Invariants, cohomologie et représentations fonctorielles des groupes algébriques

Cours Peccot, Collège de France

Antoine Touzé

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Spartacus Supérieur
Collection Les cours Peccot
dirigée par Pierre Cartier

Invariants, cohomologie et représentations fonctorielles des groupes algébriques

Cours Peccot, Collège de France

Antoine Touzé

Mars–avril 2010

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Spartacus IDH

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

⋆ ⋆

ISBN : 978-2-36693-092-4
© Spartacus-idh, Paris 2022

Avant-propos

Ce livre contient les notes d'une série de quatre leçons données au Collège de France en mars–avril 2010, au titre du Cours Peccot.

Le cours traite des liens entre la théorie classique des invariants, la cohomologie des groupes algébriques et la théorie des foncteurs strictement polynomiaux. Un des résultats centraux du cours est la démonstration de la conjecture de W. van der Kallen, selon laquelle la cohomologie des groupes algébriques réductifs définit des algèbres *de type fini*.

Le cours a été en partie pensé comme une introduction au sujet, il en contient donc les définitions et les exemples basiques. Il contient bien sûr les résultats principaux et les idées essentielles de leurs démonstrations, mais admet parfois certains détails techniques.

La théorie des foncteurs strictement polynomiaux a nettement progressé depuis l'année 2010. En particulier, les connexions esquissées dans le cours entre les calculs d'extensions du chapitre 3 et les classes universelles du chapitre 6 se sont concrétisées quelques années plus tard, par la démonstration d'une formule générale pour les calculs de cohomologie du groupe linéaire impliquant la torsion de Frobenius [3, 32, 33]. Cette formule a ensuite été généralisée aux autres groupes classiques [25, 34]. Quelques notes de bas de page ont été ajoutées au contenu originel du cours pour mentionner ces développements ultérieurs. Nous renvoyons le lecteur à la partie d'exposition de l'article [34] pour un survol détaillé de ces progrès récents.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Preface

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Eric M. Friedlander

Following a very helpful introduction, Antoine Touzé offers the reader a remarkably clear introduction to group schemes, representations, and cohomology. This provides the background necessary to explain in detail the statement and proof of the very impressive theorem of Touzé and Wilberd van der Kallen about the G-invariants of cohomology algebras $H^*(G,A)$. This theorem gives necessary and sufficient conditions for the G-invariants of the cohomology algebra $H^*(G,A)$ to be finitely generated for any affine group scheme G and any finitely generated, rational G-algebra A over a field k.

The vector space of *invariants* of the action of a group G acting on a k-vector space V is the subspace $V^G \subset V$ consisting of those vectors $v \in V$ with the property that $g \circ v = v$ for all $g \in G$. The determination of such invariants is one of the oldest and most studied problems in algebra. Of particular interest is the situation in which the vector space V is the underlying additive structure of a commutative k-algebra A with the action of G on A respecting the multiplicative structure of A. In the late 19th century, David Hilbert revolutionized the study of invariants by showing in certain cases that if A is finitely generated then A^G is finitely generated; in other words, if one can find finitely many elements $a_1,\dots,a_n \in A$ such that every element of A can be written as a sum of products of these elements a_i, then there exist finitely many elements $b_1,\dots,b_N \in A^G \subset A$ such that such that every element of A^G can be written as a sum of products of the elements b_j. Indeed, this troubled many of Hilbert's contemporaries for he proved an abstract property by abstract means in great generality rather than explicitly working out more and more examples.

Hilbert's 14th problem asked whether or not A^G is finitely generated whenever A is finitely generated. The answer is "often yes, but not always". If for a given G the answer to Hilbert's problem is affirmative (*i.e.*, A^G is finitely generated for an arbitrary finitely generated A-module with rational G-action), then we say that G has the finite generation property. Cohomology of groups enters the picture since A^G is the 0-th cohomology group, $H^0(G,A)$, of G with coefficients in A. Scattered examples suggested to van der Kallen that if $H^0(G,A)$ is finitely generated then so must be the entire cohomology algebra $H^*(G,A)$.

Not only did van der Kallen formulate the plausible conjecture that the finite generation property for a given group G implies the finite generation of $H^*(G,A)$ for all finitely generated commutative G-algebras, he also provided a sketch of proof inspired by earlier

work of Andrei Suslin and myself as well as a filtration introduced by Frank Grosshans. The essential missing step in that sketch was a demonstration of required "universal cohomology classes". For several years, van der Kallen suggested to me that I try to construct such classes using "strict polynomial functors", generalizing my earlier work with Suslin. Following consideration of bifunctor cohomology by Vincent Franjou (Touze's PhD advisor) and myself, Touzé did succeed in constructing these classes. Touze describes his construction in detail in the final chapter of this text, a construction entailing great ingenuity and much complexity.

Following Touzé's construction, Touzé and van der Kallen proved van der Kallen's conjecture as formulated below in Theorem 5.7 in the text. The proof involves many techniques and concepts from representation theory, homological algebra, and category theory, all of which Touzé explains clearly. Thus, this text can serve as an introduction to group schemes and their representations, Frobenius twists, and especially functor cohomology. The reader will learn how remarkable computations of cohomology groups are enabled by functor cohomology.

The mathematics described here has led Touzé and others to further computations in algebra and algebraic topology. We look forward to many further applications to follow.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

Table des matières

Avant-propos *v*

Preface *vii*

1 **Chapitre 1**
Introduction générale du cours

1 — Les groupes linéaires algébriques et leurs représentations *1*
2 — La théorie classique des invariants *3*
3 — Des points fixes à la cohomologie *5*
4 — Les problèmes abordés dans le cours *7*

9 **Chapitre 2**
Les schémas en groupes et leur cohomologie

1 — Schémas en groupes algébriques affines *9*
2 — Représentations et cohomologie *11*
3 — Exemples lorsque $\Bbbk$ est algébriquement clos *14*
4 — L'exemple des groupes finis *15*
5 — Changement de base *16*
6 — Les bonnes filtrations *17*

21 **Chapitre 3**
Cohomologie de GL_n et représentations fonctorielles

1 — Motivations, le rôle de la torsion de Frobenius *21*
2 — Les foncteurs strictement polynomiaux *23*
2.1 — Rappels sur les polynômes *23*
2.2 — Foncteurs et morphismes de foncteurs *25*
2.3 — Petit catalogue d'exemples *26*
2.4 — Construction de représentations *29*
2.5 — Décompositions selon le degré *30*
3 — Extensions de foncteurs et cohomologie de GL_n *33*
3.1 — Le schéma en monoïdes des matrices carrées *34*
3.2 — Représentations polynomiales de GL_n *35*
3.3 — Représentations polynomiales et algèbres de Schur *36*
3.4 — Des foncteurs aux algèbres de Schur *38*
4 — Calculs d'Ext dans $\mathscr{P}_\Bbbk$ *41*
4.1 — Quelques outils de calcul dans $\mathscr{P}_\Bbbk$ *41*
4.2 — Une formule de M. Chałupnik *44*

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

49 **Chapitre 4**
Cohomologie des groupes classiques

1 — Énoncé du théorème 49
2 — Surjectivité en degré 0 et théorie classique des invariants 51
2.1 — Les théorèmes fondamentaux 51
2.2 — Cup produits en cohomologie 52
2.3 — Démonstration de la surjectivité 53
3 — Démonstration de l'injectivité en degré 0 53
3.1 — Une approche avec le deuxième théorème fondamental 53
3.2 — Une approche avec le lemme de Yoneda 54

57 **Chapitre 5**
La conjecture de W. van der Kallen

1 — Introduction 57
2 — Guide pour la preuve du théorème 5.7 59
2.1 — L'architecture de la démonstration 59
2.2 — Utilisation des suites spectrales 60
2.3 — Morphismes noethériens et torsion de Frobenius 62
2.4 — Poids d'une représentation de GL_n 63
3 — Réduction à GL_n sur un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle (étape 1) 65
4 — La filtration de Grosshans (étape 2) 66
4.1 — La filtration de Grosshans 66
4.2 — La suite spectrale de Hochschild-Serre 67
4.3 — Cohomologie du gradué de Grosshans 68
5 — Retrait du gradué de Grosshans (étape 3) 70
5.1 — La suite spectrale de la filtration de Grosshans 70
5.2 — Stratégie de résolution du problème 5.31 72
5.3 — Construction de Φ_{VdK} et classes universelles 74

77 **Chapitre 6**
Construction des classes universelles

1 — Les complexes de Troesch 78
2 — Résolutions injectives des foncteurs composés 80
2.1 — Une approche naïve du problème 6.1 80
2.2 — Résolutions compatibles à la torsion de Frobenius 81
2.3 — L'exemple des puissances divisées 84
3 — Construction des classes universelles 86
3.1 — Des résolutions explicites 86
3.2 — La classe $c[1]$ et le cycle z_1 87
3.3 — Construction des classes $c[d]$ et des cycles z_d, $d \geqslant 2$ 87
3.4 — Compatibilité des classes $c[d]$ au cup produit 88

Index 95

Index des notations 97

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Chapitre 1

Introduction générale du cours

L'objectif de ce cours est de décrire des résultats récents sur la cohomologie d'un groupe algébrique G à coefficients dans une représentation M. Ces méthodes mettent en jeu des relations entre trois théories.

1. La théorie classique des invariants, développée aux XIX^e et XX^e siècles.
2. La cohomologie des groupes algébriques, introduite par Hochschild en 1961 [18].
3. Les représentations fonctorielles, dans l'approche initiée par Friedlander et Suslin en 1997 [13].

Dans la suite de ce chapitre d'introduction générale du cours, nous supposons pour simplifier que $\Bbbk$ est un corps algébriquement clos. Les trois premières sections rappellent des définitions basiques du sujet et des éléments du contexte historique et scientifique. La quatrième section précise les problèmes abordés dans le cours.

1 Les groupes linéaires algébriques et leurs représentations

Si V et W sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\Bbbk$, une application $P : V \to W$ est appelée *polynôme* si on peut trouver une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V, une base $(f_1, \dots, f_q)$ de W, et des polynômes P_j, $1 \leqslant j \leqslant q$, à n variables et à coefficients dans $\Bbbk$, tels que pour tout élément $x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i e_i$ de V on a :

$$P(x) = \sum_{j=1}^{q} P_j(x_1, \dots, x_n) f_j \, .$$

Définition 1.1.

Soit $M_n(\Bbbk)$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\Bbbk$. On appelle *groupe linéaire algébrique sur* $\Bbbk$ tout sous-groupe G de $M_n(\Bbbk)$ tel qu'il existe un polynôme $P : M_n(\Bbbk) \to \Bbbk^q$ tel que $G = P^{-1}(0)$.

Exemples 1.2. Les groupes de matrices suivants sont des groupes linéaires algébriques.

1. Les groupes classiques : groupes spéciaux linéaires $SL_n(\Bbbk)$, groupes symplectiques $Sp_n(\Bbbk)$, groupes orthogonaux $O_n(\Bbbk)$. Ils sont naturellement définis comme lieu d'annulation d'un polynôme.
2. Les groupes finis. Tout groupe fini peut se réaliser comme un groupe de matrices $n \times n$, avec $n = \operatorname{card} G$. Comme tout sous-ensemble fini de $M_n(\Bbbk)$ il peut alors s'écrire comme lieu d'annulation d'un polynôme.
3. Le groupe additif $(\Bbbk, +)$, qu'on interprète comme l'ensemble des matrices 2×2 de la forme :
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Bbbk.$$
4. Le groupe $\mathrm{GL}_{n-1}(\Bbbk)$ n'est pas défini comme le lieu d'annulation d'un polynôme si on y pense comme un groupe de matrices $(n-1) \times (n-1)$. On peut toutefois le voir comme un groupe linéaire algébrique si on l'interprète comme l'ensemble des matrices $n \times n$ de la forme :
$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \det M \end{bmatrix}, \quad M \in \mathrm{GL}_{n-1}(\Bbbk).$$

Définition 1.3.

Une application $f : G \to H$ entre deux groupes linéaires algébriques $G \subset M_n(\Bbbk)$ et $H \subset M_q(\Bbbk)$ est dite *régulière* si f est la restriction d'un polynôme $P : M_n(\Bbbk) \to M_q(\Bbbk)$.

Rappelons qu'une représentation d'un groupe G est un espace vectoriel V sur $\Bbbk$, muni d'une action $\cdot : G \times V \to V$ qui est linéaire (c'est à dire que pour tout $g \in G$, $g \cdot : V \to V$ est une application $\Bbbk$-linéaire). De manière équivalente, une représentation de G est un couple (V, ρ_V) où V est un espace vectoriel sur $\Bbbk$ et $\rho_V : G \to \mathrm{GL}_{\Bbbk}(V)$ est un morphisme de groupes. Souvent on omet ρ_V et on note juste V. Une sous-représentation de V est un sous espace vectoriel stable sous l'action de G.

Définition 1.4.

Soit V une représentation d'un groupe linéaire algébrique.

1. Supposons $\dim_{\Bbbk} V < +\infty$. On dit que V est une *représentation rationnelle* de G si ρ_V est une application régulière.
2. Supposons $\dim_{\Bbbk} V = +\infty$. On dit que V est une *représentation rationnelle* de G s'il existe un ensemble de sous-représentations rationnelles V_α de dimensions finies telles que $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$.

Exemples 1.5. Soit G un sous-groupe linéaire algébrique de $M_n(\Bbbk)$. Les représentations suivantes sont des représentations rationnelles de G.

1. L'espace vectoriel $\Bbbk^n$ muni de l'action de $g \cdot v = g(v)$, c'est-à-dire de l'action donnée par la multiplication matricielle.
2. Soit V une représentation rationnelle de G, et $\Bbbk[V]$ l'ensemble des polynômes

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

$P : V \to \Bbbk$. Alors G agit rationnellement sur $\Bbbk[V]$ par la formule

$$(g \cdot P)(v) = P(g^{-1} \cdot v).$$

3. Soit $\Bbbk[G]$ l'ensemble des applications régulières $G \to \Bbbk$. Alors G agit rationnellement sur $\Bbbk[G]$ par la formule $(g \cdot f)(h) = f(g^{-1}h)$.

2 La théorie classique des invariants

Soit A une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini. Soit G un groupe quelconque qui agit sur A par automorphismes d'algèbres (c'est-à-dire pour tout $g \in G$, $g\cdot : A \to A$ est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres). On peut alors former la sous-algèbre A^G des points fixes de A sous l'action de G :

$$A^G = \{a \in A \mid \forall g \in G \; g \cdot a = a\}.$$

La théorie classique des invariants concerne l'étude des propriétés de l'algèbre A^G. L'exemple suivant donne une façon très élémentaire de construire une vaste gamme d'actions sur des algèbres commutatives de type fini, dont les algèbres d'invariants peuvent être difficiles à étudier.

Exemple 1.6. Soit V un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action linéaire de G. Les polynômes $V \to \Bbbk$ forment une algèbre commutative de type fini $\Bbbk[V]$, et l'action de G sur $\Bbbk[V]$ définie par $(g \cdot P)(v) = P(g^{-1} \cdot v)$ est une action par automorphismes d'algèbres.

Nous n'avons pas pour l'instant imposé que G soit un groupe linéaire algébrique. Le lemme suivant montre que les groupes linéaires algébriques apparaissent naturellement lors de l'étude des algèbres d'invariants. On rappelle que les sous-ensembles de $M_n(\Bbbk)$ qui s'obtiennent comme lieu d'annulation de polynômes forment une topologie sur $M_n(\Bbbk)$, dite topologie de Zariski. Un exercice de topologie élémentaire montre que si H est un sous-groupe de $M_n(\Bbbk)$ contenu dans $SL_n(\Bbbk)$, sa fermeture $\overline{H}$ pour la topologie de Zariski est encore un groupe.

Lemme 1.7. Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et G un sous-groupe de $SL(V)$. Alors $\overline{G}$ agit rationnellement sur $\Bbbk[V]$ par automorphismes d'algèbres, et on a

$$\Bbbk[V]^G = \Bbbk[V]^{\overline{G}}.$$

Dans la suite, G désigne un groupe linéaire algébrique, agissant sur une algèbre commutative de type fini A. On cherche à étudier les générateurs de la $\Bbbk$-algèbre des invariants A^G. Une première question naturelle à se poser est de savoir s'il existe une famille finie de générateurs. Ce n'est pas automatique, il est facile de produire des exemples d'algèbres de type fini ayant des sous-algèbres qui ne sont pas de type fini.

Exemple 1.8. Soit $A = \Bbbk[x, y]$ et soit B le sous-espace vectoriel de A engendré par les monômes $x^i y^j$, $i \geqslant 1$, $j \geqslant 1$. Alors B est une sous-algèbre de A qui n'est pas de type fini.

Le théorème suivant est à peu de choses près le théorème démontré par Hilbert en 1890 [17], et qui fit sensation à son époque autant par l'originalité des méthodes mises en oeuvre pour sa démonstration que par la généralité de l'énoncé.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Théorème 1.9 (Hilbert).

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre commutative de type fini, munie d'une action rationnelle de $SL_n(\mathbb{C})$ par automorphismes d'algèbres. Alors la $\mathbb{C}$-algèbre d'invariants $A^{SL_n(\mathbb{C})}$ est de type fini.

Le *quatorzième problème de Hilbert* (1900) s'intéresse à la généralisation du théorème 1.9. Reste-t-il valable si $SL_n(\mathbb{C})$ est remplacé par un groupe linéaire algébrique quelconque ? Reste-t-il valable si le corps $\mathbb{C}$ est remplacé par un corps algébriquement clos quelconque ?

La réponse au quatorzième problème de Hilbert est négative. En 1958, M. Nagata a construit [23] un contre-exemple qui fonctionne sur un corps quelconque. Plus précisément, il a construit une action rationnelle par automorphismes d'algèbres du groupe additif $(\mathbb{k}^{13}, +)$ sur la $\mathbb{k}$-algèbre de polynômes $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_{32}]$ dont la $\mathbb{k}$-algèbre des invariants n'est pas de type fini.

Le contre-exemple de Nagata n'est pas le point final de l'histoire, car il reste des motivations importantes à établir des généralisations du théorème 1.9. Ainsi la théorie géométrique des invariants (GIT) développée par D. Mumford dans les années 1960 utilise les algèbres d'invariants (lorsqu'elles sont de type fini) pour construire certaines variétés quotients.

Définition 1.10.

On dit qu'un groupe linéaire algébrique G a la propriété *d'engendrement fini* (EF) si pour toute $\mathbb{k}$-algèbre commutative de type fini A, munie d'une action rationnelle de G par automorphismes d'algèbres, la $\mathbb{k}$-algèbre des invariants A^G est de type fini.

Par exemple, le théorème 1.9 dit précisément que le groupe linéaire $SL_n(\mathbb{C})$ a la propriété (EF). Suite aux travaux combinés de M. Nagata [24], W. J. Haboush [16] et V. L. Popov [26], on sait exactement quels groupes linéaires algébriques ont la propriété (EF).

Théorème 1.11 (Nagata – Haboush – Popov).

Soit G un groupe linéaire algébrique. Alors G possède la propriété (EF) si et seulement si G est réductif.

Pour que cet énoncé ait un sens, il convient de préciser ce que 'réductif' signifie. La notion de groupe réductif provient des travaux de la fin des années 1950 sur la classification des groupes linéaires algébriques (travaux de C. Chevalley et de A. Borel notamment). Notons $U_n(\mathbb{k})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures strictes de $M_n(\mathbb{k})$ avec '1' sur la diagonale. C'est-à-dire que $U_n(\mathbb{k})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ce groupe $U_n(\mathbb{k})$ est le prototype des groupes unipotents. Plus précisément, un groupe linéaire algébrique G est dit *unipotent* s'il satisfait les conditions équivalentes suivantes.

1. Tous les éléments de G sont des matrices unipotentes.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

2. Le groupe G est isomorphe (en tant que groupe linéaire algébrique) à un sous-groupe des matrices $U_n(\Bbbk)$.
3. La représentation triviale de dimension 1 est l'unique représentation rationnelle simple de G.

La notion de groupe réductif s'oppose à celle de groupe unipotent. Plus précisément, tout groupe linéaire algébrique G contient un plus grand sous-groupe normal unipotent connexe (pour la topologie de Zariski), son *radical unipotent* $R_u(G)$. Un groupe linéaire algébrique est dit *réductif* lorsque son radical unipotent est le groupe trivial. Les groupes réductifs sur un corps algébriquement clos sont complètement classifiés.

Exemples 1.12. Les groupes linéaires algébriques suivants sont réductifs : les groupes finis, $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, $SL_n(\Bbbk)$, $O_n(\Bbbk)$, $SO_n(\Bbbk)$, $Sp_n(\Bbbk)$.

Le terme 'réductif' provient du fait que lorsque $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle, les représentations rationnelles des groupes réductifs peuvent toujours se décomposer comme une somme directe de représentations irréductibles. Cette propriété de réductibilité des représentations rationnelles est fausse lorsque la caractéristique de $\Bbbk$ est non nulle.

3 Des points fixes à la cohomologie

Le point de départ pour définir la cohomologie d'un groupe linéaire algébrique G est un comportement 'pathologique' des points fixes.

Plus précisément, notons $\mathrm{Rep}\, G$ la catégorie dont les objets sont les représentations rationnelles de G, et dont les morphismes sont les applications $f : V \to W$ qui sont $\Bbbk$-linéaires et G-équivariantes (c'est-à-dire $f(g\cdot v) = g\cdot f(v)$ pour tout $g \in G$ et tout $v \in V$). On définit un foncteur de points fixes :

$$-^G : \mathrm{Rep}\, G \to \mathrm{Vect}_\Bbbk$$

qui à chaque représentation de V associe l'espace vectoriel des points fixes :

$$V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G\ g\cdot v = v\}\,,$$

et à chaque morphisme $f : V \to W$ associe sa restriction $f : V^G \to W^G$. En général, ce foncteur des points fixes n'est *pas exact à droite*. Ceci signifie concrètement qu'une application surjective $f : V \twoheadrightarrow W$ peut tout à fait se restreindre en une application $f : V^G \to W^G$ qui n'est pas surjective.

Exemple 1.13. Considérons le groupe $G = (\Bbbk, +)$, qu'on voit comme le groupe formé des matrices 2×2 de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le groupe G agit sur $\Bbbk^2$ par multiplication matricielle. Notons également $\Bbbk^{\mathrm{triv}}$ l'espace vectoriel $\Bbbk$, muni de l'action triviale de G (c'est-à-dire $g\cdot v = v$ pour tout $g \in G$ et tout $v \in \Bbbk$). Enfin, notons (e_1, e_2) la base canonique de $\Bbbk^2$. Alors on définit une application $\Bbbk$-linéaire

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

G-équivariante surjective :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{k}^2 & \to & \mathbb{k}^{\text{triv}} \\ \lambda e_1 + \mu e_2 & \mapsto & \mu \end{array} .$$

Mais on a $(\mathbb{k}^2)^G = \mathbb{k}e_1$, $(\mathbb{k}^{\text{triv}})^G = \mathbb{k}$ et la restriction $f : (\mathbb{k}^2)^G \to (\mathbb{k}^{\text{triv}})^G$ est donc nulle (donc non surjective).

La cohomologie est la notion qui permet de compenser le défaut d'exactitude à droite du foncteur des point fixes. Cette notion fut introduite par G. Hochschild en 1961 [18], on peut en donner la définition formelle suivante.

Définition 1.14.

Soit G un groupe linéaire algébrique. Pour $i \in \mathbb{N}$, le i-ième espace vectoriel de cohomologie de G à coefficients dans la représentation rationnelle V est l'espace vectoriel $H^i(G, V)$ défini par

$$H^i(G, V) = \mathbf{R}^i(-^G)(V) = \text{Ext}^i_{\text{Rep}\, G}(\mathbb{k}^{\text{triv}}, V) .$$

Dans cette définition, les symboles $\mathbf{R}^i(-^G)$ signifient le i-ième foncteur dérivé à droite du foncteur des points fixes. La notation $\text{Ext}^i_{\text{Rep}\, G}(\mathbb{k}^{\text{triv}}, V)$ fait référence aux espaces vectoriels d'extensions calculés dans la catégorie $\text{Rep}\, G$. Sans connaître la théorie des foncteurs dérivés ni celle des extensions, on peut se faire une petite idée de ce qu'est la cohomologie à l'aide des propriétés suivantes.

1. Pour tout $i \geqslant 0$, la cohomologie définit un foncteur
$$H^i(G, -) : \text{Rep}\, G \to \text{Vect}_{\mathbb{k}} .$$
2. Pour toute représentation rationnelle V on a $H^0(G, V) = V^G$.
3. Si V est une somme directe de copies de la représentation $\mathbb{k}[G]$ définie à l'exemple 1.5, alors $H^i(G, V) = 0$ pour $i > 0$.
4. Pour toute application G-équivariante surjective $f : V \twoheadrightarrow W$ de noyau K, on a une suite exacte longue d'espaces vectoriels (c'est-à-dire l'image de chaque morphisme est égal au noyau du suivant, ι désignant l'inclusion de K dans V) :
$$0 \to H^0(G, K) \xrightarrow{H^0(G,\iota)} H^0(G, V) \xrightarrow{H^0(G,f)} H^0(G, W) \xrightarrow{\partial^0} H^1(G, K) \to \cdots$$

Ces quatre propriétés constituent presque une caractérisation de la cohomologie : pour obtenir une caractérisation il suffit de renforcer la dernière propriété en précisant que les suites exactes longues dépendent fonctoriellement de f. Un fait non trivial qui permet de grandement préciser le portrait de la cohomologie est le suivant : si V est une représentation de dimension finie et si G est réductif, alors pour tout $i \geqslant 0$, $H^i(G, V)$ est de dimension finie.

Il est d'usage de regrouper tous ensemble les espaces vectoriels de cohomologie. On utilise la notation :

$$H^*(G, V) = \bigoplus_{i \geqslant 0} H^i(G, V) .$$

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

4 Les problèmes abordés dans le cours

L'objectif de ce cours est d'expliquer des avancées récentes sur l'étude de la cohomologie des groupes linéaires algébriques. Le cours aborde deux problèmes (qui sont bien entendu reliés).

Le premier problème est celui du **calcul explicite de la cohomologie**. La cohomologie est une notion construite de façon à satisfaire des bonnes propriétés abstraites (notamment la propriété 4 de la section 3). Mais comme chaque médaille a son revers, la définition ne permet pas un calcul facile des espaces vectoriels $H^i(G,V)$ pour une représentation V donnée. En fait, il y a même de nombreuses représentations V élémentaires de dimension finie pour lesquelles on est incapables de calculer les espaces vectoriels de cohomologie. Nous expliquerons dans les chapitres 3 et 4 des méthodes pour obtenir certains calculs explicites de cohomologie pour les groupes classiques $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, $Sp_n(\Bbbk)$ ou $O_n(\Bbbk)$, lorsque V est une 'représentation fonctorielle'. Ces méthodes ont été initialement introduites par A. Suslin et E. M. Friedlander [13] dans le cas de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ et adaptées plus récemment aux autres groupes classiques dans [30].

