, Paris.

— (2021). « Mathematical entities without objects — On the realism in mathematics and a possible mathematization of the (non)platonism », Proceedings of the conference « Symmetry, Proportions and Seriality », European Review 29 (2).

— « La description quantique de la réalité physique peut-elle être considérée comme incomplète », en préparation.

Poincaré H. (1912) « Sur la théorie des quanta », J. de Physique théorique et appliquée, 5^{e} série, 2, p. 5–34.

Schönberg A. (1909). « Fünf Orchesterstücke », *op*. 16, Peters, Leipzig.

Stockhausen K. (1987). « ...wie die Zeit vergeht... », die Reihe, **3**, 1957. Traduction française « ...comment passe le temps... », Analyse musicale 6, 1987.

Stravinsky I. (1958–1959). « Movements » pour piano et orchestre, Boosey and Hawkes.

www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2021

© Spartacus-Idh 2021

Déjà parus
Visions des sciences — Hermann

Bailly, F., Longo., G. *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant.* Paris, 2006.

Girard, J. - Y. *Le Point Aveugle I : Vers la Perfection.* Paris, 2006.

Girard, J. - Y. *Le Point Aveugle II : Vers l'Imperfection.* Paris, 2007.

Franceschelli, S., Roque, T., Paty, M. *Chaos et systèmes dynamiques : Eléments pour une épistémologie.* Paris, 2007.

Ricard, J. *Pourquoi le tout est plus que la somme de ses parties.* Paris, 2008.

Collectif. *Ouvrir la logique au monde. Philosophie et mathématique de l'interaction.* Édité par J.-B. Joinet et S. Tronçon. Paris, 2009.

Bächtold, M. *L'interprétation de la mécanique quantique. Une approche pragmatiste.* Paris, 2009.

Malaterre, C. *Les Origines de la vie : émergence ou explication réductive ?* Paris, 2010.

Barbara, J. - G. *Le Paradigme neuronal : De la Physiologie expérimentale à la cognition.* Paris, 2010.

Varenne, F. *Formaliser le vivant : Lois, théories, modèles ?* Paris, 2010.

Collectif, *La Transdisciplinarité. Comment explorer les nouvelles interfaces.* Édité par C. Debru. Paris, 2011.

Kauark-Leite, P. *Théorie quantique et philosophie transcendantale : dialogues possibles.* Paris, 2012.

Cavazzini, A. *Signes, formes, gestes : Études sur les régimes symboliques des sciences.* Paris, 2012.

d'Alessio, P. *et al.* *La sinuosité du vivant.* Paris, 2012.

Fraisopi, F. *La Complexité et les Phénomènes. Nouvelles ouvertures entre science et philosophie.* Paris, 2012.

Lanciani, A. A. *Analyse phénoménologique du concept de probabilité.* Paris, 2012.

Poinat, S. *Mécanique quantique. Du formalisme mathématique au concept philosophique.* Paris, 2014.

Gualandi, A. *L'Œil, la main et la voix.* Paris, 2014.

Gens, H. *Jakob von Uexküll, explorateur des milieux vivants.* Paris, 2014.

Miquel, P. - A. *Sur le concept de Nature.* Paris, 2015.

Benoist, J., Paul. T. *Le Presque.* Paris, 2015.

Bitbol, M. *La pratique des possibles.* Paris, 2015.

Cavazzini, A. *Sciences de la vie, mathesis, infini.* Paris, 2016.

Lestocart, L. - J. *Esthétique de la complexité – Pour un cognitivisme non-linéaire.* Paris, 2017.

© Spartacus-Idh 2021 www.spartacus-idh.com

Nouvelles visions des sciences — Spartacus Idh

Longo, G. (éd.) *Lois des dieux, des hommes et de la nature.* Paris 2017.

Séguy-Duclot, A. *Généalogie des mathématiques.* Paris 2019.

Charaud, N. *Georg Cantor – Infini et inconscient.* Paris 2019.

Bouleau, N. *Introduction à la philosophie des sciences.* Paris 2020.

Cantor, G. *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, notes et préface de F. Zalamea, Paris 2020.

André, Y. *Dix regards sur la mathématique contemporaine.* Paris 2021.

Paul T., Schmidt M. (éds) *Rigueur.* Paris 2021.

Vulpiani, A. *Hasard, probabilité et complexité.* Paris 2021.

© Spartacus-Idh 2021

www.spartacus-idh.com

N° d'édition : web-1
Dépôt Légal : juin 2021
Achevé d'imprimer : juin 2021

Imprimé en France par

AQUIPRINT

33520 Bruges
www.impression-edition-gironde.com