Le deuxième problème abordé dans le cours est celui de **l'engendrement fini des algèbres de cohomologie**. Ce problème concerne une généralisation très naturelle du théorème 1.11 décrivant pour quels groupes linéaires algébriques on a toujours des algèbres d'invariants de type fini. Plus précisément, soit A est une algèbre commutative de type fini, sur laquelle G agit rationnellement par automorphismes d'algèbres. Alors l'espace de cohomologie $H^*(G,A)$ est canoniquement muni d'une structure de $\Bbbk$-algèbre. Cette algèbre contient l'algèbre des invariants $A^G = H^0(G,A)$ à la fois comme sous-algèbre et comme algèbre quotient. Une question naturelle est donc de savoir si l'algèbre $H^*(G,A)$ est de type fini. Nous expliquerons dans la section 5 (une légère généralisation du) théorème suivant, initialement conjecturé par W. Van der Kallen, et finalement démontré dans [35].

Théorème 1.15.

Soit A une algèbre commutative de type fini, munie d'une action du groupe linéaire algébrique G. Si G a la propriété (EF), alors $H^*(G,A)$ est une algèbre de type fini.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Chapitre 2

Les schémas en groupes et leur cohomologie

La notion de groupe linéaire algébrique décrite dans l'introduction générale du cours est insuffisante sur plusieurs points. Tout d'abord, elle ne fonctionne pas sur un corps de base $\Bbbk$ quelconque. Surtout, même si l'on ne s'intéresse qu'aux groupes algébriques linéaires sur un corps $\Bbbk$ algébriquement clos, des objets de nature différente tels que les noyaux de Frobenius de l'exemple 2.20 jouent un rôle central dans l'étude des représentations et de la cohomologie. Pour toutes ces raisons, le bon cadre pour l'étude des représentations et de la cohomologie est le cadre plus général des schémas en groupes algébriques affines (que nous appellerons souvent dans la suite du cours 'schémas en groupes' pour abréger, voir la convention 2.5).

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les définitions et propriétés basiques relatives aux schémas en groupes algébriques affines. On peut trouver tous de détails (notamment les démonstrations) dans les livres [38] et [19]. Dans la suite du chapitre, on se fixe un corps $\Bbbk$ quelconque. Tous les produits tensoriels non décorés sont des produits tensoriels sur $\Bbbk$.

1 Schémas en groupes algébriques affines

Soit $\mathrm{Alg}_\Bbbk$ la catégorie des $\Bbbk$-algèbres commutatives unitaires, et des morphismes de $\Bbbk$-algèbres préservant l'unité. Soit Gp la catégorie des groupes et des morphismes de groupes.

Définition 2.1.

Un *schéma en groupes algébrique affine* sur $\Bbbk$ est un foncteur :

$$G : \mathrm{Alg}_\Bbbk \to \mathrm{Gp}$$

représentable par une $\Bbbk$-algèbre de type fini. Un *morphisme* entre schémas en groupes algébriques affines est un transformation naturelle. On note $\mathrm{SGAA}_\Bbbk$ la catégorie des schémas en groupes algébriques affines sur $\Bbbk$ et de leurs morphismes.

Rappelons qu'un foncteur de domaine $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ est dit *représentable* s'il existe une $\Bbbk$-algèbre commutative B et un isomorphisme de foncteurs :

$$G(-) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(B,-)\,.$$

D'après le lemme de Yoneda, l'algèbre B est uniquement déterminée à isomorphisme près. Dans le cas d'un schéma en groupes algébrique affine G, l'algèbre qui le représente est appelée *algèbre de coordonnées* de G, et est notée $\Bbbk[G]$.

Exemple 2.2. Le foncteur GL_n qui a une $\Bbbk$-algèbre A commutative de type fini, associe le groupe $\mathrm{GL}_n(A)$ est un schéma en groupes algébrique affine. Il est représenté par l'algèbre :

$$\Bbbk[\mathrm{GL}_n] = \Bbbk[t, x_{i,j}, 1 \leqslant i,j \leqslant n] \Big/ \langle\, t\det[x_{i,j}] = 1 \rangle\ .$$

Nous expliquons maintenant un deuxième point de vue sur les schémas en groupes algébriques affines. En général, si B est une algèbre quelconque, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(B,-)$ est à valeurs dans les ensembles. Il faut une structure supplémentaire sur B pour pouvoir définir une structure naturelle de groupe sur les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(B,A)$.

Définition 2.3.

Une $\Bbbk$-*algèbre de Hopf* est une $\Bbbk$-algèbre H, munie de morphismes de $\Bbbk$-algèbres $\Delta : H \to H \otimes H$ (la comultiplication), $\epsilon : H \to \Bbbk$ (la coünité), $\chi : H \to H$ (l'antipode), tels que :

1. Coassociativité : $(\mathrm{Id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta$.
2. Coneutralité : $(\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon) \circ \Delta = \mathrm{Id}_H = (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta$.
3. Antipodie : $m \circ (\chi \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = m \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \chi) \circ \Delta$. Ici, m est la multiplication de H et $\eta : \Bbbk \to H$ le morphisme envoyant λ sur $\lambda 1_H$.

On note $\mathrm{Hopf}_{\Bbbk}$ la catégorie des $\Bbbk$-algèbres de Hopf commutatives de type fini, et des morphismes de $\Bbbk$-algèbres de Hopf (c'est-à-dire les morphismes de $\Bbbk$-algèbres commutant avec Δ, ϵ, χ).

Si H est une algèbre de Hopf commutative de type fini, on peut munir l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(H,A)$ d'une structure de groupe, dont la multiplication est $f \cdot g = m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_H$, dont l'unité est le morphisme d'algèbres $\eta_A \circ \epsilon_H$, l'inverse d'un morphisme f étant le morphisme $f \circ \chi$. On obtient ainsi un schéma en groupes algébrique affine :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(H,-) : \mathrm{Alg}_{\Bbbk} \to \mathrm{Gp}\,.$$

La proposition suivante est une application directe du lemme de Yoneda. Elle donne une deuxième interprétation des schémas en groupes algébriques affines en termes d'algèbres de Hopf.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Proposition 2.4.

Le foncteur contravariant suivant est une anti-équivalence de catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hopf}_{\Bbbk} & \to & \mathrm{SGAA}_{\Bbbk} \\ H & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(H,-) \end{array} .$$

Convention 2.5.

Comme les seuls schémas en groupes que nous considérerons sont algébriques et affines, nous abrégerons souvent dans la suite du cours l'expression 'schéma en groupes algébrique affine' en 'schéma en groupes'.

2 Représentations et cohomologie

On se fixe maintenant un schéma en groupes algébrique affine G sur $\Bbbk$. Pour tout $\Bbbk$-espace vectoriel V, on note GL_V le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{GL}_V : & \mathrm{Alg}_{\Bbbk} & \to & \mathrm{Gp} \\ & A & \to & \mathrm{GL}_V(A) = \mathrm{GL}_A(V \otimes_{\Bbbk} A) \end{array} .$$

Ici $\mathrm{GL}_A(V \otimes_{\Bbbk} A)$ désigne les endomorphismes A-linéaires inversibles du A-module libre $V \otimes_{\Bbbk} A$. Si V est de dimension finie n, on a un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{GL}_V \simeq \mathrm{GL}_n$ et GL_V est donc un schéma en groupes algébrique affine. Mais si V est de dimension infinie, GL_V n'est pas représentable.

Définition 2.6.

Une *représentation* de G est un couple (V,ρ), où V est un $\Bbbk$-espace vectoriel, et $\rho : G \to \mathrm{GL}_V$ est une transformation naturelle.

Comme c'est l'usage en théorie des représentations, on oublie souvent de préciser ρ dans la notation et on note simplement V à la place de (V,ρ). Une représentation de G est équivalente à la donnée d'une famille d'actions de groupes A-linéaires

$$G(A) \times (V \otimes_{\Bbbk} A) \quad \to \quad V \otimes_{\Bbbk} A$$

naturelles vis-à-vis de l'algèbre A.

Définition 2.7.

Soient (V,ρ) et (V',ρ') deux représentations de G. Une application $\Bbbk$-linéaire $f : V \to V'$ est dite *G-équivariante* si pour toute $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini A l'application $f \otimes \mathrm{Id}_A : V \otimes_{\Bbbk} A \to V' \otimes_{\Bbbk} A$ est $G(A)$-équivariante. On note $\mathrm{Rep}\, G$ la catégorie des représentations de G et des applications $\Bbbk$-linéaires G-équivariantes.

Comme on dispose du deuxième point de vue des algèbres de Hopf sur les schémas en groupes, on dispose également d'un deuxième point sur leurs représentations. Notons $\Bbbk[G]$ la $\Bbbk$-algèbre de Hopf représentant G, Δ sa comultiplication, ϵ sa coünité, $\eta : \Bbbk \to \Bbbk[G]$ son unité.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Définition 2.8.

Un $\Bbbk[G]$-*comodule* est la donnée d'un espace vectoriel V, muni d'une application $\Bbbk$-linéaire $\Delta_V : V \to V \otimes \Bbbk[G]$ (la coaction) vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Coassociativité : $(\mathrm{Id}_V \otimes \Delta) \circ \Delta_V = (\Delta_V \otimes \mathrm{Id}_{\Bbbk[G]}) \circ \Delta_V$.
2. Coneutralité : $(\mathrm{Id}_V \otimes \epsilon) \circ \Delta_V = \mathrm{Id}_V$.

Si (V, Δ_V) et (W, Δ_W) sont deux $\Bbbk[G]$-comodules, un *morphisme de comodules* est une application $\Bbbk$-linéaire $f : V \to W$ telle que

$$(f \otimes \mathrm{Id}_{\Bbbk[G]}) \circ \Delta_V = \Delta_W \circ f \,.$$

On note $\mathrm{Comod}-\Bbbk[G]$ la catégorie des $\Bbbk[G]$-comodules et des morphismes de $\Bbbk[G]$-comodules.

Remarque 2.9. En inspectant la définition de comodule, on constate que la structure d'algèbre de $\Bbbk[G]$ et son antipode ne jouent aucun rôle. Cette notion peut donc être généralisée à des cogèbres quelconques, c'est-à-dire des triplets (C, Δ, ϵ) formé d'un espace vectoriel et de deux applications linéaires vérifiant les deux premiers axiomes de la définition 2.3.

Exemples 2.10.

1. Si V est un $\Bbbk$-espace vectoriel quelconque, on note V^{triv} l'espace vectoriel V muni de la coaction triviale
$$V = V \otimes \Bbbk \xrightarrow{\mathrm{Id}_V \otimes \eta} V \otimes \Bbbk[G] \,.$$
2. Le $\Bbbk[G]$-comodule régulier est le couple $(\Bbbk[G], \Delta)$.
3. Si (V, Δ_V) et (W, Δ_W) sont des $\Bbbk[G]$-comodules, leur produit tensoriel $V \otimes W$ est un $\Bbbk[G]$-comodule avec $\Delta_{V\otimes W}$ définie comme la composée suivante, où $\mu(v \otimes f \otimes w \otimes g) = v \otimes w \otimes f\,g$:
$$V \otimes W \xrightarrow{\Delta_V \otimes \Delta_W} V \otimes \Bbbk[G] \otimes W \otimes \Bbbk[G] \xrightarrow{\mu} V \otimes W \otimes \Bbbk[G] \,.$$

Soit V un espace vectoriel. À l'aide du Lemme de Yoneda, on peut faire correspondre bijectivement les coactions Δ_V sur V et les transformations naturelles $G \to \mathrm{GL}_V$, c'est-à-dire les actions de G sur V. De plus, une application linéaire $f : V \to V'$ est un morphisme de $\Bbbk[G]$-comodules si et seulement si c'est un morphisme G-équivariant pour les actions correspondantes. On obtient alors l'énoncé suivant.

Proposition 2.11.

On a une équivalence de catégories :

$$\mathrm{Comod}-\Bbbk[G] \simeq \mathrm{Rep}\, G \,.$$

La proposition suivante nous assure que l'on peut travailler dans la catégorie $\mathrm{Comod}-\Bbbk[G]$ (ou $\mathrm{Rep}\, G$) de la même façon que dans la catégorie des modules sur un anneau.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Proposition 2.12.

La catégorie $\mathrm{Comod}-\Bbbk[G]$ est une catégorie abélienne (cocomplète, avec colimites filtrantes exactes) qui possède assez d'injectifs. Plus précisément, un cogénérateur injectif est donné par les représentations de la forme $V^{\mathrm{triv}} \otimes \Bbbk[G]$, et tout $\Bbbk[G]$-comodule V se plonge dans $V^{\mathrm{triv}} \otimes \Bbbk[G]$ via l'application $\Bbbk$-linéaire Δ_V.

Puisque la catégorie $\mathrm{Comod}-\Bbbk[G]$ (ou $\mathrm{Rep}\, G$) est abélienne avec assez d'injectifs, on peut y calculer des Ext.

Définition 2.13.

Le i-ième espace vectoriel de cohomologie d'un schéma en groupes algébrique affine G à coefficients dans V est défini par

$$H^i(G,V) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}\, G}(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, V) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Comod}-\Bbbk[G]}(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, V)\,.$$

A première vue il peut paraître bien restrictif de ne s'intéresser qu'aux espaces vectoriels d'extensions dont le premier argument est la représentation $\Bbbk^{\mathrm{triv}}$. Cependant si V et W sont des représentations de G et $\dim_\Bbbk V < \infty$, alors l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)$ est naturellement muni d'une action de G : l'action de $G(A)$ sur

$$\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W) \otimes A = \mathrm{Hom}_A(V \otimes_\Bbbk A, W \otimes_\Bbbk A)$$

étant donnée par la formule $(g \cdot f)(v \otimes 1_A) = g \cdot f(g^{-1} \cdot (v \otimes 1_A))$. La proposition suivante permet de relativiser cette première impression.

Proposition 2.14.

Soient V et W deux représentations de G, avec V de dimension finie. Si $i \geqslant 0$, on a un isomorphisme, naturel en V et W :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}\, G}(V,W) \simeq H^i(G, \mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W))\,.$$

Définition 2.15.

L'*espace vectoriel* V^G *des points fixes* d'une représentation V sous l'action d'un schéma en groupe G est défini par $V^G = H^0(G,V)$.

Si l'on explicite la définition 2.15 à l'aide du point de vue fonctoriel sur les schéma en groupes on obtient :

$$\begin{aligned} V^G &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}\, G}(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, V) \\ &= \{ v \in V \mid \forall A \in \mathrm{Alg}_\Bbbk \quad \forall g \in G(A) \quad g \cdot (v \otimes 1_A) = v \otimes 1_A \}\,. \end{aligned}$$

En particulier on a toujours une inclusion $V^G \subset V^{G(\Bbbk)}$ mais cette inclusion peut très bien être stricte, comme le montre l'exemple suivant.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Exemple 2.16. Soit $\Bbbk = \mathbb{F}_p$, avec p premier. On considère l'action de GL_n sur $\mathbb{F}_p$ donnée par le morphisme de groupe $\rho = \det^{p-1} : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$. Alors

$$V^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)} = \mathbb{F}_p\,, \qquad V^{\mathrm{GL}_n} = 0\,.$$

En effet l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ est triviale, mais pas celle de $\mathrm{GL}_n(L)$ pour un corps L contenant strictement $\mathbb{F}_p$.

3 Exemples lorsque $\Bbbk$ est algébriquement clos

Supposons $\Bbbk$ algébriquement clos. Nous allons tout d'abord montrer que les schémas en groupes sont une généralisation des groupes linéaires algébriques au sens naïf du chapitre 1. Notons $\mathrm{GLA}_\Bbbk$ la catégorie des groupes linéaires algébriques et des morphismes de groupes réguliers, selon les définitions de la section 1 du chapitre 1. Si G est un groupe linéaire algébrique, on note $\Bbbk[G]$ l'algèbre des fonctions régulières $f : G \to \Bbbk$. Notons $m, 1, \iota$ la multiplication de G, l'unité de G et l'opération d'inversion dans G. On définit trois morphismes d'algèbres

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \Bbbk[G] & \to & \Bbbk[G\times G] = \Bbbk[G]\otimes\Bbbk[G] \\ & f & \mapsto & f\circ m \end{array}\,,$$

$$\begin{array}{rccc} \epsilon : & \Bbbk[G] & \to & \Bbbk \\ & f & \mapsto & f(1) \end{array}\,,$$

$$\begin{array}{rccc} \chi : & \Bbbk[G] & \to & \Bbbk[G] \\ & f & \mapsto & f\circ\iota \end{array}\,.$$

Il est facile de voir que l'algèbre $\Bbbk[G]$, munie de ces trois morphismes, est une algèbre de Hopf. On dispose donc d'un foncteur :

$$\begin{array}{rccc} \widehat{-} : & \mathrm{GLA}_\Bbbk & \to & \mathrm{SGAA}_\Bbbk \\ & G & \mapsto & \widehat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[G], -) \end{array}\,.$$

Proposition 2.17.

Le foncteur $\widehat{-}$ est pleinement fidèle. Il induit une équivalence de catégories entre $GLA_\Bbbk$ et la sous-catégorie pleine des schémas en groupes algébriques affines dont les algèbres de coordonnées sont réduites (c'est-à-dire sans élément nilpotent).

Le foncteur $\widehat{-}$ admet un rétracte. Plus précisément, si H est un schéma en groupes algébriques affines, alors le groupe $H(\Bbbk)$ est naturellement muni d'une structure de groupe linéaire algébrique. L'évaluation sur $\Bbbk$ donne donc un foncteur (des '$\Bbbk$-points')

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SGAA}_\Bbbk & \to & \mathrm{GLA}_\Bbbk \\ H & \mapsto & H(\Bbbk) \end{array}\,.$$

Proposition 2.18.

Si G est un groupe linéaire algébrique, on a un isomorphisme naturel de groupes linéaires algébriques $G \simeq \widehat{G}(\Bbbk)$.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

On peut maintenant s'intéresser aux représentations. Si G est un groupe linéaire algébrique, alors toute représentation V de $\widehat{G}$ fournit une représentation V de $\widehat{G}(\Bbbk) = G$ (on oublie simplement toutes les actions des groupes $\widehat{G}(A)$ pour $A \neq \Bbbk$). On peut de plus montrer que la représentation obtenue est une représentation rationnelle de G. L'évaluation sur $\Bbbk$ induit donc un foncteur

$$\operatorname{Rep}\widehat{G} \to \operatorname{Rep} G\,.$$

Proposition 2.19.

Le foncteur $\operatorname{Rep}\widehat{G} \to \operatorname{Rep} G$ est une équivalence de catégories. En particulier, la cohomologie de G à coefficients dans V comme définie dans la section 3 coïncide avec la cohomologie de $\widehat{G}$ à coefficients dans V comme définie dans la section 2 du chapitre 1.

Sur un corps algébriquement clos, les (représentations des) groupes linéaires algébriques définis dans l'introduction du cours fournissent donc beaucoup d'exemples concrets de (représentations des) schémas en groupes. Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique non nulle, il existe des exemples plus exotiques de schémas en groupes.

Exemple 2.20. Supposons que $\Bbbk$ est un corps de caractéristique $p > 0$, et $r \geqslant 1$. Pour toute $\Bbbk$-algèbre de type fini A on pose

$$\begin{aligned}(\mathrm{GL}_n)_r(A) &= \left\{[a_{ij}] \in \mathrm{GL}_n(A) \mid a_{ij}^{p^r} = \delta_{ij}\right\},\\ &= \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \mathrm{GL}_n(A) & \xrightarrow{F^r} & \mathrm{GL}_n(A) \\ [a_{ij}] & \mapsto & [a_{ij}^{p^r}] \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Le foncteur $(\mathrm{GL}_n)_r$ un schéma en groupes algébrique affine, représenté par :

$$\Bbbk[(\mathrm{GL}_n)_r] = \Bbbk[\mathrm{GL}_n] \Big/ \left\langle\, x_{ij}^{p^r} = \delta_{ij} \,\right\rangle\,.$$

Les exemples de ce type s'appellent les *noyaux de Frobenius* des groupes linéaires algébriques, et jouent un rôle fondamental dans l'étude des représentations et de la cohomologie des groupes linéaires algébriques. Ils constituent cependant des objets très différents. Par exemple, contrairement à ce qui se passe avec les groupes linéaires algébriques, on perd beaucoup d'information sur $(\mathrm{GL}_n)_r$ en ne regardant que ses $\Bbbk$-points (car $(\mathrm{GL}_n)_r(\Bbbk)$ est le groupe trivial !).

4 L'exemple des groupes finis

On se fixe un groupe fini G, dont on note m la multiplication, 1 l'unité et ι l'opération d'inversion. Les représentations des groupes finis sont la même chose que les $\Bbbk G$-modules, où $\Bbbk G$ désigne l'algèbre de groupe de G.

Notons $\Bbbk[G]$ la $\Bbbk$-algèbre de dimension finie des applications $f : G \to \Bbbk$. On en fait une algèbre de Hopf à l'aide de la comultiplication $\Delta(f) = f \circ m$ (qui utilise l'identification $\Bbbk[G \times G] = \Bbbk[G] \otimes \Bbbk[G]$), de l'augmentation $\epsilon(f) = f(1)$ et de l'antipode $\chi(f) = f \circ \iota$.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

On note $\widehat{G}$ le schéma en groupes

$$\widehat{G}(-) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(\Bbbk[G], -)\,.$$

Ce schéma en groupes est tel que $\widehat{G}(\Bbbk) \simeq G$. En particulier, toute représentation de $\widehat{G}$ donne une représentation du groupe fini G (en oubliant les actions des groupes $\widehat{G}(A)$ pour $A \neq \Bbbk$, et on obtient ainsi un foncteur :

$$\mathrm{Rep}\,\widehat{G} \to \Bbbk G - \mathrm{Mod}\,.$$

Proposition 2.21.

Ce foncteur est une équivalence de catégories.

En particulier, la cohomologie du schéma en groupes $\widehat{G}$ à coefficients dans une représentation V coïncide avec la cohomologie du groupe fini G à coefficients dans la représentation V au sens usuel [1].

Remarque 2.22 (Une confusion à éviter). Supposons que $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ est un corps fini. Alors on a deux schémas en groupes distincts associés au groupe GL_n (ou à tout autre groupe classique de matrices). D'une part le schéma en groupe GL_n de l'exemple 2.2, représenté par la $\mathbb{F}_q$-algèbre de Hopf de dimension infinie $\mathbb{F}_q[\mathrm{GL}_n]$. D'autre part le schéma en groupes $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)}$ décrit dans la présente section, représenté par la $\mathbb{F}_q$-algèbre de Hopf de dimension finie $\mathbb{F}_q[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$. Ce sont deux objets très différents, bien qu'ils aient les même $\mathbb{F}_q$-points. Un célèbre théorème de Cline Parshall Scott et Van der Kallen [5] permet toutefois de relier la cohomologie de ces deux objets, voir le chapitre 3.

5 Changement de base

Soit $\Bbbk \subset L$ une extension de corps. La restriction de l'action de L au sous-corps $\Bbbk$ induit un foncteur

$$\begin{array}{rccc} \iota : & \mathrm{Alg}_L & \to & \mathrm{Alg}_{\Bbbk} \\ & A & \mapsto & A \end{array}\,.$$

Si $G : \mathrm{Alg}_{\Bbbk} \to \mathrm{Gp}$ est un schéma en groupes algébrique affine, on note $G_L : \mathrm{Alg}_L \to \mathrm{Gp}$ le foncteur composé $G_L = G \circ \iota$. La propriété universelle du produit tensoriel donne facilement que le foncteur G_L est représentable, d'algèbre de coordonnées $L[G_L] = \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk} L$. La composition par ι induit donc un foncteur de changement de base

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SGAA}_{\Bbbk} & \to & \mathrm{SGAA}_L \\ G & \mapsto & G_L = G \circ \iota \end{array}\,.$$

Le changement de base peut aussi s'opérer au niveau des représentations. Plus précisément, on a un foncteur :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}\,G & \to & \mathrm{Rep}\,G_L \\ V & \mapsto & V \otimes_{\Bbbk} L \\ f & \mapsto & f \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Id}_L \end{array}\,.$$

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

La proposition suivante permet souvent de se ramener au cas d'un corps algébriquement clos lorsque l'on étudie la cohomologie des schémas en groupes.

Proposition 2.23.

Soit G un schéma en groupes algébrique affine sur $\Bbbk$ et V une représentation de G. Soit $\Bbbk \subset L$ une extension de corps. On a un isomorphisme canonique

$$H^*(G,V)\otimes_{\Bbbk} L \simeq H^*(G_L, V\otimes_{\Bbbk} L)\,.$$

6 Les bonnes filtrations

Supposons pour simplifier que $\Bbbk$ est algébriquement clos, et soit G un groupe linéaire algébrique sur $\Bbbk$ au sens de la définition 1.1. On suppose que G est connexe (au sens de la topologie de Zariski) et réductif (c'est-à-dire que le radical unipotent de G est trivial, voir la section 2 du chapitre 1). Par exemple, $G = \mathrm{GL}_n$, Sp_n ou SO_n. Une tentative naïve pour calculer la cohomologie de G à coefficients dans une représentation V serait la suivante. On commence par trouver une résolution injective de V :

$$J^\bullet = \quad J^0 \to J^1 \to J^2 \to \dots,$$

on applique le foncteur des points fixes, et on calcule l'homologie du complexe obtenu. Dans la pratique cette approche ne fonctionne pas, car les injectifs sont des représentations compliquées de dimension infinie. Les représentations possédant des bonnes filtrations peuvent servir de substitut aux représentations injectives, car si W a une bonne filtration, elle vérifie la propriété d'annulation cohomologique $H^i(G,W) = 0$ pour $i > 0$, elles peuvent donc remplacer les représentations injectives lorsque l'on cherche la résolution $J^\bullet$. De plus, ces représentations sont dans la pratique plus facile à manier que les représentations injectives, on peut notamment en trouver beaucoup qui sont de dimension finie. Par exemple la représentation adjointe $\mathfrak{gl}_n$ de GL_n possède une bonne filtration. Les bonnes filtrations sont un outil technique essentiel pour de nombreux résultats abordés dans le cours. Nous en donnons maintenant les principales définitions et propriétés.

Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos, G un groupe linéaire algébrique sur $\Bbbk$. On suppose G connexe et réductif. On se fixe un tore maximal $T \subset G$. On note $X(T)$ le groupe abélien des caractères de T, c'est à dire les morphismes de groupes $\lambda : T \to \Bbbk^\times = \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$. On se fixe également un sous-groupe de Borel de G (c'est-à-dire un sous-groupe connexe résoluble maximal de G) contenant T, qu'on note B. On sait alors que l'inclusion $\iota : T \hookrightarrow B$ admet un rétracte $\pi : B \twoheadrightarrow T$. Les morphismes ι et π induisent des isomorphismes de groupes abéliens $X(T) \simeq X(B)$.

Exemple 2.24. Soit $G = \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$. Alors on peut prendre pour T le sous-groupe des matrices diagonales, et pour B le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures. Le groupe des caractères $X(T)$ est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Z}^n, +)$. Plus précisément l'isomorphisme envoie $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ sur le morphisme de groupes $T \to \Bbbk^\times$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$.

Soit V une représentation rationnelle de G. En restreignant l'action à B on obtient une représentation rationnelle de B. On obtient ainsi un foncteur de restriction :

$$\mathrm{Res}^G_B : \mathrm{Rep}\, G \to \mathrm{Rep}\, B\,.$$

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Ce foncteur de restriction admet un adjoint à droite, le foncteur d'induction :

$$\mathrm{Ind}_B^G : \mathrm{Rep}\, B \to \mathrm{Rep}\, G\,.$$

Plus précisément, considérons l'espace vectoriel $\mathrm{Mor}(G,V)$ des applications régulières $G \to V$, muni de l'action telle que $(g\cdot f)(h) = f(hg)$. Alors la représentation $\mathrm{Ind}_B^G(V)$ est la sous-représentation de $\mathrm{Mor}(G,V)$ des applications régulières équivariantes sous l'action de B, c'est-à-dire qui vérifient $f(bg) = bf(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $b \in B$.

Tout caractère $\lambda \in X(T)$ définit une action de B sur $\Bbbk$. On note $\Bbbk_\lambda$ la représentation de B correspondante. On note

$$\nabla_\lambda = \mathrm{Ind}_B^G(\Bbbk_\lambda)\,.$$

Les caractères pour lesquels la représentation ∇_λ est non nulle s'appellent les *poids dominants*. Si ∇_λ est non nul, alors ∇_λ s'appelle la *représentation costandard* (de poids dominant λ). Les représentations costandard jouent un rôle essentiel dans la théorie des représentations de G. Cependant nous utiliserons surtout leurs propriétés cohomologiques, à travers la notion de bonne filtration.

Définition 2.25.

Une *bonne filtration* d'une représentation rationnelle V de G est une suite croissante de sous-représentations

$$0 = F^0V \subset F^1V \subset \cdots \subset F^nV \subset \cdots \subset V = \bigcup_{n\geqslant 0} F^nV$$

telle que pour tout $n > 0$, la représentation $F^nV/F^{n-1}V$ est isomorphe à une somme directe de représentations costandard.

Les deux propriétés essentielles des bonnes filtrations sont données dans le théorème suivant. Ce sont des résultats non triviaux. La première propriété est une conséquence du théorème de Kempf, un résultat de nature plus géométrique qui donne des résultats d'annulation pour la cohomologie de certains fibrés en droites sur la variété G/B. Une démonstration de la seconde propriété (dans presque tous les cas) est due à S. Donkin. C'est une analyse cas par cas qui s'appuie sur la classification de groupes réductifs et qui occupe un livre complet [7]. Une démonstration uniforme de la propriété a ensuite été obtenue par O. Mathieu [21] .

Théorème 2.26.

Soient V, W deux représentations de G.

1. (annulation cohomologique) Si V a une bonne filtration alors pour tout $i > 0$, $H^i(G,V) = 0$.
2. (stabilité par produit tensoriel) Si V et W ont des bonnes filtrations alors $V \otimes W$ a une bonne filtration.

On peut identifier explicitement d'après leur définition un certain nombre de modules costandard. Ceci permet à son tour de montrer que certaines représentations usuelles ont une bonne filtration. Nous utiliserons à plusieurs reprises les résultats suivants.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Proposition 2.27.

Dans les cas suivants, la représentation $S^d(V)$ de G a une bonne filtration pour tout entier $d \geqslant 0$.

1. Si $G = \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, et si V est la représentation standard de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ (c'est-à-dire l'espace vectoriel $\Bbbk^n$ muni de l'action usuelle donnée par multiplication matricielle), la représentation duale de la représentation standard, ou la représentation adjointe $\mathfrak{gl}_n$.
2. Si $G = O_n(\Bbbk)$ ou $Sp_n(\Bbbk)$ et V est la représentation standard de G.

Il n'est pas nécessaire que $\Bbbk$ soit algébriquement clos pour la théorie des bonnes filtrations. Nous n'avons utilisé cette hypothèse que pour simplifier légèrement [(1)] l'énoncé des hypothèses sur G. Notons qu'il n'est pas nécessaire de développer la théorie des bonnes filtrations sur un corps quelconque pour obtenir des annulations cohomologiques. Comme les représentations $S^d(V)$ sont définies sur un corps $\Bbbk$ quelconque, la proposition de changement de base 2.23 assure que si l'on a annulation cohomologique sur un corps algébriquement clos, on l'a en fait sur un corps quelconque.

(1) Sur un corps quelconque, il faut supposer que G est un schéma en groupes lisse, connexe, réductif et déployé sur le corps premier pour disposer de la théorie des bonnes filtrations.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Chapitre 3

Cohomologie de GL_n et représentations fonctorielles

Dans ce chapitre on se focalise sur la cohomologie du schéma en groupes GL_n sur un corps $\Bbbk$. Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique zéro, on sait depuis les travaux de I. Schur [27] que GL_n est linéairement réductif : toute représentation se décompose comme une somme directe de sous-représentations simples. Une conséquence immédiate en est qu'il n'y a pas d'extensions non triviales entre représentations de GL_n. Ainsi, pour toute représentation V on a $H^i(GL_n, V) = 0$ pour $i > 0$: l'objet d'étude est trivial.

Dans la suite, on se fixe donc un corps $\Bbbk$ de caractéristique $p > 0$. L'objectif de la section est de présenter la catégorie $\mathscr{P}_\Bbbk$ des foncteurs strictement polynomiaux introduite dans [13] et d'expliquer comment elle permet de réaliser des calculs efficaces de cohomologie du groupe linéaire, en particulier pour les représentations faisant intervenir la torsion de Frobenius. Nous commençons donc par donner quelques motivations pour s'intéresser à ces représentations particulières (motivations qui sont en fait valables non seulement pour GL_n mais aussi pour O_n ou Sp_n, et plus largement pour tous les schémas en groupes réductifs lisses).

1 Motivations, le rôle de la torsion de Frobenius

On fixe un corps $\Bbbk$ de caractéristique $p > 0$. Soit $V = (V, \rho)$ une représentation de GL_n. Pour tout $r \geqslant 0$, on peut jouer sur le morphisme de Frobenius de $\Bbbk$, pour définir une nouvelle représentation $V^{[r]}$ qu'on dit *tordue par le Frobenius*. Plus précisément, on dispose d'un morphisme de schémas en groupes

$$\begin{array}{rccc} F^r : & \mathrm{GL}_n(A) & \to & \mathrm{GL}_n(A) \\ & [a_{ij}] & \mapsto & [a_{ij}^{p^r}] \end{array} .$$

La représentation $V^{[r]}$ est définie par $V^{[r]} = (V, \rho \circ F^r)$. Si $r = 0$, on a une égalité $V^{[0]} = V$ mais en général la représentation $V^{[r]}$ est non isomorphe à V. Comprendre

la cohomologie de GL_n à coefficients dans des représentations ce type de représentation apparaît naturellement dans de nombreuses situations. Donnons-en trois exemples.

Tout d'abord, si V est une représentation simple de GL_n alors pour tout r, $V^{[r]}$ est également une représentation simple de GL_n. S'intéresser à la cohomologie des représentations simples implique donc de s'intéresser à la cohomologie de représentations tordues par le Frobenius.

Les représentations tordues par le Frobenius apparaissent aussi naturellement dans l'étude des relations entre la cohomologie du schéma en groupe GL_n et des groupes finis $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Plus précisément, supposons que $\Bbbk = \mathbb{F}_p$. Toute représentation V du schéma en groupes GL_n donne en particulier des représentations $V \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q$ des groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ pour tous les corps finis $\mathbb{F}_q$. On a donc un foncteur d'évaluation :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_{\mathbb{F}_q} : & \mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n & \to & \mathbb{F}_q\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)\text{—Mod} \\ & V & \mapsto & V \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q \end{array} .$$

Remarquons que si $q = p^r$, alors ce foncteur d'évaluation envoie toutes les représentations $V^{[nr]}$, $n \geqslant 0$ sur la même représentation V. En effet le morphisme F^{nr} est égal à l'identité sur le groupe de matrices $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Comme le foncteur $\mathrm{ev}_{\mathbb{F}_q}$ est exact, il induit un morphisme de $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n}(V^{[nr]}, W^{[nr]}) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q \to \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{F}_q\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)\text{—Mod}}(V \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q, W \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q) .$$

Ce morphisme ne peut pas être un isomorphisme en général (voir par exemple l'exemple 2.16). Un théorème de Cline Parshall Scott et Van der Kallen [5] assure cependant que si V et W sont des représentations de dimension finie, ce morphisme est un isomorphisme si les entiers q et n sont suffisamment grands par rapport à un borne explicite dépendant du degré i et de constantes de structure des représentations V et W. La cohomologie des représentations de GL_n tordues par le Frobenius donne donc accès aux représentations des groupes finis $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Une troisième motivation est reliée aux algèbres de cohomologie des schémas en groupes réductifs, tels que GL_n, SL_n, O_n, Sp_n, ou les schémas en groupes finis (c'est-à-dire représentés par une algèbre de dimension finie). Les résultats d'engendrement fini démontrés dans [13] pour le cas des schémas en groupes finis, et dans [35] pour le cas général, reposent tous sur des calculs explicites de certaines classes de cohomologie dans la cohomologie de GL_n à coefficients dans des représentations tordues par le Frobenius. Nous donnons plus de détails sur ce point particulier au chapitre 5.

Nous donnons maintenant quelques résultats qualitatifs importants sur la cohomologie des représentations tordues par le Frobenius.

1. La torsion de Frobenius n'affecte pas les invariants. Plus précisément, $v \in V$ est un invariant pour l'action de GL_n si et seulement si pour toute algèbre commutative de type fini A, l'élément $v \otimes 1_A$ est un invariant sous l'action de $\mathrm{GL}_n(A)$. En particulier, $v \otimes 1_A$ est invariant sous l'action du sous-groupe constitué des matrices d'éléments de la forme $[a_{ij}^{p^r}]$. On a donc une inclusion :

$$H^0(\mathrm{GL}_n, V) \subset H^0(\mathrm{GL}_n, V^{[r]}) .$$

On peut en fait montrer que cette inclusion est toujours une égalité.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

2. Plus généralement, on a pour tout $i \geqslant 0$ et tout $r \geqslant 0$ un morphisme de comparaison :
$$H^i(\mathrm{GL}_n, V^{[r]}) \to H^i(\mathrm{GL}_n, V^{[r+1]}). \qquad (*)$$
Un résultat de Cline Parshall et Scott [4] affirme que cette application $\Bbbk$-linéaire est toujours injective. La torsion de Frobenius augmente donc la taille de la cohomologie.
3. Si $\Bbbk = \mathbb{F}_p$ et V est de dimension finie, on sait de plus d'après le résultat de Cline Parshall Scott et Van der Kallen [5] mentionné ci-dessus que les applications ci-dessus sont des isomorphismes si r est assez grand. La valeur limite est reliée à la cohomologie des groupes finis $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Ces résultats donnent une bonne idée qualitative de la manière dont la torsion de Frobenius interagit avec la cohomologie. Cependant, obtenir des calculs exacts de cohomologie pour des représentation à coefficients tordus par le Frobenius est un problème difficile. A titre d'exemple, soit $\mathfrak{gl}_n$ la représentation adjointe de GL_n (c'est à dire l'espace vectoriel des matrices $n \times n$, munie de l'action de conjugaison). On sait montrer depuis le début des années 1980 au moins (c'est une conséquence de la théorie des bonnes filtrations expliquée à la section 6) que
$$H^i(\mathrm{GL}_n, \mathfrak{gl}_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 0, \\ \Bbbk & \text{si } i = 0. \end{cases}$$
Le calcul de $H^i(\mathrm{GL}_n, \mathfrak{gl}_n^{[r]}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n}(\Bbbk^{[r]}, \Bbbk^{[r]})$ (sous la condition que $n \geqslant p^r$) n'a lui été obtenu qu'à la fin des années 1990 par Friedlander et Suslin [13], grâce aux techniques de foncteurs strictement polynomiaux.

2 Les foncteurs strictement polynomiaux

On se fixe un corps $\Bbbk$ de caractéristique $p > 0$. On note $\mathcal{V}_\Bbbk$ la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie et des applications $\Bbbk$-linéaires. On note $S^*(V) = \bigoplus_{d \geqslant 0} S^d(V)$ l'algèbre symétrique sur un espace vectoriel V, et $V^\vee = \mathrm{Hom}_\Bbbk(V, \Bbbk)$ le dual $\Bbbk$-linéaire de V.

2.1 Rappels sur les polynômes

Nous commençons par rappeler la définition d'un polynôme. Si V, W sont deux espaces vectoriels de dimension finie, un polynôme $P : V \to W$ est un élément de $S^*(V^\vee) \otimes W$. Le polynôme P est dit *homogène de degré* d si c'est un élément de $S^d(V^\vee) \otimes W$, et il est dit *de degré* d si c'est la somme d'un polynôme homogène de degré d non nul et d'un élément de $\bigoplus_{i<d} S^i(V^\vee) \otimes W$. Étant donnés deux polynômes $P : U \to V$ et $Q : V \to W$, on peut former leur composé $Q \circ P : U \to W$ à l'aide de la formule usuelle de composition de polynômes. On peut également multiplier deux polynômes : le produit tensoriel d'un polynôme $P_1 \in S^*(V_1^\vee) \otimes W_1$ et d'un polynôme $P_2 \in S^*(V_2^\vee) \otimes W_2$ donne un polynôme
$$P_1 \otimes P_2 \in S^*(V_1^\vee) \otimes W_1 \otimes S^*(V_2^\vee) \otimes W_2 \simeq S^*((V_1 \times V_2)^\vee) \otimes (W_1 \otimes W_2).$$

Un autre point de vue sur les polynômes, plus naturel et moins calculatoire, est le suivant. Notons Ens la catégorie des ensembles. On associer à tout espace vectoriel V de

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

dimension finie un foncteur :

$$V^\dagger : \begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{\Bbbk} & \to & \mathrm{Ens} \\ A & \mapsto & V \otimes_{\Bbbk} A \end{array} .$$

Un tel foncteur est représentable par l'algèbre $S^*(V^\vee)$ car on a des isomorphismes naturels (en V et en A) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(S^*(V^\vee), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V^\vee, A) \simeq V \otimes_{\Bbbk} A .$$

Le lemme de Yoneda donne un isomorphisme naturel (où le premier Hom désigne les transformations naturelles entre les foncteurs)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V^\dagger, W^\dagger) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\Bbbk}}(S^*(W^\vee), S^*(V^\vee)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W^\vee, S^*(V^\vee)) \\ &\simeq S^*(V^\vee) \otimes W . \end{aligned}$$

Ainsi, un polynôme $P : V \to W$ s'interprète comme une transformation naturelle $P^\dagger : V^\dagger \to W^\dagger$, et on peut vérifier que sous cette interprétation, P est homogène de degré d si et seulement si pour toute algèbre A commutative de type fini et tout $a \in A$ on a $P^\dagger(v \otimes a) = P^\dagger(v \otimes 1_A)a^d$. On vérifie également que sous cette interprétation, la composée usuelle des polynômes correspond à la composée des transformations naturelles. Enfin, le produit tensoriel de deux polynômes peut aussi être décrit avec ce point de vue. Plus précisément, si V_1, V_2 sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $(V_1 \times V_2)^\dagger$ est canoniquement isomorphe au foncteur

$$V_1^\dagger \times V_2^\dagger : \begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{\Bbbk} & \to & \mathrm{Ens} \\ A & \mapsto & V_1 \otimes_{\Bbbk} A \times V_2 \otimes_{\Bbbk} A \end{array} ,$$

et l'application bilinéaire canonique $\pi : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ induit une transformation naturelle $\pi^\dagger : V_1^\dagger \times V_2^\dagger \to (V_1 \otimes V_2)^\dagger$ qui envoie $(v_1 \otimes a, v_2 \otimes b)$ sur l'élément $v_1 \otimes v_2 \otimes ab$. On peut vérifier que le produit tensoriel de deux polynômes $P_1 : V_1 \to W_1$ et $P_2 : V_2 \to W_2$ est le polynôme $P_1 \otimes P_2$ correspondant à la transformation naturelle composée

$$(V_1 \times V_2)^\dagger \simeq V_1^\dagger \times V_2^\dagger \xrightarrow{P_1^\dagger \times P_2^\dagger} W_1^\dagger \times W_2^\dagger \xrightarrow{\pi^\dagger} (W_1 \otimes W_2)^\dagger .$$

Remarque 3.1 (Polynômes et applications polynomiales). Notons $\mathscr{P}ol_{\Bbbk}$ la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur $\Bbbk$, et dont les morphismes sont les polynômes. Alors on a un foncteur d'oubli :

$$\mathscr{P}ol_{\Bbbk} \to \mathrm{Ens}$$

qui envoie un espace vectoriel V sur l'ensemble V et un polynôme $P : V \to W$ sur l'application $P_{\Bbbk}^\dagger : V \to W$. Si $\Bbbk$ est un corps infini, ce foncteur est fidèle, c'est-à-dire qu'on ne perd pas d'information en passant d'un polynôme à l'application qu'il définit, et on peut sans dommage traiter les polynômes comme des applications entre espaces vectoriels. Ceci devient faux si $\Bbbk = \mathbb{F}_q$. Par exemple les deux polynômes $x, x^q : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ définissent la même application.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

2.2 Foncteurs et morphismes de foncteurs

Définition 3.2.

Un *foncteur strictement polynomial* F est la donnée :

- pour tout espace vectoriel de dimension finie V, d'un espace vectoriel de dimension finie $F(V)$, qu'on notera souvent simplement FV pour alléger les notations,
- pour toute paire (V,W) d'espaces vectoriels de dimension finie d'un polynôme $F_{V,W} : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(FV,FW)$, vérifiant les formules suivantes pour tout choix de U,V,W :
  1. $F_{V,V}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{FV}$,
  2. $F_{V,W}(f) \circ F_{U,V}(g) = F_{U,W}(f \circ g)$.

Le *degré* d'un foncteur strictement polynomial est défini par :

$$\deg F = \sup\{ \deg F_{V,W} \mid V,W \in \mathscr{V}_{\Bbbk} \} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} .$$

Enfin, un foncteur F est dit *homogène de degré d* si pour tout couple (V,W), $F_{V,W}$ est un polynôme homogène de degré d.

Dans la définition 3.2, la première formule concerne l'égalité de deux éléments de $\mathrm{End}_{\Bbbk}(FV)$. La deuxième formule ne doit pas être interprétée comme l'égalité de deux éléments de $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U,W)$, mais plutôt comme la condition plus forte de l'égalité de deux polynômes en les variables f et g. Plus précisément, $F_{V,W}(f) \circ F_{U,V}(g)$ est une écriture symbolique pour le polynôme $c \circ (F_{V,W} \otimes F_{U,V})$ où c est le polynôme de homogène de degré 1 donné par l'application linéaire de composition :

$$c : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(FV,FW) \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(FU,FV) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(FU,FW) ,$$

et $F_{U,W}(f \circ g)$ désigne la composée $F_{U,V} \circ b$ où b désigne le polynôme homogène de degré 2 donné par l'application de composition :

$$b : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W) \times \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U,V) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U,W) .$$

En vertu de la remarque 3.1, cette subtilité sur l'interprétation de la seconde formule peut être oubliée si $\Bbbk$ est un corps infini.

Définition 3.3.

Un *morphisme de foncteurs strictement polynomiaux* $\theta : F \to G$ est la donnée d'une famille d'application $\Bbbk$-linéaires $\theta_V : F(V) \to G(V)$, telles que pour tout couple (V,W) on ait une égalité de polynômes :

$$\theta_W \circ F_{V,W}(f) = G_{V,W}(f) \circ \theta_V .$$

On note $\mathscr{P}_{\Bbbk}$ la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux de degré fini, et des morphismes de foncteurs strictement polynomiaux.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

2.3 Petit catalogue d'exemples

On définit le foncteur strictement polynomial de d-ième puissance symétrique S^d, qui à un espace vectoriel V fait correspondre $S^d(V)$, et dont les polynômes $S^d_{V,W}$ sont définis par les application naturelles :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)\otimes_{\Bbbk} A & & \\ \| & & \\ \mathrm{Hom}_A(V\otimes_{\Bbbk} A, W\otimes_{\Bbbk} A) & \xrightarrow{S^d_A} & \mathrm{Hom}_A(S^d_A(V\otimes_{\Bbbk} A), S^d_A(W\otimes_{\Bbbk} A)) \\ & & \| \\ & & \mathrm{Hom}_A(S^d(V)\otimes_{\Bbbk} A, S^d(W)\otimes_{\Bbbk} A) \\ & & \| \\ & & \mathrm{hom}_{\Bbbk}(S^d(V), S^d(W))\otimes_{\Bbbk} A\,, \end{array}$$

où S^d_A désigne le foncteur de d-ième puissance symétrique des A-modules libres de type fini vers les A-modules libres de type fini. On vérifie facilement que S^d est un foncteur strictement polynomial homogène de degré d. On peut facilement décliner cette construction.

Exemples 3.4. On a des foncteurs strictement polynomiaux $S^d, \Lambda^d, \Gamma^d, \otimes^d$ homogènes de degré d, qui envoient un espace vectoriel V de dimension finie respectivement sur la d-ième puissance symétrique $S^d(V)$, la d-ième puissance extérieure $\Lambda^d(V)$, la d-ième puissance tensorielle $V^{\otimes d}$ et la d-ième puissance divisée $\Gamma^d(V) = (V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$, où $\mathfrak{S}_d$ désigne le groupe symétrique de cardinal $d!$ qui agit en permutant les facteurs du produit tensoriel.

Fixons deux foncteurs strictement polynomiaux F et G. On dispose d'un certain nombre d'opérations qui permettent de construire des nouveaux foncteurs à partir de F et G.

1. Le produit $F\times G$ associe à tout V l'espace vectoriel $F(V)\times G(V)$ et à tout couple (V,W) le polynôme $(F\times G)_{V,W}$ défini comme la composée de polynômes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W) & & \\ \downarrow\Delta & & \\ \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)^{\times 2} & \xrightarrow{F_{V,W}\times G_{V,W}} & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(FV,FW)\times \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(GV,GW) \\ & & \downarrow\Pi \\ & & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}((F\times G)(V),(F\times G)(W)) \end{array}$$

   où Δ et Π sont les polynômes homogènes de degré 1 donnés par les applications linéaire $\Delta(f) = (f,f)$ et $\Pi(f,g) = f\times g$.

2. Le produit tensoriel $F\otimes G$ associe à V le produit tensoriel $F(V)\otimes G(V)$, et à tout couple (V,W) le polynôme $(F\otimes G)_{V,W}$ donné par la composée de polynômes :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W) & & \\ \downarrow\Delta & & \\ \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)^{\times 2} & \xrightarrow{F_{V,W}\otimes G_{V,W}} & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(FV,FW)\otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(GV,GW) \\ & & \| \\ & & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}((F\otimes G)(V),(F\otimes G)(W))\,. \end{array}$$

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2022

Si F et G sont homogènes de degrés respectifs d et e alors $F \otimes G$ est homogène de degré $d+e$.

3. La composée $F \circ G$ associe à V l'espace vectoriel $F(G(V))$ et à tout couple (V,W) le polynôme $(F\circ G)_{V,W}$ défini comme la composée :
$$(F\circ G)_{V,W} = F_{G(V),G(W)} \circ G_{V,W}\,.$$
Si F et G sont homogènes de degrés respectifs d et e alors $F\circ G$ est homogène de degré de.

4. Si $\theta : F \to G$ est un morphisme, alors le noyau $\ker\theta$ associe à tout V le noyau de $\theta_V : F(V) \to G(V)$, et les dont les polynômes $(\ker\theta)_{V,W}$ correspondent aux applications naturelles
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(V\otimes_{\Bbbk} A, W\otimes_{\Bbbk} A) & \to & \mathrm{Hom}_A(\ker(\theta_V)\otimes_{\Bbbk} A, (\ker\theta_W)\otimes_{\Bbbk} A)\,. \\ f & \mapsto & F_{V,W}(f) \end{array}$$
On définit de manière analogue l'image et le noyau d'un morphisme.

La proposition suivante est une vérification élémentaire (mais un peu longue) à partir des constructions de produits noyaux, conoyaux, produits tensoriels données ci-dessus.

Proposition 3.5.

La catégorie $\mathscr{P}_{\Bbbk}$ est une catégorie abélienne $\Bbbk$-linéaire. De plus, le produit tensoriel définit un produit monoïdal symétrique :
$$\otimes : \mathscr{P}_{\Bbbk}\times\mathscr{P}_{\Bbbk} \to \mathscr{P}_{\Bbbk}\,.$$

On dispose également d'une dualité sur la catégorie $\mathscr{P}_{\Bbbk}$. Plus précisément si F est un foncteur strictement polynomial, son dual $F^\sharp$ associe à chaque V l'espace vectoriel $F(V^\vee)^\vee$, où '$^\vee$' désigne la dualité des espaces vectoriels. Les polynômes $F^\sharp_{V,W}$ sont définis par la composée des polynômes (le premier et le dernier sont les polynômes homogènes de degré 1 donnée par l'isomorphisme de dualité linéaire)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W) & & \\ \downarrow\simeq & & \\ \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W^\vee,V^\vee) & \xrightarrow{F_{W^\vee,V^\vee}} & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(W^\vee),F(V^\vee)) \\ & & \downarrow\simeq \\ & & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F^\sharp V, F^\sharp W)\,. \end{array}$$

De plus, étant donné un morphisme $\theta : F \to G$, la famille des $\theta^\sharp_V = (\theta_{V^\vee})^\vee$ définit un morphisme de G vers F. Comme cette opération de dualité est clairement involutive (tous les espaces vectoriels sont de dimension finie), on obtient l'énoncé suivant.

Proposition 3.6.

La dualité définit une anti-équivalence de catégories :
$$^\sharp : \mathscr{P}_{\Bbbk} \to \mathscr{P}_{\Bbbk}\,.$$

On vérifie facilement à partir des définitions les isomorphismes suivants.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Exemples 3.7. On a $(S^d)^\sharp \simeq \Gamma^d$, $(\Lambda^d)^\sharp \simeq \Lambda^d$, $(\otimes^d)^\sharp \simeq \otimes^d$.

Rappelons qu'une catégorie est dite $\Bbbk$-linéaire lorsque ses ensembles de morphismes sont munis de structure d'espace vectoriel et que la composition est bilinéaire. La structure d'espace vectoriel est ici évidente : comme les θ_V dans la definition 3.3 sont des applications linéaires, on peut en prendre des combinaisons linéaires. Le lemme suivant est un exemple fondamental de calcul d'espace de morphismes.

Lemme 3.8. Pour tout $d \geqslant 0$, on a un isomorphisme de $\Bbbk$-algèbres :

$$\Bbbk\mathfrak{S}_d \simeq \mathrm{End}_{\mathscr{P}_\Bbbk}(\otimes^d).$$

Démonstration. pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ on note $\phi_{\sigma,V} : V^{\otimes d} \to V^{\otimes d}$ l'application linéaire telle que $\theta_{\sigma,V}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)}$. On vérifie que les applications $\theta_{\sigma,V}$ définissent un morphisme $\theta_\sigma : \otimes^d \to \otimes^d$. l'application $\Bbbk$-linéaire $\phi : \Bbbk\mathfrak{S}_d \to \mathrm{End}_{\mathscr{P}_\Bbbk}(\otimes^d)$ telle que $\phi(\sigma) = \phi_\sigma$ est clairement un morphisme de $\Bbbk$-algèbres. Il reste à montrer que ϕ est bijective. Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\Bbbk^d$. Alors la famille des $e_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma^{-1}(d)}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ est une famille libre de $\Bbbk^{d^{\otimes d}}$. En d'autres termes, les $\phi_{\sigma,\Bbbk^d}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$ forment une famille libre. Par conséquent, il ne peut pas y avoir de relation linéaire non triviale entre les ϕ_σ et ϕ est donc injective. Démontrons la surjectivité. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\Bbbk^n$. Si $I = (i_1, \ldots, i_d)$, on note $e_I = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$ et E_I le sous-espace vectoriel de $\Bbbk^{n^{\otimes d}}$ de base les e_J dans la $\mathfrak{S}_d$-orbite de e_I. Alors $\Bbbk^{n^{\otimes d}}$ se décompose comme une somme directe de sous-espace du type E_I. De plus, pour tout I l'application linéaire $f_I : \Bbbk^d \to \Bbbk^n$ telle que $f(e_k) = e_{i_k}$ induit un isomorphisme du sous-espace $E_{(1,\ldots,d)}$ de $\Bbbk^d$ sur le sous-espace E_I. La naturalité des morphismes de foncteurs strictement polynomiaux implique donc que deux endomorphismes θ, θ' de $\otimes^d$ sont égaux si et seulement si leurs restrictions au sous-espace $E_{(1,\ldots,d)}$ de $(\Bbbk^d)^{\otimes d}$ sont égales, donc si et seulement si $\theta_{\Bbbk^d}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) = \theta'_{\Bbbk^d}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$. Finalement si θ est un morphisme, un raisonnement de naturalité du même style, permet de montrer que $\theta_{\Bbbk^d}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$ est une combinaison linéaire des $e_{\sigma_{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma_{-1}(d)}$. Donc θ est une combinaison linéaire (avec les mêmes coefficients) des ϕ_σ, ainsi ϕ est surjective. □

Nous finissons ce catalogue d'exemples par un exemple fondamental pour la suite : les foncteurs de torsion de Frobenius $I^{(r)}$. Fixons un entier $r \geqslant 0$. Pour tout anneau commutatif A de caractéristique p on a un morphisme de Frobenius $F^r : A \to A$ qui élève un élément de A à la puissance p^r, et on note ${}_rA$ le groupe abélien A muni de sa structure de A—A bimodule donnée par $\lambda \cdot a \cdot \mu = F^r(\lambda) a \mu$. Pour tout A-module M considéré comme un module à droite, on dispose du A-module $M \otimes_A {}_rA$ obtenu par extension des scalaires via $F^r : A \to A$. Le foncteur strictement polynomial $I^{(r)}$ fait correspondre à tout V l'espace vectoriel

$$I^{(r)}(V) = V \otimes {}_r\Bbbk$$

et les polynômes $I^{(r)}_{V,W}$ sont donnés par les applications

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W) \otimes_\Bbbk A & & \\
\| & & \\
\mathrm{Hom}_A(V \otimes_\Bbbk A, W \otimes_\Bbbk A) & \xrightarrow{-\otimes_A {}_rA} & \mathrm{Hom}_A(V \otimes_\Bbbk A \otimes_A {}_rA, W \otimes_\Bbbk A \otimes_A {}_rA) \\
 & & \| \\
 & & \mathrm{Hom}_A(V \otimes_\Bbbk {}_r\Bbbk \otimes_\Bbbk A, W \otimes_\Bbbk {}_r\Bbbk \otimes_\Bbbk A) \\
 & & \| \\
 & & \mathrm{Hom}_\Bbbk(I^{(r)}(V), I^{(r)}(W)) \otimes_\Bbbk A\,.
\end{array}$$

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

On voit facilement que $I^{(r)}$ est un foncteur strictement polynomial homogène de degré p^r. On peut aussi donner une description de $I^{(r)}$ comme sous-foncteur de S^{p^r}. Plus précisément, pour tout V, la propriété universelle d'extension des scalaires le long de $F^r : \Bbbk \to \Bbbk$ permet de définir une application $\Bbbk$-linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \theta_V : & V \otimes_{\Bbbk,\, r} \Bbbk & \to & S^{p^r}(V) \\ & v \otimes 1 & \mapsto & v^p \end{array} .$$

On vérifie d'après les définitions que les θ_V définissent un morphisme $\theta : I^{(r)} \to S^p$. De plus, si V est un espace vectoriel de base $(e_1, \dots, e_n)$ alors la famille $(e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1)$ est une base de $I^{(r)}(V) = V \otimes_{\Bbbk,\, r} \Bbbk$, et $(e_1^{p^r}, \dots, e_n^{p^r})$ est une famille libre de $S^{p^r}(V)$. On obtient donc le lemme suivant.

Lemme 3.9. Le morphisme $\theta : I^{(r)} \to S^{p^r}$ est un monomorphisme. Il induit un isomorphisme entre $I^{(r)}$ et le sous-foncteur strictement polynomial de S^{p^r} qui à tout V associe le sous-espace vectoriel de $S^{p^r}(V)$ des combinaisons linéaires de tenseurs symétriques du type v^{p^r}, $v \in V$.

Une autre vérification élémentaire très utile est le lemme suivant.

Lemme 3.10. Pour tout $r \geqslant 0$, on a un isomorphisme $(I^{(r)})^\sharp \simeq I^{(r)}$.

2.4 Construction de représentations

Les foncteurs strictement polynomiaux peuvent être interprétés comme des procédés de construction de représentations. Plus précisément, soit (V, ρ) une représentation de dimension finie d'un schéma en groupe G. Alors pour tout foncteur strictement polynomial F, la transformation naturelle entre foncteurs de domaine $\mathrm{Alg}_\Bbbk$ et de codomaine les monoïdes :

$$\mathrm{End}_A(V \otimes_\Bbbk A) = \mathrm{End}_\Bbbk(V) \otimes A \xrightarrow{F_{V,V}} \mathrm{End}_\Bbbk(F(V)) \otimes A = \mathrm{End}_A(F(V) \otimes_\Bbbk A)$$

se restreint en un morphisme de schémas en groupes $\mathrm{GL}_V \xrightarrow{F_{V,V}} \mathrm{GL}_{F(V)}$. Le couple $(F(V), F_{V,V} \circ \rho)$ définit donc une représentation du schéma en groupes G. On vérifie facilement que tout morphisme $\theta : F \to G$ induit un morphisme G équivariant entre les représentations $F(V)$ et $G(V)$, et on obtient l'énoncé suivant.

Proposition 3.11.

Pour toute représentation de dimension finie (V, ρ) du schéma en groupes G, l'évaluation sur V induit un foncteur exact :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev} : & \mathscr{P}_\Bbbk & \to & \mathrm{Rep}\, G \\ & F & \mapsto & F(V) \end{array} .$$

Rappelons que l'un des objectifs de l'introduction des foncteurs strictement polynomiaux est d'étudier les représentations tordues par le Frobenius (cf. la section 1 de ce chapitre). L'exemple suivant montre l'importance des foncteurs de torsion de Frobenius $I^{(r)}$.

Exemple 3.12. Si $\Bbbk^n$ est la représentation standard de $G = \mathrm{GL}_n$, alors pour tout foncteur strictement polynomial F la représentation $(F \circ I^{(r)})(\Bbbk^n)$ est isomorphe à la représentation $F(\Bbbk^n)^{[r]}$.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

2.5 Décompositions selon le degré

Rappelons que si $\mathscr{A}$ est une catégorie abélienne dont les colimites filtrantes sont exactes, et si l'on dispose d'une famille de sous-catégories pleines $\mathscr{A}_d$ de $\mathscr{A}$, pour $d \in D$, la décomposition de la catégorie $\mathscr{A}$ comme produit de ses sous-catégories pleines $\mathscr{A}_d$:

$$\mathscr{A} = \prod_{d\in D} \mathscr{A}_d$$

est équivalente aux deux conditions suivantes.

(1) Si A est un objet de $\mathscr{A}_d$ et B est un objet de $\mathscr{A}_e$ avec $d \neq e$ alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B) = 0$.

(2) Tout objet A de $\mathscr{A}$ se décompose comme une somme directe d'objets A_d de $\mathscr{A}_d$:

$$A = \bigoplus_{d\in D} A_d \,.$$

Remarque 3.13 (Produits et sommes directes). On pourrait s'attendre à une décomposition en produit d'objets A_d dans la condition (2). En fait, si les conditions (1) et (2) sont satisfaites, cette somme directe est également un produit catégorique (la vérification utilise que les colimites filtrantes sont exactes, ce implique que le morphisme canonique des coproduits vers les produits est injectif). Le choix d'utiliser la somme directe dans la formulation de (2) est justifié par le fait que les catégories que nous considérerons (Rep G ou foncteurs strictement polynomiaux) sont équipées de foncteurs d'oubli vers les espaces vectoriels qui préservent les sommes directes mais pas les produits infinis. En privilégiant la notation avec les sommes directes, on rend donc transparent le passage entre opérations usuelles sur les espaces vectoriels et opérations usuelles sur les représentations ou sur les foncteurs.

De même, $\mathscr{A}$ se décompose en somme directe de sous-catégories pleines $\mathscr{A}_d$:

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{d\in D} \mathscr{A}_d$$

si et seulement si la condition (1) est vérifiée, ainsi qu'une version forte de la condition (2) qui impose en plus que dans la décomposition en somme directe, *seul un nombre fini d'objets A_d sont non nuls*. Un exemple classique de situation où l'on a une décomposition est le suivant.

Lemme 3.14. Soit C une cogèbre, et C_d, $d \in D$ une famille de sous-cogèbres de C. On identifie $\mathrm{Comod}-C_d$ à la sous catégorie pleine de $\mathrm{Comod}-C$ dont les objets sont les comodules dont la coaction se restreint en $\Delta_V : V \to V \otimes C_d$. On suppose que $C = \bigoplus_{d\in D} C_d$. Alors on a une décomposition :

$$\mathrm{Comod}-C = \prod_{d\in D} \mathrm{Comod}-C_d \,.$$

Démonstration. La condition (1) est facilement vérifiée. Vérifions (2). Soit $\epsilon_d : C \to \Bbbk$ la composée de de $\epsilon : C_d \to \Bbbk$ avec la projection canonique $q_d : C \to C_d$. Les axiomes des cogèbres montrent que $(\epsilon_d \otimes \epsilon_e)\circ\Delta = \delta_{d,e}\epsilon_d$, où $\delta_{d,e}$ vaut 1 si $e = d$ et 0 sinon. Notons π_d la composée :

$$V \xrightarrow{\Delta_V} V \otimes C \xrightarrow{\mathrm{Id}_V \otimes \epsilon_d} V \,.$$

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

On a alors $\sum \pi_d = \mathrm{Id}_V$, $\pi_d \circ \pi_e = \delta_{d,e}\pi_d$. On a donc une décomposition $V = \bigoplus_{d\in D} V_d$, où $V_d = \mathrm{Im}\,\pi_d$ et V_d est un C_d-comodule. □

Donnons deux exemples classiques d'application du lemme 3.14. Le premier est l'exemple des représentations du schéma en groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m = \mathrm{GL}_1$. Une représentation V de $\mathbb{G}_m$ est appelée *un espace de poids* $d \in \mathbb{Z}$ si pour toute algèbre A de type fini, l'action d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{G}_m(A)$ sur $V \otimes_{\Bbbk} A$ est la multiplication des vecteurs par le scalaire λ^d. Notons $\mathrm{Rep}_d\,\mathbb{G}_m$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}\,\mathbb{G}_m$ dont les objets sont les représentations de $\mathbb{G}_m$ de poids d.

Lemme 3.15. On a une décomposition de la catégorie $\mathrm{Rep}\,\mathbb{G}_m$:

$$\mathrm{Rep}\,\mathbb{G}_m = \prod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Rep}_d\,\mathbb{G}_m\ .$$

Démonstration. Le schéma en groupes $\mathbb{G}_m$ est représenté par l'algèbre

$$\Bbbk[\mathbb{G}_m] = \Bbbk[x,y]/\langle xy=1\rangle = \Bbbk[x,x^{-1}].$$

L'espace vectoriel $\Bbbk[G_m]$ a pour base les x^d, $d\in\mathbb{Z}$. Notons $\Bbbk[G_m]_d$ la droite engendrée par x^d. Comme la comultiplication est donnée par $\Delta(x^d) = x^d \otimes x^d$, $\Bbbk[\mathbb{G}_m]_d$ est une sous-cogèbre de $\Bbbk[\mathbb{G}_m]$. On vérifie facilement que V est un espace de poids d sous l'action de $\mathbb{G}_m$ si et seulement si la coaction $V \to V\otimes\Bbbk[\mathbb{G}_m]$ se restreint en une coaction $V \to V\otimes\Bbbk[\mathbb{G}_m]_d$. Le lemme 3.15 découle donc du lemme 3.14. □

Plus généralement, une représentation de GL_n est *homogène de degré* $d\in\mathbb{Z}$ si sa restriction au sous-groupe $\mathbb{G}_m$ des homothéties est un espace de poids d. On note $\mathrm{Rep}_d\,\mathrm{GL}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n$ dont les objets sont les représentations de degré d.

Proposition 3.16.
On a une décomposition de la catégorie $\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n$:

$$\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n = \prod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Rep}_d\,\mathrm{GL}_n\ .$$

Démonstration. Posons $\deg x_{ij} = 1$ et $\deg t = -n$. Alors l'algèbre

$$\Bbbk[\mathrm{GL}_n] = \Bbbk[x_{ij}\ 1\leqslant i,j\leqslant d\ ,\ t]\Big/\langle \det[x_{ij}]t = 1\rangle$$

est graduée par le degré. Notons $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]_d$ le sous-espace des éléments homogènes de degré d. Comme la comultiplication est donnée par $\Delta(x_{ij}) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_{ik}\otimes x_{kj}$ et $\Delta(t) = t\otimes t$, on constate que les $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]_d$ forment des sous-cogèbres de $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]$. Le lemme 3.14 donne donc une décomposition

$$\mathrm{Comod}-\Bbbk[\mathrm{GL}_n] = \prod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Comod}-\Bbbk[\mathrm{GL}_n]_d\ . \qquad (\dagger)$$

De plus le morphisme d'algèbres de Hopf $f : \Bbbk[\mathrm{GL}_n] \to \Bbbk[\mathbb{G}_m]$ correspondant au morphisme de schéma en groupes $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ préserve les degrés. Donc V est un $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]_d$-comodule si et seulement si f le transforme en un $\Bbbk[\mathbb{G}_m]_d$-comodule, c'est à dire en un espace de poids d sous l'action de $\mathbb{G}_m$. Si on repasse au point de vue des actions de schémas en groupes, la décomposition (†) donne donc exactement la décomposition de la proposition 3.16. □

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Remarque 3.17. Comme conséquence formelle de la proposition 3.16, les catégories $\mathrm{Rep}_d\,\mathrm{GL}_n$ possèdent assez d'injectifs, et si V et W sont homogènes d'un degré donné, alors

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n}(V,W)=\begin{cases}\mathrm{Ext}^*_{\mathrm{Rep}_d\,\mathrm{GL}_n}(V,W) & \text{si } \deg V=d=\deg W,\\ 0 & \text{si } \deg V\neq\deg W.\end{cases}$$

La représentation triviale est homogène de degré 0. En particulier, si on note V_0 la composante homogène de degré nul d'une représentation V, l'inclusion $V_0\subset V$ induit un isomorphisme :

$$H^*(\mathrm{GL}_n,V_0)\simeq H^*(\mathrm{GL}_n,V).$$

Passons maintenant aux foncteurs strictement polynomiaux. Si F est un foncteur strictement polynomial, alors en l'évaluant sur la représentation standard $\Bbbk^n$ (c'est à dire l'espace $\Bbbk^n$ muni de l'action usuelle de GL_n par multiplication matricielle) on obtient une représentation $F(\Bbbk^n)$ de GL_n. Le lemme suivant suit facilement de la définition de polynôme homogène de degré d.

Lemme 3.18. Un foncteur strictement polynomial F est homogène de degré d si et seulement si pour tout $n\geqslant 1$, $F(\Bbbk^n)$ est une représentation de GL_n de degré d.

On note $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}_\Bbbk$ dont les objets sont les foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d.

Proposition 3.19.

On a une décomposition de la catégorie $\mathscr{P}_\Bbbk$:

$$\mathscr{P}_\Bbbk=\bigoplus_{d\geqslant 0}\mathscr{P}_{d,\Bbbk}.$$

Démonstration. Vérifions la condition (1). Si $\theta:F\to G$ est un morphisme entre deux foncteurs homogènes de degrés distincts alors pour tout n, $\theta_{\Bbbk^n}:F(\Bbbk^n)\to G(\Bbbk^n)$ est un morphisme équivariant entre deux représentations de $\mathbb{G}_m$ de poids distincts, donc $\theta_{\Bbbk^n}=0$. Vérifions (2). Si F est un foncteur strictement polynomial, alors pour tout V, l'espace vectoriel FV se décompose en sous-espaces de poids sous l'action du schéma en groupes $\mathbb{G}_m$ des homothéties

$$FV=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}FV_d.$$

De plus si $f\in\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)$ alors l'application $\Bbbk$-linéaire $F_{V,W}(f\otimes a\,\mathrm{Id}_A):FV\otimes_\Bbbk A\to FW\otimes_\Bbbk A$ est $\mathbb{G}_m(A)$-équivariante, car pour tout $\lambda\in\mathbb{G}_m(A)$,

$$(\lambda\,\mathrm{Id}_{W\otimes A})\circ(f\otimes a\,\mathrm{Id}_A)=(f\otimes a\,\mathrm{Id}_A)\circ(\lambda\,\mathrm{Id}_{V\otimes A}).$$

En particulier, $F_{V,W}(f\otimes a\,\mathrm{Id}_A)$ se restreint en des applications $FV_d\otimes_\Bbbk A\to FW_d\otimes_\Bbbk A$. On note $F_{d,V,W}:\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)\to\mathrm{Hom}_\Bbbk(FV,FW)$ le polynôme correspondant aux applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)\otimes_\Bbbk A & \mapsto & \mathrm{Hom}_A(FV_d\otimes_\Bbbk A,FW_d\otimes_\Bbbk A)\\ f\otimes a & \mapsto & F_{V,W}(f\otimes a\,\mathrm{Id}_A)\end{array}.$$

Alors la donnée des espaces vectoriels FV_d et des polynômes $F_{d,V,W}$ définit un foncteur strictement polynomial F_d, homogène de degré d. On vérifie ensuite facilement que $F=\bigoplus_{d\geqslant 0}F_d$. Comme F est de degré borné, on a $F_d=0$ pour $d\geqslant\deg F$, donc la somme directe est finie. □

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Remarque 3.20. Nous verrons par la suite que les catégories $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ (donc $\mathscr{P}_\Bbbk$) possèdent assez de projectifs et d'injectifs. On peut donc y calculer des Ext de la manière usuelle. Une conséquence formelle de la décomposition en somme directe de $\mathscr{P}_\Bbbk$ est que si F et G sont homogènes, alors

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(F,G) = \begin{cases} \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{d,\Bbbk}}(F,G) & \text{si } \deg F = d = \deg G, \\ 0 & \text{si } \deg F \neq \deg G. \end{cases}$$

3 Extensions de foncteurs et cohomologie de GL_n

Notons $\Bbbk^n$ la représentation standard de GL_n, c'est-à-dire dont le morphisme ρ est l'identité de GL_n, ou de manière équivalente pour toute $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini A, $\mathrm{GL}_n(A)$ agit sur $\Bbbk^n \otimes_\Bbbk A = A^n$ de la façon usuelle (par la multiplication matricielle).

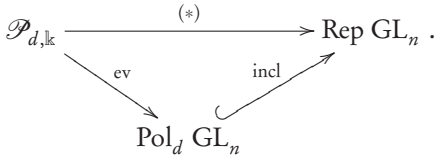
Comme nous l'avons vu dans la section 2.4 l'évaluation d'un foncteur strictement polynomial sur $\Bbbk^n$ définit une représentation $F(\Bbbk^n)$ de GL_n. A partir de deux foncteurs strictement polynomiaux F et G, on peut donc calculer deux types de quantités cohomologiques, les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}_\Bbbk}(F,G)$ d'une part, et les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n))$, $n \geqslant 1$ d'autre part. Comme le foncteur d'évaluation sur $\Bbbk^n$ est exact (voir la proposition 3.11), il induit des morphismes de comparaison :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}_\Bbbk}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n))\,. \qquad (*)$$

L'objectif de cette section 3 est de d'expliquer le contenu du théorème suivant, dû à Friedlander et Suslin [13].

Théorème 3.21 (Friedlander et Suslin).
Si $n \geqslant \deg F$ ou $n \geqslant \deg G$, alors pour tout $i \geqslant 0$ le morphisme de comparaison $(*)$ est un isomorphisme.

Le schéma de la démonstration du théorème 3.21 est le suivant. En vertu des décompositions des foncteurs et des représentations selon le degré, comme expliqué à la section 2.5, on peut se restreindre à démontrer le théorème 3.21 dans le cas où F et G sont homogènes de même degré d. La démonstration du théorème 3.21 peut se décomposer en deux parties. En effet, l'évaluation d'un foncteur strictement polynomial homogène de degré d ne construit pas n'importe quel type de représentation de GL_n : ce procédé construit des représentations polynomiales homogènes de degré d. En notant $\mathrm{Pol}_d\ \mathrm{GL}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}\ \mathrm{GL}_n$ dont les objets sont les représentations polynomiales homogènes de degré d, on a donc un diagramme commutatif :



© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Pour démontrer le théorème 3.21, il suffit alors de montrer que le foncteur d'évaluation ev et le foncteur d'inclusion incl induisent tous les deux des isomorphismes au niveau des Ext^*. Ce sera toujours vrai pour le foncteur incl, d'après le théorème 3.29. Ce sera vrai pour le foncteur ev lorsque $n \geqslant d$, d'après le théorème 3.33.

Un point central de la démonstration des théorèmes 3.29 et 3.33 est la description des représentations polynomiales homogènes de degré d de GL_n en termes de modules sur les algèbres de Schur $S(n,d)$. Ces algèbres sont des objets classiques de la théorie des représentations, introduites par I. Schur vers 1900 en caractéristique nulle, et dont les versions de caractéristique $p > 0$ ont été étudiées dans les années 1980 notamment par J. A. Green (voir la monographie [14]) et S. Donkin.

La suite de la section donne des détails sur les représentations polynomiales, les algèbres de Schur et les propriétés des foncteurs ev et incl.

3.1 Le schéma en monoïdes des matrices carrées

Notons Mon la catégorie des monoïdes et des morphismes de monoïdes. Le foncteur

$$\begin{array}{rccc} M_n : & \mathrm{Alg}_{\Bbbk} & \to & \mathrm{Mon} \\ & A & \to & M_n(A) \end{array}$$

est un schéma en monoïdes (algébrique affine), c'est à dire qu'il est représentable. Plus précisément, il est représenté par la $\Bbbk$-algèbre

$$\Bbbk[M_n] = \Bbbk[x_{ij}\,,\, 1 \leqslant i,j \leqslant n]\,.$$

Les schémas en monoïdes se traitent comme les schémas en groupes. En particulier, la structure de monoïde sur les matrices carrées correspond à une structure de bigèbre sur $\Bbbk[M_n]$, c'est à dire à la donnée de deux morphismes de $\Bbbk$-algèbres

$$\Delta : \Bbbk[M_n] \to \Bbbk[M_n]^{\otimes 2}\,, \quad \epsilon : \Bbbk[M_n] \to \Bbbk\,,$$

vérifiant les axiomes de coassociativité et de coneutralité de la définition 2.3. Plus précisément, les morphismes Δ et ϵ sont donnés par les formules (où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon)

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}\,, \quad \epsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}\,.$$

Les représentations des schémas en monoïdes se traitent comme celles des schémas en groupes. Une représentation de M_n est donc la donnée d'un $\Bbbk$-espace vectoriel V muni d'un morphisme de monoïdes $\rho : M_n \to \mathrm{End}_V$. De manière équivalente, V est muni d'actions

$$M_n(A) \times V \otimes_{\Bbbk} A \to V \otimes_{\Bbbk} A\,,$$

naturelles en A, pour toute $\Bbbk$-algèbre de type fini A. On peut également la définir comme un comodule sur la bigèbre $\Bbbk[M_n]$ (voir la définition 2.8 et la remarque 2.9). Si $\Bbbk$ est algébriquement clos, à l'instar du cas des groupes linéaires algébriques (proposition 2.19), l'évaluation sur $\Bbbk$ induit une équivalence de catégories :

$$\mathrm{Rep}\, M_n \simeq \mathrm{Rep}\, M_n(\Bbbk)\,,$$

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

où $\mathrm{Rep}\, M_n(\Bbbk)$ désigne la catégorie des représentations du monoïde $M_n(\Bbbk)$ dont le morphisme $\rho : M_n(\Bbbk) \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ est un polynôme (si $\dim_{\Bbbk} V < \infty$) ou qui peuvent s'écrire comme réunion de sous-représentations de ce type (si $\dim_{\Bbbk} V = \infty$).

3.2 Représentations polynomiales de GL_n

Pour introduire la notion de représentation polynomiale, nous considérons d'abord le cas concret où $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ est algébriquement clos. Les représentations de GL_n s'identifient alors aux représentations rationnelles du groupe linéaire algébrique $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, au sens de la définition 1.4. Rappelons que l'on voit $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ comme le sous-groupe de $M_{n+1}(\Bbbk)$ des matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \det M \end{bmatrix}, \quad M \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk).$$

Une représentation rationnelle de dimension finie de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ est donc un espace vectoriel $\Bbbk^q$, muni d'une action $\rho : \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \to M_q(\Bbbk)$ qui est la restriction d'un polynôme $P : M_{n+1}(\Bbbk) \to M_q(\Bbbk)$. De manière équivalente, on peut trouver des polynômes à n^2 variables $P_{k\ell}$ et des entiers $\alpha_{k\ell}$ positifs tels que les applications coordonnées $\rho_{k\ell} : \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ de ρ envoient les matrices $[a_{ij}]$ sur le scalaire :

$$\rho_{k\ell}([a_{ij}]) = \frac{P_{k\ell}(a_{ij})}{\det([a_{ij}])^{\alpha_{k\ell}}}.$$

On dit que la représentation est *polynomiale* (homogène de degré d) si les applications coordonnées $\rho_{k\ell}$ sont toutes des polynômes à n^2 variables (homogènes de degré d).

Lemme 3.22. Une représentation rationnelle de dimension finie q de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ est polynomiale si et seulement si l'action de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ peut s'étendre en une action de $M_n(\Bbbk)$ dont le morphisme d'action $M_n(\Bbbk) \to M_q(\Bbbk)$ est un polynôme.

Démonstration. En effet la représentation est (V, ρ) est polynomiale si et seulement si le morphisme de monoïdes $\rho : \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \to M_q(\Bbbk)$ est la restriction d'un polynôme $P : M_n(\Bbbk) \to M_q(\Bbbk)$. Mais un tel polynôme tel P est nécessairement un morphisme de monoïdes. En effet sa restriction à $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ est un morphisme de monoïdes, et $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ est dense dans $M_n(\Bbbk)$ pour la topologie de Zariski. Par un argument de densité, les axiomes des morphismes de monoïdes sont donc automatiquement satisfaits par P. □

Le lemme 3.22 nous fournit une manière de définir la notion de représentation polynomiale sur un corps quelconque. En restreignant une représentation de M_n à GL_n, on obtient un foncteur :

$$\iota : \mathrm{Rep}\, M_n \to \mathrm{Rep}\, \mathrm{GL}_n .$$

Définition 3.23.

Notons $\mathrm{Pol}\, \mathrm{GL}_n$ la catégorie image du foncteur ι. Une représentation de GL_n est dite *polynomiale* si c'est un objet de $\mathrm{Pol}\, \mathrm{GL}_n$, c'est-à-dire si c'est la restriction à GL_n d'une représentation de M_n.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Lemme 3.24. Le foncteur ι est pleinement fidèle, et induit donc une équivalence de catégories $\mathrm{Rep}\, M_n \simeq \mathrm{Pol}\ \mathrm{GL}_n$.

Démonstration. Notons $\phi : \Bbbk[M_n] \hookrightarrow \Bbbk[\mathrm{GL}_n]$ le morphisme de bigèbres correspondant à l'inclusion $\mathrm{GL}_n \subset M_n$ (ce morphisme envoie chaque $x_{ij} \in \Bbbk[M_n]$ sur $x_{ij} \in \Bbbk[\mathrm{GL}_n]$). En termes de comodules, le foncteur $(*)$ s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Comod}-\Bbbk[M_n] & \to & \mathrm{Comod}-\Bbbk[\mathrm{GL}_n] \\ (V,\Delta_V) & \mapsto & (V,(\mathrm{Id}_V\otimes\phi)\circ\Delta_V) \end{array} .$$

Comme ϕ est injectif, une application $\Bbbk$-linéaire $f : V \to W$ est un morphisme de $\Bbbk[M_n]$-comodules si et seulement si c'est un morphisme des $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]$-comodules correspondant, ainsi ι est pleinement fidèle. □

3.3 Représentations polynomiales et algèbres de Schur

Une représentation polynomiale V est dite *homogène de degré d* si la restriction au groupe $\mathbb{G}_m$ des homothéties est un espace de poids d. De manière équivalente, V est une représentation de GL_n de degré d, qui est polynomiale. On note $\mathrm{Pol}_d\ \mathrm{GL}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pol}\ \mathrm{GL}_n$ dont les objets sont des représentations polynomiales homogènes de degré d.

Le schéma en monoïdes M_n est représenté par une algèbre de polynômes $\Bbbk[M_n]$, qui est graduée par le degré. Notons $\Bbbk[M_n]_d$ le sous-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d. On constate que $\Bbbk[M_n]_d$ est une sous-cogèbre de $\Bbbk[M_n]$. En répétant le raisonnement de la démonstration de la proposition 3.16 on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.25.

On a une décomposition de la catégorie $\mathrm{Pol}\ \mathrm{GL}_n$:

$$\mathrm{Pol}\ \mathrm{GL}_n = \prod_{d\in\mathbb{N}} \mathrm{Pol}_d\ \mathrm{GL}_n\ .$$

De plus, on a des équivalences de catégories :

$$\mathrm{Pol}_d\ \mathrm{GL}_n \simeq \mathrm{Comod}-\Bbbk[M_n]_d\ .$$

Si C est une $\Bbbk$-cogèbre de dimension finie, alors son dual $\Bbbk$-linéaire $C^\vee$ est une algèbre de dimension finie. De plus si V est un C-comodule, le morphisme d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_\Bbbk(V, V\otimes C) \simeq \mathrm{Hom}_\Bbbk(C^\vee\otimes V, V)$$

fait correspondre au morphisme de coaction Δ_V un morphisme $\Bbbk$-linéaire $C^\vee\otimes V \to V$ qui fait de V un module sur $C^\vee$. On vérifie de plus que toute application $\Bbbk$-linéaire $f : V \to W$ est un morphisme de C-comodules si et seulement si c'est un morphisme des $C^\vee$-modules correspondant. On a donc une équivalence de catégories

$$C^\vee-\mathrm{Mod} \simeq \mathrm{Comod}-C\ .$$

On peut appliquer ce principe à la cogèbre $\Bbbk[M_n]_d$. L'algèbre duale de la cogèbre $\Bbbk[M_n]_d$ est appelée *algèbre de Schur*, et notée $S(n,d)$.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2022

Proposition 3.26.

On a une équivalence de catégories :

$$\mathrm{Pol}_d\ \mathrm{GL}_n \simeq S(n,d)-\mathrm{Mod}\,.$$

On peut donner une description explicite de l'algèbre $S(n,d)$ de la façon suivante. Posons $E = M_n(\Bbbk)^\vee = \mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk^n)^\vee$, où $^\vee$ désigne la dualité des espaces vectoriels. Alors les puissances symétriques $S^d(E)$ sont les coïnvariants de $E^{\otimes d}$ sous l'action à gauche du groupe $\mathfrak{S}_d$ qui agit par permutation des facteurs. On a donc un isomorphisme $\Bbbk$-linéaire :

$$S(n,d) \simeq \left((E^{\otimes d})_{\mathfrak{S}_d}\right)^\vee .$$

La propriété universelle des coïnvariants donne ensuite un isomorphisme (où $\Bbbk^{\mathrm{triv}}$ est le $\Bbbk$-espace vectoriel $\Bbbk$ muni de l'action triviale de $\mathfrak{S}_d$) :

$$\mathrm{Hom}_\Bbbk((E^{\otimes d})_{\mathfrak{S}_d},\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}(E^{\otimes d},\Bbbk)\,.$$

Posons ensuite $V = \Bbbk^n$. Alors on a un isomorphisme $\Bbbk$-linéaire $E \simeq V \otimes V^\vee$, d'où l'on déduit un isomorphisme de $\Bbbk\mathfrak{S}_d$-modules :

$$E^{\otimes d} \simeq V^{\otimes d} \otimes (V^{\otimes d})^\vee$$

où l'action à gauche de $\mathfrak{S}_d$ sur le terme du milieu est donnée par permutation simultanée des facteurs des deux espaces vectoriels $V^{\otimes d}$. L'adjonction entre produit tensoriel et Hom donne donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}(E^{\otimes d},\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d},V^{\otimes d})\,.$$

En suivant la description de la multiplication de $S(n,d)$ à travers ces isomorphismes, on obtient alors le résultat suivant.

Proposition 3.27.

L'algèbre de Schur $S(n,d)$ est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes $\mathfrak{S}_d$-équivariants $\mathrm{End}_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}\left((\Bbbk^n)^{\otimes d}\right)$ (dont la multiplication est donnée par la composition).

Exemple 3.28. Soit $\Bbbk^n$ la représentation standard de GL_n. Alors GL_n agit sur $(\Bbbk^n)^{\otimes d}$. Plus précisément si on utilise l'isomorphisme naturel $(\Bbbk)^{n\otimes d} \otimes_\Bbbk A \simeq (A^n)^{\otimes_A d}$, alors l'action de $\mathrm{GL}_n(A)$ sur $(A^n)^{\otimes_A d}$ est donnée par

$$g\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_d) = g(v_1)\otimes\cdots\otimes g(v_d)\,.$$

C'est clairement une représentation polynomiale de degré d de GL_n (on peut l'étendre en une action de M_n, et un scalaire agit via sa puissance d-ième sur le produit tensoriel). L'action correspondante de $S(n,d) = \mathrm{End}_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}((\Bbbk^n)^{\otimes d})$ sur $(\Bbbk^n)^{\otimes d}$ est donnée par $f\cdot v = f(v)$.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Théorème 3.29.

Si V et W sont deux représentations polynomiales homogènes de degré d, alors on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathrm{Pol}_d\,\mathrm{GL}_n}(V,W) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n}(V,W)\,.$$

Démonstration. Comme $\mathrm{Pol}_d\,\mathrm{GL}_n$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n$, on a l'isomorphisme en degré 0 (car $\mathrm{Ext}^0 = \mathrm{Hom}$). Par un argument standard d'algèbre homologique (on prend des résolutions projective de V et injective de W), pour prouver l'isomorphisme en degré $i > 0$, il suffit de vérifier que si P est une représentation polynomiale projective et si J est une représentation polynomiale injective alors :

$$H^i(\mathrm{GL}_n, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,J)) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n}(P,J) = 0 \quad \text{pour } i > 0.$$

On peut se restreindre à considérer un générateur projectif P et un générateur injectif J. Un générateur projectif est donné par le $S(n,d)$-module à gauche $S(n,d) = \Gamma^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$. Si $V_1, \dots, V_n$ sont des représentations de GL_n alors on a un isomorphisme de représentations, où la somme est prise sur tous les n-uplets $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ d'entiers positifs de somme d :

$$\Gamma^d(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \simeq \bigoplus_{\lambda} \Gamma^{\lambda_1}(V_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma^{\lambda_n}(V_n)\,.$$

On peut donc décomposer le générateur projectif comme une somme directe de représentations de la forme $\Gamma^\lambda(\Bbbk^n)$. Comme pour toute catégorie de modules sur une algèbre de dimension finie, un cogénérateur injectif est donné par le module $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(S(n,d), \Bbbk)$ (où $S(n,d)$ est ici considéré comme un module à droite), qui est isomorphe au module $S^d((\Bbbk^n)^{\oplus n})$ (la d-ième puissances symétrique de la somme directe de n copies de la représentation standard de GL_n). On peut décomposer ce cogénérateur injectif comme la somme directe de représentations de la forme $S^\mu(\Bbbk^n)$. En conclusion, il suffit de démontrer l'annulation cohomologique pour $P = \Gamma^\lambda(\Bbbk^n)$ et $J = S^\mu(\Bbbk^n)$ avec λ et μ des d-uplets d'entiers positifs.

Mais la représentation $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,J) = S^\lambda((\Bbbk^n)^\vee) \otimes S^\mu(\Bbbk^n)$ possède une bonne filtration d'après la proposition 2.27 et le théorème 2.26. On a donc l'annulation cohomologique désirée. □

3.4 Des foncteurs aux algèbres de Schur

Définition 3.30.

La catégorie de Schur $\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk}$ est la catégorie dont les objets sont les $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie, dont les ensembles de morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk}}(V,W) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})\,,$$

c'est-à-dire l'espace vectoriel des applications $\Bbbk$-linéaires équivariantes pour l'action de $\mathfrak{S}_d$ donnée par permutation des facteurs des produits tensoriels, et dont la composition est donnée par la composition des morphismes $\mathfrak{S}_d$-équivariants.

Rappelons que $\mathscr{V}_{\Bbbk}$ désigne la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie et que $\Gamma^d(V)$ désigne la d-ième puissance divisée d'un espace vectoriel V, c'est à dire les invariants

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2022

de $V^{\otimes d}$ sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$. La notation $\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk}$ est justifiée par les isomorphismes $\Bbbk$-linéaires :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk}}(V,W) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V^{\otimes d},W^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d} &\simeq (\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}\\ &\simeq \Gamma^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W))\,.\end{aligned}$$

Le nom de 'catégorie de Schur' (suggéré par W. van der Kallen) est quant à lui justifié par l'observation que pour tout objet $\Bbbk^n$ on a un isomorphisme d'algèbres :

$$\mathrm{End}_{\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk}}(\Bbbk^n) \simeq S(n,d)\,.$$

Rappelons qu'une catégorie $\mathscr{C}$ est dite $\Bbbk$-linéaire si ses ensembles de morphismes sont munis d'une structure de $\Bbbk$-espaces vectoriels et si la composition est $\Bbbk$-bilinéaire. Par exemple, les catégories $\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk}$ et $\mathscr{V}_{\Bbbk}$ sont $\Bbbk$-linéaires. Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont deux catégories $\Bbbk$-linéaires, un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est dit $\Bbbk$-linéaire s'il vérifie :

$$F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$$

pour toute paire de morphismes (f,g) de même source et de même but et toute paire de scalaires (λ,μ). on note $\mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $\Bbbk$-linéaires de domaine $\mathscr{C}$ et codomaine $\mathscr{D}$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles.

Proposition 3.31.

Pour tout $d \geqslant 0$, on a une équivalence de catégories :

$$\mathscr{P}_{d,\Bbbk} \simeq \mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk},\mathscr{V}_{\Bbbk})\,.$$

Démonstration (esquisse). Pour tout espace vectoriel H on a un isomorphisme $\Gamma^d(H^\vee) \simeq S^d(H)^\vee$ naturel en H. Ainsi pour tout tout foncteur strictement polynomial F homogène de degré d, les polynômes

$$F_{V,W} \in S^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)^\vee) \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(FV,FW)$$

s'interprètent comme des applications $\Bbbk$-linéaires

$$F_{V,W} : \Gamma^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(FV,FW)\,.$$

On vérifie ensuite que sous cette interprétation les axiomes de la définition 3.2 se traduisent comme le fait que F est un foncteur $\Bbbk$-linéaire de $\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk}$ vers $\mathscr{V}_{\Bbbk}$, et que les morphismes au sens de la définition 3.3 correspondent aux transformations naturelles entre foncteurs $\Bbbk$-linéaires. □

On note $\Gamma^{d,V}$ le foncteur strictement polynomial homogène de degré d obtenu comme composition :

$$\Gamma^{d,V}(-) = \Gamma^d \circ \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,-)\,.$$

On a donc $\Gamma^{d,V}(W) = \Gamma^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^d\mathscr{V}_{\Bbbk}}(V,W)$. Pour tout uplet d'entiers positifs $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ tels que $\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\lambda_i = d$ on note également Γ^λ le foncteur strictement polynomial homogène de degré d obtenu comme produit tensoriel :

$$\Gamma^\lambda = \Gamma^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{\lambda_k}\,.$$

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Corollaire 3.32. Soit $d \geqslant 0$. On a les propriétés suivantes.

1. (Lemme de Yoneda) Pour tout V on a un isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels, naturel en F et en V :
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{d,\Bbbk}}(\Gamma^{d,V}, F) \simeq F(V)\,.$$
2. Les foncteurs $\Gamma^{d,V}$ sont des objets projectifs de $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$.
3. Les foncteurs Γ^{λ} sont des objets projectifs de $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$.

Démonstration. Le premier point est le lemme de Yoneda dans $\mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}, \overline{\mathscr{V}}_{\Bbbk})$. Le deuxième point résulte du premier. En effet comme l'évaluation des foncteurs strictement polynomiaux sur V est exacte, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{d,\Bbbk}}(\Gamma^{d,V}, -)$ est exact, donc $\Gamma^{d,V}$ est projectif. Le troisième point découle du deuxième car les facteurs directs de projectifs sont projectifs. Or on a un isomorphisme $\Gamma^{d,\Bbbk^k} \simeq \bigoplus \Gamma^{\lambda}$ où la somme est prise sur tous les k-uplets d'entiers positifs $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ de somme d. □

Soit F un foncteur $\Bbbk$-linéaire de $\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}$ vers la catégorie $\overline{\mathscr{V}}_{\Bbbk}$ de tous les espaces vectoriels. Alors l'espace vectoriel $F(\Bbbk^n)$ est naturellement un module sur l'algèbre $\mathrm{End}_{\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}}(\Bbbk^n) \simeq S(n,d)$. L'évaluation sur $\Bbbk^n$ donne donc un foncteur

$$\Phi \,:\, \mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}, \overline{\mathscr{V}}_{\Bbbk}) \to S(n,d)-\mathrm{Mod}\,.$$

On note $S(n,d)-\mathrm{mod}$ la sous-catégorie pleine de $S(n,d)-\mathrm{Mod}$ dont les objets sont les $S(n,d)$-modules de type fini.

Théorème 3.33.

Si $n \geqslant d$, le foncteur Φ est une équivalence de catégories, qui induit une équivalence de catégories
$$\mathscr{P}_{d,\Bbbk} \simeq S(n,d)-\mathrm{mod}\,.$$

Démonstration. Notons $\Psi : S(n,d)-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}, \overline{\mathscr{V}}_{\Bbbk})$ le foncteur qui à un $S(n,d)$-module M associe le foncteur
$$\Psi(M) = \Gamma^{d,\Bbbk^n} \otimes_{S(n,d)} M\,.$$

On a clairement $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$. D'autre part on a un isomorphisme naturel en $\Bbbk^n$, $\Psi \circ \Phi(\Gamma^{d,\Bbbk^n}) \simeq \Gamma^{d,\Bbbk^n}$. Comme Ψ et Φ (donc leur composée) commutent aux colimites, pour montrer que $\Psi \circ \Phi$ est isomorphe à l'identité, il suffit de vérifier que $\Gamma^{d,\Bbbk^n}$ est un générateur projectif de $\mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}, \overline{\mathscr{V}}_{\Bbbk})$.

D'après le lemme de Yoneda, les $\Gamma^{d,\Bbbk^k}$, $k \in \mathbb{N}$, forment un générateur projectif de $\mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}, \overline{\mathscr{V}}_{\Bbbk})$. Or chaque $\Gamma^{d,\Bbbk^k}$ peut s'écrire comme une somme directe de foncteurs Γ^{λ} où λ est un d-uplet d'entiers positifs de somme d. (On n'a pas besoin de uplets avec plus de d termes. En effet, si μ est uplet quelconque, alors au plus d termes sont non nuls car la somme des termes vaut d. Si λ un d-uplet obtenu en retirant des termes nuls à μ on a alors $\Gamma^{\mu} \simeq \Gamma^{\lambda}$.). Donc les Γ^{λ}, pour les n-uplets λ d'entiers positifs de somme d, forment un générateur projectif de $\mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}, \overline{\mathscr{V}}_{\Bbbk})$. Comme $\Gamma^{d,\Bbbk^n}$ contient tous ces Γ^{λ} comme facteurs directs, c'est aussi un générateur projectif.

On identifie maintenant $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ et la catégorie $\mathrm{Fct}_{\Bbbk}(\Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk}, \mathscr{V}_{\Bbbk})$. Pour montrer que Φ se restreint en une équivalence de catégories $\mathscr{P}_{d,\Bbbk} \simeq S(n,d)-\mathrm{mod}$, il reste à montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes pour un foncteur $\Bbbk$-linéaire $F : \Gamma^d \mathscr{V}_{\Bbbk} \to \overline{\mathscr{V}}_{\Bbbk}$.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2022

(i) L'espace vectoriel $F(\Bbbk^n)$ est de dimension finie.

(ii) Pour tout entier k, l'espace vectoriel $F(\Bbbk^k)$ est de dimension finie.

On a évidemment (ii)⇒ (i). Montrons la réciproque. Si $F(\Bbbk^n)$ est de dimension finie, alors $\Phi(F)$ est un $S(n,d)$-module de type fini. Il est donc quotient d'une somme directe finie de copies de $S(n,d)$ (vue comme un module à gauche sur $S(n,d)$). Donc F est quotient d'une somme directe finie de copies du foncteur $\Gamma^{d,\Bbbk^n} = \Psi(S(n,d))$. Ce foncteur est à valeurs de dimensions finies, donc F vérifie (ii). □

Corollaire 3.34. Soit $d \geqslant 0$. La catégorie $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ a assez de projectifs. Si $\dim V \geqslant d$, le foncteur $\Gamma^{d,V}$ est un générateur projectif de $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$. La famille des Γ^{λ} pour les d-uplets λ d'entiers positifs et de somme d constitue également un générateur projectif de $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$.

Démonstration. En effet, l'évaluation sur $V = \Bbbk^n$ est une équivalence de catégories, qui envoie $\Gamma^{d,V}$ sur le générateur projectif $S(n,d)$ de $S(n,d)-$mod. Et $\Gamma^{d,V}$ est une somme directe de copies des Γ^{λ}. □

Notons S^d_V le foncteur strictement polynomial :

$$S^d_V(-) = S^d(V \otimes -).$$

On vérifie facilement que $S^d_V = (\Gamma^{d,V})^\sharp$ où '$\sharp$' est la dualité des foncteurs strictement polynomiaux définie à la section 2.3. Comme le foncteur contravariant $^\sharp : \mathscr{P}_{d,\Bbbk} \to \mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ est une antiéquivalence de catégories (par la proposition 3.6), il échange injectifs et projectifs. En dualisant le corollaire précédent, on obtient donc :

Corollaire 3.35. Soit $d \geqslant 0$. La catégorie $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ a assez d'injectifs. Si $\dim V \geqslant d$, le foncteur S^d_V est un cogénérateur injectif de $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$. De plus, la famille des $S^\lambda = S^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_d}$ pour les d-uplets $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ d'entiers positifs et de somme d constitue également un cogénérateur injectif de $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$.

4 Calculs d'Ext dans $\mathscr{P}_{\Bbbk}$

Dans cette section, nous donnons un aperçu des techniques de calcul d'extensions dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux, et nous essayons de convaincre des avantages des calculs dans $\mathscr{P}_{\Bbbk}$ par rapport aux calculs dans les catégories de représentations Rep GL_n ou dans les catégories $S(n,d)-$Mod de modules sur les algèbres de Schur. Nous illustrons ensuite ces techniques en présentant (notre approche d') une formule due à M. Chałupnik [2], qui calcule des extensions entre représentations tordues par le Frobenius.

4.1 Quelques outils de calcul dans $\mathscr{P}_{\Bbbk}$

Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs ou d'injectifs, et soient A, B deux objets de $\mathscr{A}$. Une première approche naïve pour calculer $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}}(A,B)$ consiste à prendre une résolution projective explicite P^A de A ou une résolution injective explicite J_B de B et à tenter de calculer l'homologie d'un des complexes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, J_B)$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P^A, B)$. Cette approche nécessite de maîtriser les injectifs ou les projectifs de la catégorie $\mathscr{A}$. La proposition suivant suit des résultats des sections 2.5 et 3.4.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Proposition 3.36 (injectifs et projectifs de $\mathscr{P}_{\Bbbk}$).

1. La catégorie $\mathscr{P}_{\Bbbk}$ a assez de projectifs et d'injectifs. Un générateur projectif est fourni par les foncteurs Γ^{λ} pour les uplets d'entiers positifs λ. Un cogénérateur injectif est fourni par les foncteurs S^{λ} pour les uplets d'entiers positifs λ.
2. Le produit tensoriel de deux projectifs est projectif. Le produit tensoriel de deux injectifs est injectif.

Notons que les foncteurs strictement polynomiaux S^{λ} et Γ^{λ} sont à valeurs de dimensions finies, ce sont des objets relativement simples à manier. Le deuxième point de la proposition 3.36 est une conséquence immédiate du premier car $\Gamma^{\lambda}\otimes\Gamma^{\mu}=\Gamma^{\lambda|\mu}$ où $\lambda|\mu$ désigne la concaténation des deux uplets. Ce deuxième point est particulièrement important pour l'étude des produits tensoriels de représentations, qui apparaissent naturellement dans beaucoup de calculs. Les bonnes propriétés des injectifs et des projectifs de $\mathscr{P}_{\Bbbk}$ font que l'approche naïve pour les calculs d'Ext permet d'effectuer certain calculs (voir le lemme 3.38 ou notre démonstration du théorème 3.42).

Remarque 3.37 (Comparaison avec $\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n$ et $S(n,d)-\mathrm{Mod}$). Il n'y a pas assez de projectifs dans $\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n$. Il y a assez d'injectifs dans $\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n$, mais les injectifs standard $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]$ sont des objets de dimension infinie peu commodes à manier. La catégorie $S(n,d)-\mathrm{Mod}$ a un comportement très similaire à $\mathscr{P}_{\Bbbk}$ en ce qui concerne le premier point, mais le deuxième point fait défaut.

Un outil de calcul essentiel est l'existence de certains résultats d'annulation cohomologiques dans $\mathscr{P}_{\Bbbk}$, dont le suivant est un prototype.

Lemme 3.38 (annulation cohomologique). Soient F,G,H des foncteurs strictement polynomiaux homogènes, et r un entier strictement positif. Si $\deg F$ ou $\deg G$ n'est pas un multiple de p^r, alors

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F\otimes G, H\circ I^{(r)})=0=\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(H\circ I^{(r)}, F\otimes G)\,.$$

Démonstration. Démontrons la première égalité. Soit P^F (resp. P^G) une résolution projective de F (resp. G) par des foncteurs du type Γ^{λ} (resp. Γ^{μ}). D'après la proposition 3.36, $P^F\otimes P^G$ est une résolution projective, par des foncteurs du type $\Gamma^{\lambda|\mu}$. Les hypothèses sur le degré de F et de G font que dans les uplets d'entiers $\lambda|\mu$, au moins l'un des entiers n'est pas multiple de p^r. Nous prétendons que cela implique que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(\Gamma^{\lambda|\mu}, H\circ I^{(r)})=0\,. \qquad (*)$$

Ainsi le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(P^F\otimes P^G, H\circ I^{(r)})$ est nul, d'où l'annulation de son homologie $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F\otimes G, H\circ I^{(r)})$. Il reste donc à démontrer la formule $(*)$. Pour tout foncteur strictement polynomial K homogène de degré d, le lemme de Yoneda du corollaire 3.32 donne un isomorphisme naturel en $\Bbbk^d$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(\Gamma^{d,\Bbbk^d}, K)\simeq K(\Bbbk^d)\,.$$

La naturalité en $\Bbbk^d$ fait que cet isomorphisme est $\mathbb{G}_m^{\times d}$-équivariant, si les actions proviennent de l'action de $\mathbb{G}_m^{\times d}$ sur $\Bbbk^d$ donnée par $(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\cdot(x_1,\dots,x_d)=(\lambda_1x_1,\dots,\lambda_dx_d)$. Il suit du lemme 3.15 que toute représentation V sous l'action de $\mathbb{G}_m^{\times d}$ se décompose en

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2022

$V = \bigoplus_{\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_d)} V_\gamma$ où $\mathbb{G}_m^{\times d}$ agit sur V_γ via $(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\cdot v = \lambda_1^{\gamma_1}\cdots\lambda_d^{\gamma_d} v$. Comme Γ^γ est le facteur direct de poids γ de $\Gamma^{d,\Bbbk^d}$ sous l'action de $\mathbb{G}_m^{\times d}$, on obtient un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(\Gamma^\gamma, K) \simeq K(\Bbbk^d)_\gamma .$$

Si maintenant $K = H\circ I^{(r)}$, alors tous les espaces de poids non nuls de $(H\circ I^{(r)})(\Bbbk^d) = H(\Bbbk^d)^{(r)}$ sont des d-uplets de multiples de p^r. En particulier $(H\circ I^{(r)})(\Bbbk^d)_{\lambda|\mu}$ est nul, ce qui prouve $(*)$. □

Remarque 3.39. En vertu du théorème 3.21, le lemme 3.38 peut s'interpréter comme un résultat d'annulation cohomologique pour GL_n lorsque n est grand. Notons qu'il n'y a en général pas annulation cohomologique pour de petites valeurs de n. Par exemple, si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique $p = 3$ on a :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}\,\mathrm{GL}_n}(\Bbbk^{n(1)}, \Bbbk^n \otimes \Lambda^2(\Bbbk^n)) = \begin{cases} 0 \text{ pour tout } i & \text{si } n \geqslant 3, \\ 0 \text{ pour } i \neq 1, \Bbbk \text{ pour } i = 1 & \text{si } n = 2, \\ 0 \text{ pour } i \neq 0, \Bbbk \text{ pour } i = 0 & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Le cadre naturel pour démontrer l'annulation pour $n \geqslant 3$ est la catégorie $\mathscr{P}_{\Bbbk}$ où l'on a $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(I^{(1)}, \Lambda^1\otimes\Lambda^2) = 0$ d'après le lemme 3.38.

Il est parfois peu commode de travailler avec des résolutions injectives et projectives pour calculer $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F,G)$. Dans ce cas, on peut recourir aux suites spectrales hypercohomologiques. Plus précisément, de nombreux complexes classiques peuvent s'interpréter comme des complexes de foncteurs strictement polynomiaux. Par exemple, le complexe de Koszul de l'algèbre $S(V)$ associé à la suite régulière donnée par une base de V donne des complexes de foncteurs strictement polynomiaux pour tout $d \geqslant 0$:

$$\Lambda^d \to \Lambda^{d-1}\otimes S^1 \to \Lambda^{d-2}\otimes S^2 \to \cdots \to \Lambda^1 \otimes S^{d-1} \to S^d .$$

Le complexe de De Rham de l'espace affine V donne des complexes pour tout $d \geqslant 0$:

$$S^d \to S^{d-1}\otimes \Lambda^1 \to S^{d-2}\otimes\Lambda^2 \to \cdots \to S^1 \otimes \Lambda^{d-1} \to \Lambda^d .$$

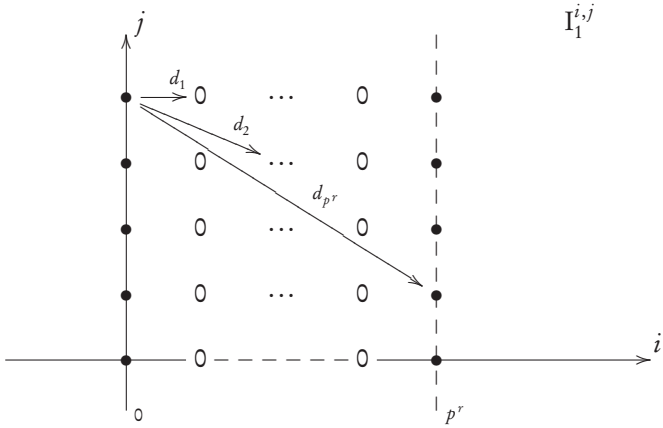
A partir d'un tel complexe C on dispose pour tout foncteur strictement polynomial F de deux suites spectrales hypercohomologiques, de termes initiaux

$$\mathrm{I}_1^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F, C^j), \quad \mathrm{II}_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^j_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F, H^i(C)),$$

qui convergent toutes les deux vers le même objet gradué. L'analyse de ces deux suites spectrales donne alors de nombreuses relations entre les extensions $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F, C^j)$ et $\mathrm{Ext}^j_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F, H^i(C))$. Pour peu que l'on sache calculer les dimensions de certains de ces espaces vectoriels, on peut espérer déterminer les autres à partir des relations fournies par les suites spectrales. Cette technique a été exploitée avec succès et une grande virtuosité par Friedlander et Suslin [13], puis par Franjou, Friedlander Scorichenko et Suslin [10] pour obtenir de nombreux calculs d'Ext entre représentations de GL_n modifiées par la torsion de Frobenius, auparavant inaccessibles. Cependant, nous n'utiliserons pas la technique des suites spectrales hypercohomologiques dans ce cours, et nous nous bornons donc ici à illustrer cette technique par un exemple extrêmement simple.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Exemple 3.40 (Calcul de $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, \Lambda^{p^r})$). Pour tout $r \geqslant 0$, le complexe de Koszul $\Lambda^{p^r} \to \cdots \to S^{p^r}$ est exact. La suite spectrale $\mathrm{II}^{*,*}_*$ est donc nulle, ainsi la suite spectrale $\mathrm{I}^{*,*}_*$ converge vers 0. D'après le lemme d'annulation 3.38, tous les termes $\mathrm{I}_1^{i,j}$ sont nuls à l'exception de la 0-ième colonne qui vaut $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, \Lambda^{p^r})$ et de la p^r-ième colonne qui vaut $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, S^{p^r})$. Donc seule la différentielle d_{p^r} de la p^r-ième page de la suite spectrale $\mathrm{I}^{*,*}_*$ peut être non nulle. La situation est représentée par le schéma suivant (les '•' représentent des termes de la première page $\mathrm{I}_1^{*,*}$ qui sont potentiellement non nuls, les cases vides sont des termes nuls).



Par dualité (proposition 3.6) et par le corollaire 3.32 on peut calculer la colonne de droite de la suite spectrale.

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, S^{p^r}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}_\Bbbk}(\Gamma^{p^r}, I^{(r)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 0, \\ \Bbbk & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Comme l'aboutissant de la suite spectrale $\mathrm{I}^{*,*}_*$ est nul, la différentielle d_{p^r} est un isomorphisme, et on obtient donc que $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, \Lambda^{p^r})$ est nul pour $i \neq p^r - 1$ et vaut $\Bbbk$ pour $i = p^r - 1$.

4.2 Une formule de M. Chałupnik

Rappelons qu'une des motivations initiales pour l'introduction de la catégorie $\mathscr{P}_\Bbbk$ est d'obtenir des calculs d'extensions entre représentations de GL_n, en particulier entre représentations tordues par l'action du Frobenius. Comme expliqué dans l'exemple 3.12, si F est un foncteur strictement polynomial, on a un isomorphisme de représentations de GL_n

$$(F \circ I^{(r)})(\Bbbk^n) \simeq F(\Bbbk^n)^{[r]}.$$

On est donc conduit à s'intéresser à calculer des extensions de la forme

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(F \circ I^{(r)}, G \circ I^{(r)}).$$

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

L'objectif de cette section est de présenter un formule due à M. Chałupnik [2], qui répond partiellement [1] à ce problème.

Pour pouvoir énoncer le résultat, nous faisons une remarque préalable sur les espaces vectoriels gradués. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Se donner une graduation sur V, c'est-à-dire une décomposition en somme directe $V = \bigoplus V^i$, est équivalent à se donner une action de $\mathbb{G}_m$ sur V (on fait agir $\mathbb{G}_m$ de sorte que chaque V^i soit une représentation de poids i). Si V est une représentation de $\mathbb{G}_m$ alors par la proposition 3.11, $F(V)$ est naturellement muni d'une action de $\mathbb{G}_m$, c'est à dire d'une graduation. Ainsi, l'évaluation sur un espace vectoriel gradué V induit un foncteur exact :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_V : & \mathscr{P}_{\Bbbk} & \to & \mathscr{V}_{\Bbbk}^* \\ & F & \mapsto & F(V) \end{array}$$

où $\mathscr{V}_{\Bbbk}^*$ est la catégorie des espaces vectoriels gradués de dimension finie.

Exemple 3.41. Si $F = S^d, \otimes^d$ ou Γ^d, la graduation obtenue sur $F(V)$ est la graduation usuelle. Par exemple, si $V = V^0 \oplus V^2$ avec V^0 et V^2 de dimension 1 engendrés par e_0 et e_2, alors $S^3(V)$ a pour base la famille $(e_0^3, e_0^2e_2, e_0e_2^2, e_2^3)$, et ces vecteurs de base sont des éléments homogènes de degrés respectifs 0, 2, 4, 6.

Théorème 3.42 (Chałupnik).

Soit F un foncteur strictement polynomial homogène de degré d. Pour tout $r \geqslant 0$ on note E_r l'espace vectoriel gradué de dimension 1 en degré $2i$ pour $0 \leqslant i < p^r$ et de dimension 0 dans les autres degrés. On a des isomorphismes gradués, naturels en F :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(\Gamma^d \circ I^{(r)}, F \circ I^{(r)}) \simeq F(E_r)\,,$$
$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F \circ I^{(r)}, S^d \circ I^{(r)}) \simeq F^\sharp(E_r)\,.$$

En particulier, si $d = 1$ et $F = S^1$ on obtient un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués (qui inspire la notation 'E_r') :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(I^{(r)}, I^{(r)}) \simeq S^1(E_r) = E_r\,.$$

Le calcul de $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(I^{(r)}, I^{(r)})$ a été obtenu originellement par Friedlander et Suslin [13]. Il est d'importance fondamentale pour la démonstration du théorème d'engendrement fini de la cohomologie des schémas en groupes finis (théorème 5.6 de la section 1).

Remarque 3.43. Le théorème 3.42 montre un avantage additionnel des foncteurs strictement polynomiaux par rapport aux représentations de GL_n : on peut jouer sur la précomposition. Plus précisément si V est la représentation de GL_n correspondant à F par évaluation sur $\Bbbk^n$, il n'est pas clair comment définir simplement l'espace vectoriel gradué $F(E_r)$ à partir de V, sans faire référence à F. Le théorème 3.42 est donc déjà difficile à *énoncer* sans parler de foncteurs strictement polynomiaux.

La démonstration originale de Chałupnik du théorème 3.42 repose sur les calculs longs et techniques (reposant sur des récurrences imbriquées utilisant plusieurs suites spectrales

(1) Une généralisation de la formule de Chałupnik qui répond complètement au problème a été conjecturée dans l'article [32] (publié postérieurement au cous Peccot), et démontrée ensuite dans les articles [3, 33].

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

hypercohomologiques munies de structures d'algèbres de Hopf) de l'article [10]. Une approche alternative simple de la démonstration, reposant sur les complexes de Troesch [36] est proposée dans ma thèse [(2)]. La fin de cette section donne une idée de cette approche alternative. Pour simplifier l'exposition, nous la présentons en caractéristique $p = 2$, pour $r = 1$.

Pour commencer, nous observons que les deux calculs du théorème 3.42 peuvent se déduire l'un de l'autre en utilisant la dualité $^\sharp$ des foncteurs strictement polynomiaux. Nous nous bornons donc à démontrer la deuxième formule, faisant apparaître les puissances symétriques. Nous décrivons maintenant un complexe de foncteurs strictement polynomiaux qui pour le cas $p = 2$, $r = 1$, apparut originellement dans l'article [9], et qui fut généralisé pour p quelconque et r quelconque par A. Troesch [36]. Pour tout $d \geqslant 0$, on note T_d le complexe :

$$\underbrace{S^d}_{\deg 0} \xrightarrow{d} \underbrace{S^{d-1}\otimes S^1}_{\deg 1} \xrightarrow{d} \underbrace{S^{d-2}\otimes S^2}_{\deg 2} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \underbrace{S^1\otimes S^{d-1}}_{\deg d-1} \xrightarrow{d} \underbrace{S^d}_{\deg d}$$

dont les différentielles $d_V : T_d^i(V) \to T_d^{i+1}(V)$ sont données par la formule

$$d_V(v_1 \dots v_{d-i} \otimes w_1 \cdots w_i) = \sum_{k=1}^{i} (v_1 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_{d-i}) \otimes v_k w_1 \cdots w_i \,.$$

Proposition 3.44.

Si d est impair, le complexe T_d est exact. Si $d = 2k$ est pair, le complexe T_d est une résolution injective de $S^k \circ I^{(1)}$.

Démonstration. On démontre la proposition simultanément pour tous les entiers d. On remarque qu'en tant qu'espace vectoriel gradué,

$$T(V) := \bigoplus_{d\geqslant 0} T_d(V) = S(V[0]) \otimes S(V[1])$$

où $V[k]$ désigne une copie de V placée en degré k. On a donc une structure d'algèbre commutative sur $T(V)$. De plus, la différentielle d_V ci-dessus coïncide avec l'unique différentielle d'algèbre qui envoie tout élément $v \in V[0]$ sur $d_V v = v \in V[1]$. D'après le lemme 3.9 on a un monomorphisme $I^{(1)}(V)[0] \to S^2(V[0])$. Un calcul élémentaire montre que l'image de ce monomorphisme est contenu dans les cycles de l'algèbre $T(V)$. Notons $(A(V), 0)$ l'algèbre différentielle graduée $S(I^{(1)}(V)[0])$ avec différentielle nulle. On a donc un morphisme d'algèbres différentielles graduées :

$$\phi_V : (A(V), 0) \to (T(V), d_V) \,.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que ce morphisme est un quasi-isomorphisme. Mais si $V = V_1 \oplus V_2$ alors le morphisme peut s'écrire comme le produit tensoriel $\phi_{V_1} \otimes \phi_{V_2}$. Il suffit donc de montrer le quasi-isomorphisme pour $V = \Bbbk$, ce qui est un calcul facile. □

En vertu de la proposition 3.44, les extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(F \circ I^{(1)}, S^d \circ I^{(1)})$ se calculent comme l'homologie du complexe

$$C := \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_\Bbbk}(F \circ I^{(1)}, T_d) \,.$$

(2) Cette approche constitue la première partie de l'article [32], publié postérieurement au cours Peccot.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2022

La proposition suivante est une conséquence directe du lemme d'annulation 3.38.

Proposition 3.45.

Le complexe C est nul en degrés pairs. On a donc un isomorphisme d'espaces gradués (où la notation '$[2i]$' indique que l'espace vectoriel est placé en degré $2i$)

$$H^*(C) = C = \bigoplus_{i=0}^{d} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F \circ I^{(1)}, S^{2d-2i} \otimes S^{2i})[2i]\,.$$

Le calcul de l'espace vectoriel gradué $H^*(C) = \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F \circ I^{(1)}, S^d \circ I^{(1)})$ donné dans la proposition 3.45 est explicite, mais peu lisible. Nous allons maintenant arranger un peu l'expression obtenue. Notons ψ_i l'application $\Bbbk$-linéaire définie comme composée :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F, S^{d-i} \otimes S^i) & \xrightarrow{\circ I^{(1)}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F \circ I^{(1)}, (S^{d-i} \otimes S^i) \circ I^{(1)}) \\ & \overset{\psi_i}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F \circ I^{(1)}, \mathrm{incl})} \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F \circ I^{(1)}, S^{2d-2i} \otimes S^{2i})\,. \end{array}$$

où incl est l'inclusion de $(S^{d-i} \otimes S^i) \circ I^{(1)}$ dans $S^{2d-2i} \otimes S^{2i}$ obtenue à partir du lemme 3.9. On groupe maintenant tous les ψ_i ensemble pour obtenir une application $\Bbbk$-linéaire graduée :

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F, \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant d} S^{d-i} \otimes S^i[2i]) = \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant d} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F, S^{d-i} \otimes S^i)[2i] \to C\,.$$

Puis on constate que l'on a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux gradués

$$\bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant d} S^{d-i} \otimes S^i[2i] \simeq S^d_{E_1}\,,$$

où $S^d_{E_1}$ est le foncteur gradué tel que $S^d_{E_1}(V) = S^d(E_1 \otimes V)$. Le théorème 3.42 résulte alors de la proposition suivante.

Proposition 3.46.

Le morphisme ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués. De plus, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(F, \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant d} S^{d-i} \otimes S^i[2i]) \simeq F^\sharp(E_1)\,.$$

Démonstration. Rappelons que pour tout espace vectoriel V on a des isomorphismes naturels en V (le premier isomorphisme est donné par dualité $^\sharp$ et le deuxième par le lemme de Yoneda du corollaire 3.32 :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(G, S^d_V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\Bbbk}}(\Gamma^{d,V}, G^\sharp) \simeq G^\sharp(V)\,. \qquad (*)$$

En particulier, si V est une représentation de $\mathbb{G}_m$ alors ces isomorphismes sont des isomorphismes de représentations de $\mathbb{G}_m$. De manière équivalente, si V est un espace vectoriel gradué, ces isomorphismes sont des isomorphismes d'espaces vectoriels gradués.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Nous commençons par montrer la deuxième partie de la proposition. On prend $G = F$ et $V = E_1$. Le résultat voulu provient alors des isomorphismes $(*)$ et de l'isomorphisme :

$$S^d_{E_1} = \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant d} S^d \otimes S^{d-i}[2i].$$

Nous allons maintenant montrer que ψ est un isomorphisme. Pour commencer on calcule l'espace vectoriel gradué au but de ψ. On prend $G = F \circ I^{(1)}$ et $V = \Bbbk[0] \oplus \Bbbk[1]$. Alors les isomorphismes gradués $(*)$ combinés à l'isomorphisme de foncteurs gradués $T_d = S^{2d}_V$ donnent un isomorphisme gradué $C \simeq (F \circ I^{(1)})^\sharp(V)$. Mais on a :

$$(F \circ I^{(1)})^\sharp(V) \simeq (F^\sharp \circ (I^{(1)})^\sharp)(V) \simeq F^\sharp(I^{(1)}(V)) \simeq F^\sharp(E_1)\,.$$

Ainsi la source et le but de ψ sont des espaces vectoriels gradués de même dimension. Pour vérifier que ψ est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que chaque composante homogène ψ_i est injective. Cela provient du fait que chacun des deux morphismes qui compose ψ_i est un monomorphisme. Pour le premier, soit $f = (f_V)_{\dim V < \infty}$ un morphisme tel que $f \circ I^{(1)} = (f_{I^{(1)}(V)})_{\dim V < \infty}$ est nul. Comme $I^{(1)}(V)$ est (non naturellement) isomorphe à V, ceci implique pour tout V, f_V est nul, donc f est nul. Pour le second, l'injectivité suit de l'exactitude à gauche des 'Hom'. □

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Chapitre 4

Cohomologie des groupes classiques

Nous avons vu au théorème 3.21 que les extensions dans $\mathscr{P}_{\Bbbk}$ ont une interprétation en termes d'extensions dans Rep GL_n, et nous avons vu que certains calculs sont plus faciles à mener dans $\mathscr{P}_{\Bbbk}$. Il existe des analogues du théorème 3.21 pour les schémas en groupes classiques Sp_n et O_n, démontrés dans [30], qui ouvrent la voie [1] à des calculs cohomologiques pour les schémas en groupes orthogonaux et symplectiques. L'objectif de ce chapitre est de présenter le cas du schéma en groupes Sp_n. La démonstration du théorème fait apparaître des liens entre foncteurs strictement polynomiaux et théorie classique des invariants.

1 Énoncé du théorème

Notons I_n la matrice identité de taille $n \times n$ et Ω la matrice $2n \times 2n$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Le groupe symplectique $Sp_n(A)$ est défini comme l'ensemble des matrices $M \in M_n(A)$ vérifiant ${}^tM\Omega M = \Omega$. Cela définit un schéma en groupes :

$$Sp_n : \mathrm{Alg}_{\Bbbk} \to \mathrm{Gp}\,.$$

La *représentation standard* de Sp_n est l'espace vectoriel $V = \Bbbk^{2n}$, muni de l'action où $Sp_n(A)$ agit sur $A^{2n} \simeq \Bbbk^{2n} \otimes_{\Bbbk} A$ de la façon usuelle (par la multiplication matricielle). La matrice Ω définit une forme bilinéaire $\omega : V \times V \to \Bbbk$ invariante par Sp_n, donc un isomorphisme Sp_n équivariant entre V et la *représentation standard duale* $V^\vee$ (avec action $(g \cdot f)(v) = f(g^{-1}v)$). L'évaluation sur la représentation standard duale produit un foncteur d'évaluation exact (voir la proposition 3.11) :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_{V^\vee} : & \mathscr{P}_{\Bbbk} & \to & \mathrm{Rep}\, Sp_n \\ & F & \mapsto & F(V^\vee) \end{array}.$$

(1) Mentionnons que l'utilisation de ces théorèmes pour calculer la cohomologie des groupes symplectiques et orthogonaux à coefficients dans une représentation polynomiale tordue par le Frobenius a été conduite postérieurement au cours Peccot, dans la thèse de V. T. Pham [25], voir également [34] pour une approche différente.

Notons que ω peut s'interpréter comme un élément de $\Lambda^2(V^\vee)$, invariant sous l'action de Sp_n. On a donc une application Sp_n-équivariante

$$\gamma_d : \Bbbk^{\mathrm{triv}} \to \Gamma^d\left(\Lambda^2(V^\vee)\right) = \left(\Lambda^2(V^\vee)^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}$$

définie par $\gamma_d(\lambda) = \lambda\omega^{\otimes d}$. Pour tout foncteur strictement polynomial F, on définit une application $\phi_{F,n}$ comme la composée :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{d\geqslant 0} \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(\Gamma^d\circ\Lambda^2, F) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{V^\vee}} & \bigoplus_{d\geqslant 0} \mathrm{Ext}^*_{\mathrm{Rep}\,Sp_n}\left(\Gamma^d(\Lambda^2(V^\vee)), F(V^\vee)\right). \\ & \searrow^{\phi_{F,n}} & \downarrow \sum \mathrm{Ext}^*(\gamma_d, F(V^\vee)) \\ & & \mathrm{Ext}^*_{\mathrm{Rep}\,Sp_n}\left(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, F(V^\vee)\right) \\ & & \| \\ & & H^*(Sp_n, F(V^\vee)) \end{array}$$

Théorème 4.1 (Touzé [30]).
Si $n \geqslant \deg F$ alors $\phi_{F,n}$ est un isomorphisme.

Nous donnons maintenant le schéma de la démonstration du théorème 4.1. Dans la suite on note pour simplifier :

$$H^*(F) = \bigoplus_{d\geqslant 0} \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(\Gamma^d\circ\Lambda^2, F).$$

Notons $\overline{\mathscr{V}}_\Bbbk$ la catégorie des espaces vectoriels (de dimension possiblement infinie) et des applications $\Bbbk$-linéaires. Par construction, les cohomologies définissent deux δ-foncteurs :

$$H^*(-), H^*(Sp_n, -(V^\vee)) : \mathscr{P}_{d,\Bbbk} \to \overline{\mathscr{V}}_\Bbbk,$$

et les applications $\Phi_{-,n} : H^*(-) \to H^*(Sp_n, -(V^\vee))$ définissent un morphisme de δ-foncteurs. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de vérifier l'isomorphisme pour les foncteurs F injectifs. Comme $S^d_{\Bbbk^d}$ est un cogénérateur injectif de $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ (voir le corollaire 3.35), on peut se restreindre aux cas $F = S^d_{\Bbbk^d}$. En d'autres termes, il suffit de vérifier les deux conditions suivantes.

(1) Pour tout $d \geqslant 0$ et tout $n \geqslant d$ le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\Phi^0_{S^d_{\Bbbk^d},n} : H^0(S^d_{\Bbbk^d}) \to H^0(Sp_n, S^d_{\Bbbk^d}(V^\vee)).$$

(2) Pour tout $d \geqslant 0$ et tout $n \geqslant d$, $H^i(Sp_n, S^d_{\Bbbk^d}(V^\vee)) = 0$ pour $i > 0$.

La deuxième condition découle directement de la théorie des bonnes filtrations. En effet la représentation $S^d_{\Bbbk^d}(V^\vee)$ est un facteur direct de la représentation $S^*((V^\vee)^{\oplus d}) \simeq S^*(V^\vee)^{\otimes d} = \Bbbk[V]^{\otimes d}$, et cette dernière a une bonne filtration d'après la proposition 2.27. Il reste donc à vérifier la première condition. Comme nous allons l'expliquer, la vérification de la première condition fait intervenir la théorie classique des invariants.

Cohomologie des groupes classiques Cohomologie de GL_n Schémas en groupes Introduction
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

2 Surjectivité en degré 0 et théorie classique des invariants

Dans cette section, nous démontrons que le morphisme $\Phi^0_{F,n}$ est surjectif lorsque $F = S^d_{\Bbbk^d}$, pour tout $d \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 0$.

2.1 Les théorèmes fondamentaux

Les *théorèmes fondamentaux* de la théorie des invariants donnent des descriptions explicites de certaines algèbres d'invariants, ou au moins d'une famille naturelle de générateurs. Des théorèmes fondamentaux pour les groupes classiques (c'est à dire les groupes linéaires, orthogonaux et symplectiques) ont été établis par H. Weyl au début des années 1940 [40] lorsque le corps $\Bbbk$ est de caractéristique zéro, et par C. De Concini et C. Procesi en 1976 [6] lorsque $\Bbbk$ est de caractéristique non nulle. Nous donnons ici l'énoncé pour les schémas en groupes symplectiques. On considère l'algèbre de type fini P des polynômes sur la somme directe de d copies de la représentation standard V du groupe symplectique

$$P = \Bbbk[\, V^{\oplus d} \,].$$

Le schéma en groupes symplectiques Sp_n agit sur cette algèbre par automorphismes d'algèbres (avec l'action usuelle comme dans l'exemple 1.6). La matrice Ω, ou la forme bilinéaire associée ω, donne des polynômes invariants sous l'action du groupe symplectique. Plus précisément, si $1 \leqslant i < j \leqslant d$ on note $\langle i,j \rangle$ le polynôme de degré 2 donné par

$$\begin{array}{rccc} \langle i,j \rangle : & V^{\oplus d} & \to & \Bbbk \\ & (v_1,\dots,v_d) & \mapsto & \omega(v_i,v_j) \end{array}.$$

Le premier théorème fondamental donne les générateurs de l'algèbre des invariants P^{Sp_n}.

Théorème 4.2 (Weyl – De Concini et Procesi).
L'algèbre des invariants P^{Sp_n} est engendrée par les polynômes $\langle i,j \rangle$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant d$.

Remarque 4.3. Le théorème 4.2 donne une description de l'algèbre $H^0(Sp_n, P)$ dont on pourrait extraire des familles génératrices explicites des espaces vectoriels $H^0(Sp_n, S^d_{\Bbbk^d}(V^\vee))$ pour $d \geqslant 0$. Pour montrer la surjectivité des $\Phi_{S^d_{\Bbbk^d},n}$ il suffirait alors de trouver pour chaque d des morphismes explicites de

$$H^0(S^d_{\Bbbk^d}) = \bigoplus_{e \geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_\Bbbk}(\Gamma^e \circ \Lambda^2, S^d_{\Bbbk^d})$$

qui sont envoyés par $\Phi_{S^d_{\Bbbk^d},n}$ sur les générateurs de $H^0(Sp_n, S_{\Bbbk^d}(V^\vee))$. Nous allons simplifier cette approche par une propriété de compatibilité aux produits, qui est valable en tout degré cohomologique, et qui est également utile dans les applications.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

2.2 Cup produits en cohomologie

Si G est un schéma en groupes et W et W' sont deux représentations de G, le cup produit $\cup : H^p(G,W)\otimes H^q(G,W') \to H^{p+q}(G, W\otimes W')$ est la composée

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{Rep}\,G}(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, W)\otimes \mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Rep}\,G}(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, W') & \xrightarrow{\otimes} & \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathrm{Rep}\,G}(\Bbbk^{\mathrm{triv}}\otimes\Bbbk^{\mathrm{triv}}, W\otimes W') \\ & \searrow^{\cup} & \downarrow\simeq \\ & & \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathrm{Rep}\,G}(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, W\otimes W') \end{array}$$

où l'isomorphisme vertical est induit par l'isomorphisme $\Delta : \Bbbk^{\mathrm{triv}} \to \Bbbk^{\mathrm{triv}}\otimes\Bbbk^{\mathrm{triv}}$ tel que $\Delta(1) = 1\otimes 1$. On peut définir de manière similaire un cup produit $\cup : H^p(F)\otimes H^q(G) \to H^{p+q}(F\otimes G)$ par les composées :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^p_{\mathscr{P}_\Bbbk}(\Gamma^d\circ\Lambda^2, F)\otimes \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{P}_\Bbbk}((\Gamma^e\circ\Lambda^2, G) & \xrightarrow{\otimes} & \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathscr{P}_\Bbbk}((\Gamma^d\otimes\Gamma^e)\circ\Lambda^2, F\otimes G) \\ & \searrow^{\cup} & \downarrow \\ & & \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathscr{P}_\Bbbk}(\Gamma^{d+e}\circ\Lambda^2, F\otimes G) \end{array}$$

où le morphisme vertical (qui n'est pas un isomorphisme en général) est induit par le morphisme de foncteurs strictement polynomiaux

$$\Delta_{de} : \Gamma^{d+e}\circ\Lambda^2 \to (\Gamma^d\otimes\Gamma^e)\circ\Lambda^2$$

donné par l'inclusion canonique de $\Gamma^{d+e} = (\otimes^{d+e})^{\mathfrak{S}_{d+e}}$ dans $\Gamma^d\otimes\Gamma^e = (\otimes^{d+e})^{\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_e}$. On vérifie facilement la proposition suivante.

Proposition 4.4.

Les applications $\Phi_{F,n}$ sont compatibles au cup produit, c'est à dire qu'elles vérifient :

$$\Phi_{F,n}(x)\cup\Phi_{G,n}(y) = \Phi_{F\otimes G,n}(x\cup y)\,.$$

Si maintenant A est une algèbre dont le produit $\mathrm{mult} : A\otimes A \to A$ est G-équivariant, on définit une structure d'algèbre sur la cohomologie $H^*(G,A)$ dont le produit (aussi appelé cup produit) est la composée :

$$H^p(G,A)\otimes H^q(G,A) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(G, A\otimes A) \xrightarrow{H^{p+q}(\mathrm{mult})} H^{p+q}(G,A)\,.$$

Le produit sur $H^0(G,A) = A^G$ ainsi obtenu n'est autre que le produit usuel des algèbres d'invariants. De même si A_i, $i\in\mathbb{N}$, est une famille de foncteurs strictement polynomiaux équipés de produits $A_i\otimes A_j \to A_{i+j}$ on peut définir une structure d'algèbre sur

$$H^*(A) = \bigoplus_{i\geqslant 0} H^*(A_i)$$

dont le produit est donné par les applications composées :

$$H^p(A_i)\otimes H^q(A_j) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(A_i\otimes A_j) \xrightarrow{H^{p+q}(\mathrm{mult})} H^{p+q}(A_{i+j})\,.$$

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Dans cette situation, la proposition 4.4 donne le résultat suivant.

Corollaire 4.5. Les applications $\Phi_{A_i,n}$ induisent un morphisme d'algèbres

$$\Phi_{A,n} : H^*(A) \to H^*(Sp_n, A(V^\vee)) .$$

2.3 Démonstration de la surjectivité

Nous montrons maintenant que pour $d \geqslant 0$ le morphisme $\Phi^0_{S_{\Bbbk^d},n}$ est surjectif (sans condition sur n).

On fixe un entier d et on pose $\mathbf{S}_i = S^i_{\Bbbk^d}$. Pour tout espace vectoriel W, $\mathbf{S}_i(W)$ est la composante homogène de degré i de l'algèbre symétrique sur $\Bbbk^d \otimes W \simeq W^{\oplus d}$, et la multiplication de cette algèbre symétrique définit des produits $\mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_j \to \mathbf{S}_{i+j}$. De plus, si V est la représentation standard de Sp_n, on a $\mathbf{S}(V^\vee) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathbf{S}_i(V^\vee) = P$. Les applications $\Phi_{\mathbf{S}_i,n}$ sont donc des facteurs directs du morphisme d'algèbres

$$\Phi^0_{\mathbf{S},n} : H^0(\mathbf{S}) \to H^0(Sp_n, \mathbf{S}(V^\vee)) = H^0(Sp_n, P) = P^{Sp_n} .$$

Pour montrer que le morphisme $\Phi_{\mathbf{S}_d,n}$ est surjectif, il suffit donc de montrer que $\Phi^0_{\mathbf{S},n}$ est surjectif.

La deuxième puissance extérieure Λ^2 est un sous-foncteur strictement polynomial de $\otimes^2$: c'est le noyau du morphisme $\otimes^2 = S^1 \otimes S^1 \to S^2$ induit par la multiplication de l'algèbre symétrique. On note $\iota : \Lambda^2 \to \otimes^2$ l'inclusion. Pour tout couple (i,j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant d$, on définit un morphisme

$$\mathrm{mult}(i,j) : \otimes^2 = S^1 \otimes S^1 \to \mathbf{S}_2$$

qui envoie $v \otimes w$ sur $(e_i \otimes v)(e_j \otimes w)$ où $(e_1, \dots, e_d)$ est la base canonique de $\Bbbk^d$. Un calcul facile montre que

$$\Phi^0_{\mathbf{S},n}(\mathrm{mult}(i,j) \circ \iota) = \Phi^0_{\mathbf{S}_2,n}(\mathrm{mult}(i,j) \circ \iota) = \omega_{ij} .$$

D'après le théorème fondamental 4.2 l'algèbre $H^0(Sp_n, \mathbf{S}(V^\vee))$ est engendrée par les classes ω_{ij}, donc $\Phi_{\mathbf{S},n}$ est bien surjectif.

3 Démonstration de l'injectivité en degré 0

Dans cette section, nous donnons deux démonstrations différentes de l'injectivité du foncteur $\Phi^0_{F,n}$ pour $F = S^d_{\Bbbk^d}$ et $0 \leqslant d \leqslant n$.

3.1 Une approche avec le deuxième théorème fondamental

Le premier théorème fondamental de la théorie des invariants pour Sp_n donne les générateurs de l'algèbre P^{Sp_n} où $P = \Bbbk[V^{\oplus d}]$ est l'algèbre des polynômes sur la somme de d copies de la représentations standard. Le deuxième théorème fondamental, démontré par Weyl [40] en caractéristique nulle et par De Concini et Procesi [6] en caractéristique quelconque, donne des générateurs de l'idéal noyau du morphisme surjectif :

$$\pi : \Bbbk[w_{ij},\ 1 \leqslant i < j \leqslant d] \twoheadrightarrow P^{Sp_n} .$$

Nous n'avons besoin que du cas particulier suivant du second théorème fondamental.

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Théorème 4.6 (Weyl– De Concini et Procesi).
Si $n \geqslant d$ alors π est un isomorphisme d'algèbres.

On fixe d, et on reprend les notations $\mathbf{S}_i = S^i_{\mathbb{k}^d}$ et $H^*(\mathbf{S}) = \bigoplus_{i\geqslant 0} H^*(\mathbf{S}_i)$ de la section 2.3. Le morphisme $\Phi^0_{\mathbf{S}_d,n}$ est facteur direct du morphisme d'algèbres :

$$\Phi^0_{\mathbf{S},n} : H^0(\mathbf{S}) \to H^0(Sp_n, \mathbf{S}(V^\vee)) = H^0(Sp_n, P) = P^{Sp_n}\,.$$

Pour montrer que $\Phi^0_{\mathbf{S}_d,n}$ est injectif si $d \leqslant n$, il nous suffit de montrer que le morphisme d'algèbres $\Phi^0_{\mathbf{S},n}$ est un isomorphisme si $d \leqslant n$. Ce morphisme d'algèbres devient un morphisme d'algèbres graduées si l'on munit P^{Sp_n} du degré polynomial usuel (donc $\deg \omega_{ij} = 2$) et si l'on définit le degré sur $H^0(\mathbf{S})$ en posant pour tout $e \geqslant 0$:

$$\deg\left(\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_\mathbb{k}}(\Gamma^e \circ \Lambda^2, \mathbf{S}_k)\right) = 2e\,.$$

Nous avons déjà démontré dans la section 2.3 que $\Phi^0_{\mathbf{S},n}$ est surjectif. Pour démontrer que $\Phi^0_{\mathbf{S},n}$ est injectif, il suffit donc de démontrer que les composantes homogènes de même degré de $H^0(\mathbf{S})$ et P^{Sp_n} ont même dimension (finie).

Les dimensions des composantes homogènes de degré e de P^{Sp_n} sont facilement calculables à partir du théorème 4.6. Celles de $H^0(\mathbf{S})$ peuvent être calculées à l'aide des isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_\mathbb{k}}(\Gamma^e \circ \Lambda^2, \mathbf{S}_i) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_\mathbb{k}}(\Gamma^e \circ \Lambda^2, S^{2e}_{\mathbb{k}^d}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_\mathbb{k}}(\Gamma^{2e\,\mathbb{k}^d}, S^d \circ \Lambda^2) \\ &\simeq S^e(\Lambda^2(\mathbb{k}^d))\,.\end{aligned}$$

Plus précisément, l'égalité provient du fait qu'il n'y a pas de morphisme non nul entre foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degrés distincts (proposition 3.19), le premier isomorphisme provient du fait que la dualité est une antiéquivalence de catégories (proposition 3.6) qui envoie $S^{2e}_{\mathbb{k}^d}$ sur $\Gamma^{2e\,\mathbb{k}^d}$ et $\Gamma^e \circ \Lambda^2$ sur $S^e \circ \Lambda^2$. Enfin la dernière est fournie par le lemme de Yoneda du corollaire 3.32. Les composantes homogènes de la source et du but de $\Phi^0_{\mathbf{S},n}$ ont donc même dimension.

3.2 Une approche avec le lemme de Yoneda

Nous donnons maintenant une deuxième approche reposant sur le lemme de Yoneda du corollaire 3.32. Rappelons que $V = \mathbb{k}^{2n}$.

Lemme 4.7. Si $n \geqslant d$, il existe un épimorphisme de foncteurs strictement polynomiaux

$$\Theta : \Gamma^{2d,V} \twoheadrightarrow \Gamma^d \circ \Lambda^2$$

tel que $\Theta_{V^\vee}(\mathrm{Id}^{\otimes 2d}_{V^\vee}) = \omega$.

Démonstration. Supposons $\dim W \geqslant d$. Alors la composition des morphismes $\mathfrak{S}_d$-équivariants donne un morphisme surjectif pour tout couple (U_1, U_2) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}\mathfrak{S}_d}(U_1^{\otimes d}, W^{\otimes d}) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}\mathfrak{S}_d}(W^{\otimes d}, U_2^{\otimes d}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}\mathfrak{S}_d}(U_1^{\otimes d}, U_2^{\otimes d})\,.$$

Cohomologie des groupes classiques Cohomologie de GL_n Schémas en groupes Introduction
www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2022

(On utilise pour le voir que $U_1^{\otimes d}$ et $U_2^{\otimes d}$ sont des sommes directes de $\mathfrak{S}_d$-modules de permutation du type $\Bbbk\mathfrak{S}_d/\mathfrak{S}_\mu$, μ partition de d, et comme $\dim W \geqslant d$, W contient tous ces modules comme facteur direct.). En prenant $U_1 = U^\vee$ et $U_2 = U$, cette composition induit un épimorphisme de foncteurs strictement polynomiaux de la variable U :

$$\Gamma^{d,W^\vee}(U)\otimes\Gamma^{d,W}(U)\xrightarrow{\gamma}\Gamma^d(U^{\otimes 2})\,.$$

Posons $W=\Bbbk^n$, et notons e_i les vecteurs des bases canoniques de V et W, et $e_i^\vee$ les vecteurs des bases duales. Soit $\phi : V^\vee \simeq W\oplus W^\vee$ l'isomorphisme tel que $\phi(e_i^\vee)=e_i$ et $\phi(e_{i+n}^\vee)=e_i^\vee$ pour $1\leqslant i\leqslant n$. Alors ϕ induit un isomorphisme canonique de foncteurs strictement polynomiaux :

$$\Gamma^{2d,V^\vee}\simeq\Gamma^{2d,W^\vee\oplus W}\simeq\bigoplus_{0\leqslant i\leqslant 2d}\Gamma^{i,W^\vee}\otimes\Gamma^{2d-i,W}\,.$$

On a une projection associée $q : \Gamma^{2d,V^\vee}\twoheadrightarrow\Gamma^{d,W^\vee}\otimes\Gamma^{d,W}$. Enfin on note $\pi : \otimes^2\twoheadrightarrow\Lambda^2$ la projection canonique. On pose $\theta=\Gamma^d(\pi)\circ\gamma\circ q$. C'est un épimorphisme, et un calcul explicite montre que $\Theta_{V^\vee}(\mathrm{Id}_{V^\vee}^{\otimes 2d})=\omega$. □

La démonstration de l'injectivité de $\Phi^0_{F,n}$ pour tout F homogène s'obtient de la manière suivante. Si $\deg F$ est impair, la source de $\Phi_{F,n}$ est nulle (car les foncteurs strictement polynomiaux $\Gamma^k\circ\Lambda^2$ sont homogènes de degré pair et il n'y a pas de morphisme non nul entre foncteurs homogènes de degrés distincts, cf proposition 3.19). Si F est homogène de degré $2d$ alors

$$H^0(F)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{2d,\Bbbk}}(\Gamma^d\circ\Lambda^2,F)\,.$$

Comme $\Theta_{V^\vee}(\mathrm{Id}_{V^\vee}^{\otimes 2d})=\omega$, on a un carré commutatif, dans lequel l'isomorphisme horizontal est le morphisme de Yoneda du corollaire 3.32 :

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{2d,\Bbbk}}(\Gamma^{2d,V^\vee},F) & \xrightarrow{\simeq} & F(V^\vee)\\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{2d,\Bbbk}}(\theta,F)} & & \uparrow\\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{2d,\Bbbk}}(\Gamma^d\circ\Lambda^2,F) & \xrightarrow{\Phi^0_{F,n}} & F(V^\vee)^{Sp_n}\,.\end{array}$$

On en déduit l'injectivité de $\Phi^0_{F,n}$.

© Spartacus-Idh 2022

www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Chapitre 5

La conjecture de W. van der Kallen

1 Introduction

La définition suivante généralise la définition 1.10 donnée dans l'introduction du cours. Rappelons que les schémas en groupes sont implicitement supposés algébriques affines (convention 2.5).

Définition 5.1.

Soit G un schéma en groupes sur un corps $\Bbbk$.

1. On dit que G a la propriété d'*engendrement fini* (EF) si pour toute algèbre commutative de type fini A munie d'une action de G par automorphismes d'algèbres, l'algèbre $A^G = H^0(G,A)$ est de type fini.
2. On dit que G a la propriété d'*engendrement cohomologique fini* (ECF) si pour toute algèbre commutative de type fini A munie d'une action de G par automorphismes d'algèbres, l'algèbre[(a)] $H^*(G,A)$ est de type fini.

(*a*) La définition du produit des algèbres de cohomologie est donnée à la section 2.2 du chapitre 4.

Les schémas en groupes ayant la propriété (EF) sont connus. Si G est un schéma en groupes sur un corps $\Bbbk$ et $\overline{\Bbbk}$ est la clôture algébrique de $\Bbbk$ alors $G(\overline{\Bbbk})$ est un groupe linéaire algébrique sur $\overline{\Bbbk}$ au sens de la définition 1.1. Dans l'article [39], W. C. Waterhouse a montré que G a la propriété (EF) si et seulement si le groupe linéaire algébrique $G(\overline{\Bbbk})$ a la propriété (EF). Les groupes linéaires algébriques ayant la propriété (EF) ont été caractérisés par les travaux de Haboush, Nagata et Popov mentionnés au théorème 1.11. On a donc l'énoncé suivant.

Théorème 5.2 (Nagata – Haboush – Popov – Waterhouse).

Soit G un schéma en groupes sur un corps $\Bbbk$. Alors G possède la propriété (EF) si et seulement si le groupe linéaire algébrique $G(\overline{\Bbbk})$ est réductif, c'est-à-dire si et seulement si le radical unipotent de $G(\overline{\Bbbk})$ est trivial.

Exemples 5.3. Les schémas en groupes suivants ont la propriété (EF).

1. Les groupes finis, et plus généralement les schémas en groupes finis (c'est-à-dire représentés par une algèbre $\Bbbk[G]$ de dimension finie)
2. Les schémas en groupes classiques $\mathrm{GL}_n, SL_n, O_n, SO_n, Sp_n$.

Les propriétés de finitude des algèbres d'invariants sont donc bien comprises. Dans le reste du chapitre, nous en examinons la version cohomologique, c'est-à-dire le problème suivant.

Problème 5.4.

Quels schémas en groupes ont la propriété (ECF)?

Commençons par une observation élémentaire sur le problème 5.4. L'espace vectoriel $H^{>0}(G,A)$ des sommes d'éléments de degrés non nuls est un idéal de $H^*(G,A)$ et le quotient $H^*(G,A)/H^{>0}(G,A)$ est isomorphe à l'algèbre $H^0(G,A) = A^G$. On a donc :

$$G \text{ a la propriété (ECF)} \quad \Rightarrow \quad G \text{ a la propriété (EF).}$$

Les schémas en groupes ayant la propriété (ECF) sont à chercher parmi les schémas en groupes ayant la propriété (EF). La première classe d'exemples a été découverte en 1961 par L. Evens [8].

Théorème 5.5 (Evens).

Les groupes finis ont la propriété (ECF).

Le fait que la cohomologie des groupes finis soit une algèbre de type fini est un point fondamental pour la théorie des variétés support. Cette utilité pour la théorie des variétés support motiva l'extension de ces résultats aux schémas en groupes finis. Des premiers résultats positifs furent obtenus par Friedlander et Parshall dans les années 1980 [11, 12], mais le cas général résista longtemps, et fut finalement démontré par Friedlander et Suslin en 1997 [13].

Théorème 5.6 (Friedlander et Suslin).

Les schémas en groupes finis ont la propriété (ECF).

Au début des années 2000, W. van der Kallen conjectura que *tous* les schémas en groupes ayant la propriété (EF) ont la propriété (ECF), et donna une approche pour démontrer cette conjecture [37]. La dernière pierre à cette approche fut apportée dans l'article [35].

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

Théorème 5.7 (Touzé et van der Kallen).

Soit G un schéma en groupes sur un corps $\Bbbk$. Alors G a la propriété (ECF) si et seulement si G a la propriété (EF).

Comme les schémas en groupes ayant la propriété (EF) sont parfaitement connus, le théorème 5.7 donne une réponse complète au problème 5.4. Le but de ce chapitre est de donner les grandes lignes de la démonstration du théorème 5.7.

Avant de rentrer dans des considérations techniques, nous terminons cette introduction par deux remarques générales sur le théorème 5.7. Tout d'abord, ce théorème n'a d'intérêt qu'en caractéristique non nulle. En effet, si $\Bbbk$ est de caractéristique nulle, les schémas en groupes G ayant la propriété (EF) sont linéairement réductifs. En d'autres termes, toute représentation de G se décompose en somme directe de représentations simples. Par conséquent, pour toute algèbre A commutative de type fini on a :

$$H^*(G,A) = H^0(G,A)\,.$$

Les propriétés (EF) et (ECF) sont donc trivialement équivalentes en caractéristique nulle. La deuxième remarque porte sur l'extension naturelle du théorème 5.7 aux A-modules. Plus précisément, on suppose que G agit sur A par automorphismes d'algèbres. Soit M un A-module muni d'une action de G, de sorte que le morphisme d'action :

$$\lambda_M : A \otimes M \to M$$

soit G-équivariant. Alors $H^*(G,M)$ est un module gradué sur l'algèbre $H^*(G,A)$ via l'action donnée par la composition :

$$H^*(G,A) \otimes H^*(G,M) \xrightarrow{\cup} H^*(G,A\otimes M) \xrightarrow{H^*(G,\lambda_M)} H^*(G,M)\,.$$

Corollaire 5.8. Supposons que A est une algèbre commutative de type fini et que M est un A-module de type fini. Si G a la propriété (EF) alors $H^*(G,M)$ est un $H^*(G,A)$-module de type fini.

Démonstration. On considère l'algèbre $B = S^*_A(M)/S^{>1}(M) = A \oplus M$. Cette $\Bbbk$-algèbre B est de type fini donc d'après le théorème 5.7 la $\Bbbk$-algèbre $H^*(G,B) = H^*(G,A) \oplus H^*(G,M)$ est de type fini, ce qui signifie que $H^*(G,M)$ est un $H^*(G,A)$-module de type fini. □

2 Guide pour la preuve du théorème 5.7

Dans cette section, nous donnons un aperçu de l'organisation de la démonstration du théorème 5.7. Puis nous passons en revue des outils classiques utilisés dans la démonstration : suites spectrales, morphismes noethériens, torsion de Frobenius, théorie des poids pour les représentations de GL_n.

2.1 L'architecture de la démonstration

L'architecture de la démonstration du théorème 5.7 est donnée par W. van der Kallen dans l'article [37]. La démonstration peut se découper en trois étapes principales.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

1. La première étape consiste à réduire la démonstration au cas du groupe $G = \mathrm{GL}_n$ sur un corps de base $\Bbbk$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.
2. La deuxième étape consiste à montrer que si A est une $\Bbbk$-algèbre de type fini munie d'une action rationnelle de GL_n par automorphismes d'algèbres, alors l'algèbre de cohomologie
$$H^*(\mathrm{GL}_n, \mathrm{gr}A)$$
est une $\Bbbk$-algèbre de type fini. Les coefficients 'gr$A$' apparaissant dans cette algèbre de cohomologie ne sont pas les coefficients apparaissant dans le théorème 5.7. La notation 'gr' fait référence à la filtration de Grosshans de A ; l'algèbre gr$A$ est une $\Bbbk$-algèbre de type fini, qui « ressemble » à A, mais qui est cohomologiquement plus simple à étudier que A.
3. La troisième étape consiste à « reconstruire » l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathrm{GL}_n, A)$ à partir de l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathrm{GL}_n, \mathrm{gr}A)$. On peut ainsi démontrer que $H^*(\mathrm{GL}_n, A)$ est une $\Bbbk$-algèbre de type fini.

Les trois étapes de la démonstration sont détaillées dans la suite du chapitre, dans les sections 3, 4 et 5 respectivement. Ces trois sections n'utilisent que les faits généraux sur les schémas en groupes rappelés dans la section 2. La dernière étape utilise comme ingrédient essentiel certaines « classes cohomologiques universelles ». La construction de ces classes est un des apports essentiels des articles [31, 35]. Un aperçu de cette construction est donnée au chapitre 6.

2.2 Utilisation des suites spectrales

La notion de *suite spectrale d'algèbres* joue un rôle important dans les deuxième et troisième étapes de la démonstration du théorème 5.7. Intuitivement, une suite spectrale peut être pensé comme un « algorithme » qui calcule une algèbre graduée A^* à partir d'une algèbre *bi*graduée initiale $B^{*,*}$. Cette algèbre bigraduée $B^{*,*}$ est appelée la page initiale de la suite spectrale (sur certaines suites spectrale la page initiale est la page 1, sur certaines suites spectrales la page initiale est la page 2). L'existence d'une suite spectrale calculant A^* à partir de $B^{*,*}$ placée en page initiale i_0 se note de la façon suivante :
$$E_{i_0}^{s,t} = B^{s,t} \Longrightarrow A^{s+t}.$$
Concrètement, une telle suite spectrale signifie qu'il existe une suite d'algèbres bigraduées $E_i^{*,*}$ (les *pages* de la suite spectrale), chacune munie d'une différentielle d'algèbre bigraduée d_i (de bidegré $(i, i-1)$) :
$$(E_{i_0}^{*,*}, d_{i_0}), (E_{i_0+1}^{*,*}, d_{i_0+1}), (E_{i_0+2}^{*,*}, d_{i_0+2}), (E_{i_0+3}^{*,*}, d_{i_0+3}) \dots$$
telles que la page i_0 soit égale à B et que l'on puisse chaque page E_{i+1} comme la cohomologie de la page précédente (on « tourne les pages » de la suite spectrale en calculant les cohomologies successives) :
$$E_{i+1}^{s,t} = H^{s,t}(E_i^{*,*}, d_i).$$
Ce procédé de calcul itératif converge vers A^* dans le sens suivant. Pour chaque bidegré (s,t) fixé, le $\Bbbk$-espace vectoriel $E_j^{s,t}$ ne change plus si j est un entier assez grand par rapport à s, t et on note $E_\infty^{s,t}$ cette valeur limite. En prenant la somme directe de toutes ces valeurs

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

limites, et en décrétant que chaque espace vectoriel $E_\infty^{s,t}$ est placé en degré $s+t$, on obtient une algèbre graduée E_∞^* qui est « proche » de l'algèbre A^*. Plus précisément, il existe une filtration d'algèbres sur A^*, et un isomorphisme d'algèbres graduées

$$E_\infty^* \simeq \mathrm{gr} A^* \,. \qquad (*)$$

Nous renvoyons le lecteur aux traités classiques sur les suites spectrales, par exemple [20, 22], pour plus de détails sur la construction et les calculs de suites spectrales. Soulignons seulement que le mot « algorithme » est bien à prendre entre guillemets, car une suite spectrale ne permet pas toujours de faire des calculs effectifs : les différentielles d_i ont une existence théorique, mais il n'y a aucune « recette automatique » pour les calculer en pratique.

Toutefois, il est possible d'utiliser les suites spectrales sans faire de calculs explicites, pour « propager » des propriétés qualitatives des objets considérés. Cette idée remonte aux travaux de Serre en homotopie [28]. De façon plus précise, les étapes deux et trois de la démonstration du théorème 5.7 considèrent chacune une suite spectrale (classique) d'algèbres du type $(*)$ ci-dessus. Le travail consiste alors à montrer que A^* est de type fini en utilisant le lemme suivant.

Lemme 5.9 (de propagation des propriétés de finitude). Supposons que les trois conditions suivantes sont satisfaites.

(C1) La $\Bbbk$-algèbre $B^{*,*}$ est de type fini.

(C2) La suite spectrale est « globalement stationnaire », c'est-à-dire qu'il existe un entier i_1 tel que $d_i = 0$ pour $i \geqslant i_1$.

(C3) La filtration d'algèbres sur A^* se restreint sur chaque A^i en une filtration finie.

Alors A^* est une $\Bbbk$-algèbre de type fini.

Démonstration. La première condition entraine que toutes les pages de la suite spectrale sont des algèbres de type fini. En effet, soit $(E^{*,*}, d)$ une algèbre différentielle de type fini sur un corps de caractéristique $p > 0$. Alors la sous-algèbre $E'^{*,*}$ engendrées par les puissances p-ièmes des éléments de $E^{*,*}$ est de type fini, elle est composée de cycles (car $d(x^p) = pdx = 0$), et $E^{*,*}$ est un module noethérien sur $E'^{*,*}$. On en déduit que $H^{*,*}(E^{*,*}, d)$ est un module noethérien sur $E'^{*,*}$, donc que $H^{*,*}(E^{*,*}, d)$ est une $\Bbbk$-algèbre de type fini. La deuxième condition entraine que E_∞^* est égale à la totalisation de l'algèbre bigraduée $E_{i_1}^{*,*}$, donc que la $\Bbbk$-algèbre $E_\infty^* \simeq \mathrm{gr} A^*$ est de type fini. Enfin si la troisième condition est satisfaite et si $\mathrm{gr} A^*$ est de type fini, on peut relever les générateurs dans A^* pour montrer que A^* elle-même est de type fini. □

Remarque 5.10. Dans la démonstration du théorème 5.7, les conditions (C1) et (C2) du lemme 5.9 sont les deux conditions réellement significatives, et le travail difficile consiste à montrer que ces deux conditions sont satisfaites. La condition (C3) est une condition technique qui sera automatiquement satisfaite pour les suites spectrales considérées.

Dans la deuxième étape de la démonstration du théorème 5.7, les conditions du lemme 5.9 sont établies en utilisant d'une part un cas particulier du corollaire 5.8 démontré [29, 37] par une approche directe, et d'autre part le théorème de Friedlander et Suslin [13] qui est le cas particulier du théorème 5.7 pour les schémas en groupes finis.

Dans la troisième étape de la démonstration du théorème 5.7, La condition (C1) du théorème est fournie par l'étape précédente, et la condition (C2) est obtenue par une méthode classique due à Evens [8]. Elle utilise une famille de classes cohomologiques universelles construites dans [31], qui généralisent les classes cohomologiques universelles calculées par Friedlander et Suslin dans [13].

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

2.3 Morphismes noethériens et torsion de Frobenius

Définition 5.11.

Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbres graduées commutatives. On dit que f est *noethérien* s'il fait de B un A-module noethérien.

La notion de morphisme noethérien est très liée aux propriétés (EF) et (ECF). Notons $G-\mathrm{Alg}_{\Bbbk}^{tf}$ la catégorie des $\Bbbk$-algèbres commutative unitaires de type fini, munies d'une action de G par automorphismes d'algèbres et des morphismes d'algèbres G-équivariants, soit $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ la catégorie des $\Bbbk$-algèbres commutatives unitaires et des morphismes d'algèbres, et soit $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}^{*}$ la catégorie des $\Bbbk$-algèbres graduées commutatives unitaires et des morphismes d'algèbres graduées. Alors les points fixes et la cohomologie de G définissent des foncteurs :

$$H^0(G,-) : G-\mathrm{Alg}_{\Bbbk}^{tf} \to \mathrm{Alg}_{\Bbbk}\,, \qquad H^*(G,-) : G-\mathrm{Alg}_{\Bbbk}^{tf} \to \mathrm{Alg}_{\Bbbk}^{*}\,.$$

Le corollaire 5.8 et son analogue pour les schémas en groupes possédant la propriété (EF) peuvent alors se réécrire de la façon suivante.

Lemme 5.12. Si G possède la propriété (EF), resp. (ECF), alors $H^0(G,-)$, resp. $H^*(G,-)$, préserve les morphismes noethériens.

Au cours de la démonstration du théorème 5.7, nous utiliserons également les propriétés élémentaires suivantes.

Lemme 5.13. Soient $A \xrightarrow{f} B$ et $B \xrightarrow{g} C$ des morphismes de $\Bbbk$-algèbres graduées commutatives.

1. Si g et f sont noethériens, alors $g \circ f$ est noethérien.
2. Si $g \circ f$ est noethérien alors g est noethérien. Si g est injectif alors f est également noethérien.
3. Si A est de type fini et si f est noethérien, alors B est de type fini.

Enfin, une source de morphismes noethériens dans la démonstration du théorème 5.7 est fournie par des constructions liées à la torsion de Frobenius. Soit A une algèbre graduée commutative de type fini sur un corps parfait $\Bbbk$ de caractéristique $p > 0$. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on note $A^{(r)}$ l'anneau A, muni de la structure d'algèbre donnée par le morphisme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} \Bbbk & \to & A \\ \lambda & \mapsto & \lambda^{p^{-r}} 1_A \end{array}\,.$$

Si A est une $\Bbbk$-algèbre de type fini alors $A^{(r)}$ l'est également. La structure de $\Bbbk$-algèbre sur $A^{(r)}$ est réglée de façon à ce que pour tout $r \geqslant 0$ le morphisme d'élévation à la puissance p^r :

$$P^r : \begin{array}{ccc} A^{(r)} & \to & A \\ a & \mapsto & a^{p^r} \end{array}$$

soit un morphisme de $\Bbbk$-algèbres.

Lemme 5.14. Soit A une algèbre graduée commutative de type fini. Pour tout $r \geqslant 0$, le morphisme P^r est noethérien.

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

Démonstration. Si $a_1,\dots,a_n$ est une famille génératrice de l'algèbre A, alors A est un module de type fini sur $A^{(r)}$, engendré par les éléments $a_1^{\lambda_1}\cdots a_n^{\lambda_n}$, pour des entiers λ_i tels que $0 \leqslant \lambda_i < p$. Le résultat découle du point 3 du lemme 5.13. □

Remarque 5.15. La définition de l'algèbre $A^{(r)}$ est un cas particulier de la construction suivante. Si V est un espace vectoriel sur un corps parfait $\Bbbk$, on note $V^{(r)}$ le même groupe abélien, muni d'une action de $\Bbbk$ définie par $\lambda\cdot v := \lambda^{p^{-r}} v$. Si $r \geqslant 0$, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels, *naturel en* V :

$$V^{(r)} \simeq I^{(r)}(V)$$

où $I^{(r)}$ est le foncteur de torsion de Frobenius défini à la section 2.3. En particulier, si V est muni d'une action de GL_n alors $V^{(r)}$ est muni d'une action de GL_n. Cette action de GL_n sur $V^{(r)}$ peut également se voir facilement sur les structures de comodules. La structure de $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]$-comodule de $V^{(r)}$ est donnée par la composée :

$$V^{(r)} \xrightarrow{\Delta_V^{(r)}} (V\otimes\Bbbk[\mathrm{GL}_n])^{(r)} = V^{(r)}\otimes\Bbbk[\mathrm{GL}_n]^{(r)} \xrightarrow{V^{(r)}\otimes F^r} V^{(r)}\otimes\Bbbk[\mathrm{GL}_n]\,.$$

Cette construction est à priori différente de la représentation $V^{[r]}$ définie à la section 1, qui correspond à la structure de comodule

$$V \xrightarrow{\Delta_V} V\otimes\Bbbk[\mathrm{GL}_n] \xrightarrow{V\otimes F^{r*}} V\otimes\Bbbk[\mathrm{GL}_n]$$

où F^{r*} est défini sur les générateurs de $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]$ par $F^{r*}(x_{ij}) = x_{ij}^{p^r}$. Cependant, si $\Bbbk$ est un corps fini de cardinal p^r, ou plus généralement si V est définie sur $\mathbb{F}_{p^r}$ (c'est à dire provient par extension des scalaires à $\Bbbk$ d'une représentation de GL_n sur $\mathbb{F}_{p^r}$) alors les deux constructions coïncident. Par exemple, on a des isomorphismes de $\Bbbk$-algèbres GL_n-équivariants

$$\Bbbk[\mathfrak{gl}_n]^{[r]} \simeq \Bbbk[\mathfrak{gl}_n]^{(r)}\,.$$

2.4 Poids d'une représentation de GL_n

Une méthode classique pour analyser une représentation de GL_n consiste à regarder comment le sous-schéma en groupes T des matrices diagonales agit sur cette représentation. Pour tout $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ on note $c_\lambda : T \to \mathbb{G}_m$ le caractère (c'est-à-dire le morphisme de schémas en groupes) qui envoie une matrice diagonale de coefficients diagonaux $(x_{11},\dots,x_{nn})$ sur le produit $x_{11}^{\lambda_1}\cdots x_{nn}^{\lambda_n}$. On a un isomorphisme de groupes abéliens (déjà mentionné à l'exemple 2.24)

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{Z}^n,+) & \xrightarrow{\simeq} & X(T)\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n) & \mapsto & c_\lambda\end{array}\,.$$

Comme T est isomorphe à un produit de n copies du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$, il résulte du lemme 3.15 que toute représentation de GL_n se décompose, en tant que représentation de T, en une somme directe :

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} V_\lambda \qquad (*)$$

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

où T agit sur chaque V_λ via la formule $t \cdot v = c_\lambda(t)v$. Les n-uplets λ tels que $V_\lambda \neq 0$ sont appelés les *poids* de la représentation V, et les V_λ sont appelés *espaces de poids* de la représentation.

Remarque 5.16. D'après la proposition 3.16, toute représentation V de GL_n se décompose en une somme directe de représentations de GL_n :

$$V = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} V_d,$$

où par définition V_d est la plus grosse sous-représentation de V sur laquelle le groupe $\mathbb{G}_m = Z(\mathrm{GL}_n)$ des homothéties agit via $(\lambda \mathrm{Id}) \cdot v = \lambda^d v$. La décomposition en poids $(*)$ raffine cette décomposition selon le degré. En effet, en notant $|\lambda| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$, on obtient pour tout d :

$$V_d = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n, |\lambda|=d} V_\lambda .$$

Exemple 5.17. Soit $n = 3$. Les poids de $S^2(\Bbbk^3)$, la deuxième puissance symétrique de la représentation naturelle de GL_3, sont les poids $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ et tous les espaces de poids sont de dimension 1.

L'*ordre de dominance* est la relation d'ordre partiel définie sur $\mathbb{Z}^n$ par $\lambda \geqslant \mu$ s'il existe des entiers positifs ou nuls $k_1, \ldots, k_{n-1}$ tels que

$$\lambda - \mu = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1}$$

où α_i est le n-uplet $\alpha_i = (0,\ldots,0,1,-1,0,\ldots,0)$ avec 1 en i-ième position. L'ordre de dominance raffine l'ordre lexicographique :

$$(\lambda \geqslant \mu) \Rightarrow (\lambda \geqslant_{\mathrm{lex}} \mu).$$

Notons $|\lambda| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$, alors si deux n-uplets λ et μ sont comparables pour l'ordre de dominance, on a $|\lambda| = |\mu|$. L'exemple suivant montre que cette condition n'est pas suffisante.

Exemple 5.18. Supposons $n = 3$. Alors $(4,1,1) \geqslant (2,2,2)$, $(3,3,0) \geqslant (2,2,2)$ mais $(4,1,1)$ et $(3,3,0)$ sont incomparables pour l'ordre de dominance.

Si λ est un poids de la représentation V, alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le n-uplet est $\sigma \cdot \lambda = (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)})$ est également un poids de V. En effet, l'action de la matrice de permutation $p_\sigma \in \mathrm{GL}_n$ induit un isomorphisme entre les espaces vectoriels V_λ et $V_{\sigma\cdot\lambda}$. Parmi les poids de la forme $\sigma \cdot \lambda$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il y en a un qui est plus grand que tous les autres pour l'ordre de dominance : celui dont les coordonnées sont décroissantes. Ceci amène naturellement la définition suivante. Un *poids dominant* est un n-uplet $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

Un théorème classique assure que cette définition de poids dominant coïncide avec celle donnée à la section 6, c'est-à-dire que n-uplets λ tel que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ sont exactement les caractères de T pour lesquels la représentation costandard ∇_λ est non nulle.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

3 Réduction à GL_n sur un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle (étape 1)

Nous avons déjà expliqué à la fin de l'introduction de ce chapitre qu'en caractéristique nulle, les schémas en groupes algébriques ayant la propriété (EF) n'ont pas de cohomologie en degré non nul, de sorte que les propriétés (EF) et (ECF) sont trivialement équivalentes. Nous pouvons donc nous contenter de démontrer le théorème 5.7 dans le cas où $\Bbbk$ est un corps de caractéristique $p > 0$.

Le lemme suivant montre qu'il suffit de démontrer le théorème 5.7 lorsque le corps de base $\Bbbk$ est algébriquement clos.

Lemme 5.19. Soit $\Bbbk$ un corps, de clôture algébrique $\overline{\Bbbk}$, et soit G un schéma en groupes sur $\Bbbk$. Si $G_{\overline{\Bbbk}}$ a la propriété (ECF) alors G a la propriété (ECF).

Démonstration. La formule de changement de base de la proposition 2.23 donne un isomorphisme de $\overline{\Bbbk}$-algèbres $H^*(G,A)\otimes_{\Bbbk}\overline{\Bbbk}\simeq H^*(G_{\overline{\Bbbk}},A\otimes_{\Bbbk}\overline{\Bbbk})$. Le résultat découle alors du fait qu'une $\Bbbk$-algèbre graduée commutative B est de type fini si et seulement si la $\overline{\Bbbk}$-algèbre graduée commutative $B\otimes_{\Bbbk}\overline{\Bbbk}$ est de type fini. □

Tout schéma en groupes [(1)] est isomorphe à un sous-schéma en groupes d'un schéma en groupes GL_n, pour n assez grand. Le lemme astucieux suivant, dû à W. van der Kallen [37], permet donc de réduire la démonstration du théorème au cas des groupes linéaires $G = \mathrm{GL}_n$.

Lemme 5.20 ([37]). Supposons que GL_n possède la propriété (ECF), et soit G un sous-schéma en groupes de GL_n. Alors G possède la propriété la propriété (EF) si et seulement si G possède la propriété (ECF).

Démonstration. Nous avons déjà expliqué dans l'introduction du chapitre que (ECF)⇒(EF). Il nous faut montrer la réciproque. Nous utilisons pour cela le foncteur d'induction (déjà rencontré à la section 6 du chapitre 2) qui à un G-module M associe un GL_n-module $\mathrm{ind}_G^{\mathrm{GL}_n}M$, de telle sorte que l'on a un isomorphisme naturel en M

$$H^0(G,M)\simeq H^0(\mathrm{GL}_n,\mathrm{ind}_G^{\mathrm{GL}_n}M)\,. \qquad (*)$$

Supposons que G possède la propriété (EF). Alors GL_n/G est une variété affine (d'algèbre de coordonnées $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]^G$) et le foncteur d'induction est donc exact [19, I.5.13] (en effet les dérivés du foncteur d'induction s'interprètent comme la cohomologie de certains faisceaux quasi-cohérents sur la variété affine GL_n/G qui est nulle d'après un résultat de Serre). L'isomorphisme $(*)$ se dérive donc en un isomorphisme :

$$H^*(G,M)\simeq H^*(\mathrm{GL}_n,\mathrm{ind}_G^{\mathrm{GL}_n}M)\,.$$

Pour toute $\Bbbk$-algèbre de type fini A muni d'une action de G par automorphismes d'algèbres, la représentation induite

$$\mathrm{ind}_G^{\mathrm{GL}_n}A=(\Bbbk[\mathrm{GL}_n]\otimes A)^G$$

est égale aux invariants de la $\Bbbk$-algèbre de type fini $\Bbbk[\mathrm{GL}_n]\otimes A$ sous l'action de G (par définition de l'induction, G agit par $g\cdot(f(h)\otimes a)=f(hg)\otimes ga$), qui est de type fini car G possède la

(1) Rappelons que selon la convention 2.5, l'expression « schéma en groupes » signifie pour nous schéma en groupes *algébriques affines*. L'isomorphisme avec un sous-schéma en groupes de GL_n caractérise les schémas en groupes algébriques affines parmi les schémas en groupes au sens le plus général.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

propriété (EF). Mais comme GL_n a la propriété (ECF) on obtient donc que l'algèbre de cohomologie

$$H^*(G,A) \simeq H^*(\mathrm{GL}_n, \mathrm{ind}_G^{\mathrm{GL}_n} A)$$

est de type fini. □

4 La filtration de Grosshans (étape 2)

Dans cette section, $\Bbbk$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et on note $G = \mathrm{GL}_n$. Nous expliquons la construction et l'utilisation cohomologique d'une certaine filtration naturelle des représentations de G. Cette filtration, qui occupe une place importante dans les travaux de F. Grosshans en théorie des invariants [15], est baptisée *filtration de Grosshans* par W. van der Kallen [37].

4.1 La filtration de Grosshans

La hauteur de Grosshans de $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ est l'entier relatif

$$\mathrm{ht}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (n-2i+1)\lambda_i = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i - \lambda_j \,.$$

Remarque 5.21. Si $\lambda \geqslant \mu$ pour l'ordre de dominance, alors $\lambda = \mu + \sum_{1 \leqslant i < n} k_i \alpha_i$ pour des entiers positifs k_i uniquement déterminés. L'unicité implique que dans le diagramme de Hasse de $(\mathbb{Z}^n, \leqslant)$, tous les chemins orientés d'origine λ et d'extrémité μ ont même longueur $\ell_{\lambda \to \mu}$. Comme la fonction hauteur est additive sur $\mathbb{Z}^n$, et que les n-uplets $\alpha_i = (0, \ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0)$ avec 1 en i-ième position sont de hauteur 2, on déduit alors la formule plus « géométrique » :

$$\mathrm{ht}(\lambda) = \mathrm{ht}(\mu) + 2\ell_{\lambda \to \mu} \,.$$

Soit V une représentation de G, et i un entier. On définit $V_{\leqslant i} \subset V$ comme la plus grosse sous-représentation de V dont tous les poids dominants μ sont tels que $\mathrm{ht}(\mu) \leqslant i$. Comme les poids dominants sont de hauteur positive ou nulle, on a $V_{\leqslant -1} = 0$. La *filtration de Grosshans* de V est la filtration :

$$0 = V_{\leqslant -1} \subset V_{\leqslant 0} \subset V_{\leqslant 1} \subset \cdots \subset V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} V_{\leqslant i} \,.$$

Exemple 5.22. Soit V une représentation de G de degré nul, c'est-à-dire sur laquelle le centre de G agit trivialement. On a :

$$V_{\leqslant 0} = V^G \,, \qquad V_{\leqslant 2i} = V_{\leqslant 2i+1} \text{ pour tout } i \geqslant 0.$$

La première égalité découle du fait que le poids nul est le seul λ dominant tel que $|\lambda| = 0$. La second égalité provient du fait que tous les λ dominants tels que $|\lambda| = 0$ sont de hauteur paire.

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

On note $\operatorname{gr} V$ le gradué associé à la filtration de Grosshans :

$$\operatorname{gr} V = \bigoplus_{i\geqslant 0} \operatorname{gr}_i V = \bigoplus_{i\geqslant 0} V_{\leqslant i}/V_{\leqslant i-1}\,.$$

Théorème 5.23 (Propriétés de la filtration de Grosshans).

1. Si A est une algèbre sur laquelle G agit par automorphismes d'algèbres, alors la filtration de Grosshans est une filtration d'algèbres. De plus, tout morphisme d'algèbres G-équivariant $f : A \to B$ préserve les filtrations de Grosshans.
2. Il existe une algèbre munie d'une bonne filtration $\operatorname{hull}_\nabla(\operatorname{gr} A)$ et un morphisme d'algèbres injectif et G-équivariant :
$$\operatorname{gr} A \hookrightarrow \operatorname{hull}_\nabla(\operatorname{gr} A)$$
3. Si A est une $\Bbbk$-algèbre de type fini, alors $\operatorname{gr} A$ et $\operatorname{hull}_\nabla(\operatorname{gr} A)$ sont des $\Bbbk$-algèbres de type fini. De plus, il existe un $r \geqslant 0$ tel que le morphisme d'élévation à la puissance p^r factorise comme la composée de deux morphismes noethériens :
$$\operatorname{hull}_\nabla(\operatorname{gr} A)^{(r)} \to \operatorname{gr} A \hookrightarrow \operatorname{hull}_\nabla(\operatorname{gr} A)\,.$$

Remarque 5.24. Le premier point du théorème 5.23 est une conséquence facile des définitions. Le deuxième point et les propriétés d'engendrement fini sont démontrées dans [15]. Enfin, l'existence de l'entier r est un résultat de O. Mathieu [21].

4.2 La suite spectrale de Hochschild-Serre

Pour tout $r \geqslant 1$, on note $G^{(r)}$ le schéma en groupes représenté par l'algèbre de Hopf $\Bbbk[G]^{(r)}$. Cette algèbre de Hopf est isomorphe à $\Bbbk[G]$ via le morphisme d'algèbres qui envoie chaque générateur x_{ij} de $\Bbbk[G]$ sur le générateur x_{ij} de $\Bbbk[G]^{(r)}$; on a donc un isomorphisme de schémas en groupes $\phi : G^{(r)} \simeq G$. La composée du morphisme $\pi : G \to G^{(r)}$ induit par le morphisme P^r du lemme 5.14 et de l'isomorphisme ϕ est égale au morphisme de Frobenius F^r introduit à l'exemple 2.20. On a donc une suite exacte courte de schémas en groupes

$$1 \to G_r \to G \xrightarrow{\pi} G^{(r)} \to 1$$

où G_r est le r-ième noyau de Frobenius de G. Pour toute représentation V de G, cette suite exacte courte induit une suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$^{\mathrm{HS}}E_2^{s,t}(V) = H^s\left(G^{(r)}, H^t(G_r, V)\right) \Rightarrow H^{s+t}(G, V)\,. \qquad (*)$$

Si V a une structure d'algèbre compatible avec l'action de G alors c'est une suite spectrale d'algèbres.

Si W est une représentation de $G^{(r)}$, alors $W^{(-r)}$ est une représentation de G, l'action correspondant à la structure de comodule :

$$W^{(-r)} \xrightarrow{\Delta_W^{(-r)}} (W \otimes \Bbbk[G]^{(r)})^{(-r)} = W^{(-r)} \otimes \Bbbk[G]\,.$$

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

Ceci définit un foncteur $^{(-r)} : \operatorname{Rep} G^{(r)} \to \operatorname{Rep} G$ exact qui préserve les injectifs. On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$H^*(G^{(r)}, W) \simeq H^*(G, W^{(-r)})$$

pour toute représentation W. La seconde page de la suite spectrale de Hochschild-Serre peut ainsi se réécrire :

$$^{\mathrm{HS}}E_2^{s,t}(V) \simeq H^s\left(G, H^t(G_r, V)^{(-r)}\right).$$

Remarque 5.25. Cette réécriture de la page deux permet en pratique d'utiliser la suite spectrale de Hochschild-Serre $(*)$ pour « retirer la torsion de Frobenius » des représentations. Par exemple, si B est une $\Bbbk$-algèbre munie d'une action de G par automorphismes d'algèbres et si $V = B^{(r)}$ où la torsion de Frobenius est définie comme dans la remarque 5.15, alors G_r agit trivialement sur $B^{(r)}$ et on a donc un isomorphisme d'algèbres :

$$H^*\left(G_r, B^{(r)}\right) \simeq H^*(G_r, \Bbbk) \otimes B^{(r)}.$$

La suite spectrale $(*)$ s'écrit alors :

$$^{\mathrm{HS}}E_2^{s,t}(B^{(r)}) \simeq H^s\left(G, H^t(G_r, \Bbbk)^{(-r)} \otimes B\right) \Rightarrow H^{s+t}\left(G, B^{(r)}\right).$$

On observe que B apparaît *sans torsion de Frobenius* à la page initiale de la suite spectrale. On a donc accès à la cohomologie de $B^{(r)}$ à partir de la cohomologie de B. Le prix à payer pour cette manipulation peut paraître lourd : on a une suite spectrale qui n'est pas forcément calculable, dont la page deux fait apparaître $H^*(G_r, \Bbbk)^{(-r)} \otimes B$ plutôt que B simplement. C'est toutefois une variante de cette manipulation qui va être utilisée avec succès dans la section 4.3.

4.3 Cohomologie du gradué de Grosshans

Théorème 5.26 ([37]).

Soit A une $\Bbbk$-algèbre finie, munie d'une action de G par automorphismes d'algèbres. Soit $\operatorname{gr} A$ le gradué associé à la filtration de Grosshans. Alors $H^*(G, \operatorname{gr} A)$ est une $\Bbbk$-algèbre de type fini.

Ce théorème constitue l'étape deux de la démonstration du théorème 5.7. Le reste de la section 4.3 est consacrée à la démonstration du théorème 5.26. On considère la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$^{\mathrm{HS}}E_2^{s,t}(\operatorname{gr} A) \simeq H^s\left(G, H^t(G_r, \operatorname{gr} A)^{(-r)}\right) \Rightarrow H^{s+t}(G, \operatorname{gr} A).$$

C'est une suite spectrale d'algèbres, et pour démontrer le théorème 5.26, il suffit de montrer qu'elle satisfait les conditions du lemme 5.9. La condition (C3) du lemme 5.9 est toujours satisfaite pour la suite spectrale de Hochschild-Serre. Pour établir les conditions (C1) et (C2), on utilise une version détaillée du théorème de Friedlander et Suslin [13]. Soit $\mathfrak{gl}_n^{(r)}$ la r-ième

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

torsion de Frobenius de la représentation adjointe de G. Sa restriction à G_r est une représentation triviale de dimension n^2. Notons

$$\mathbf{S}_r = \bigotimes_{i=1}^{r} \Bbbk[\mathfrak{gl}_n^{(r)}\langle 2p^{i-1}\rangle]$$

le produit tensoriel de r algèbres de polynômes sur des copies de $\mathfrak{gl}_n^{(r)}$. C'est une $\Bbbk$-algèbre de type fini, graduée et concentrée en degrés pairs, les crochets $\langle 2p^{i-1}\rangle$ indiquant que la i-ième copie de $\mathfrak{gl}_n^{(r)}$ est placée en degré $2p^{i-1}$. L'action naturelle de G_r sur cette algèbre est triviale.

Théorème 5.27 ([13]).

Il existe un morphisme noethérien G-équivariant :

$$\phi_{FS} : \mathbf{S}_r \to H^*(G_r, \Bbbk)\,.$$

De plus, pour toute $\Bbbk$-algèbres de type fini A, B munies d'une action de G par automorphismes d'algèbres, et tout morphisme noethérien $f : B \to A$, le morphisme suivant est également noethérien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}_r \otimes H^0(G_r, B) & \to & H^*(G_r, A) \\ x \otimes y & \mapsto & \phi_{FS}(x) \cup f(y) \end{array}\,.$$

Nous avons aussi besoin du cas particulier suivant du corollaire 5.8. Il a été établi dans [37] sous l'hypothèse technique $n < 6$ ou $p > 2^n$. Cette hypothèse technique a ensuite été retirée en collaboration avec V. Srinivas dans [29].

Théorème 5.28 ([29]).

Soit A une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini, et M un A-module de type fini. On suppose que G agit sur A (par automorphismes d'algèbres) et sur M, de sorte que le morphisme $A \otimes_{\Bbbk} M \to M$ soit G-équivariant.

Si A possède une bonne filtration, alors $H^*(G, M)$ est un module de type fini sur l'algèbre commutative de type fini $H^*(G, A) = H^0(G, A)$. En particulier $H^i(G, M) = 0$ pour $i \gg 0$.

Nous montrons maintenant que la suite spectrale de Hochschild-Serre $(**)$ satisfait les conditions (C1) et (C2) du lemme 5.9. D'après le théorème 5.27, le morphisme noethérien $\mathrm{hull}_\nabla(\mathrm{gr}A)^{(r)} \to \mathrm{gr}A$ induit un morphisme noethérien

$$\mathbf{S}_r \otimes \mathrm{hull}_\nabla(\mathrm{gr}A)^{(r)} \to H^*(G_r, \mathrm{gr}A)\,,$$

donc un morphisme noethérien

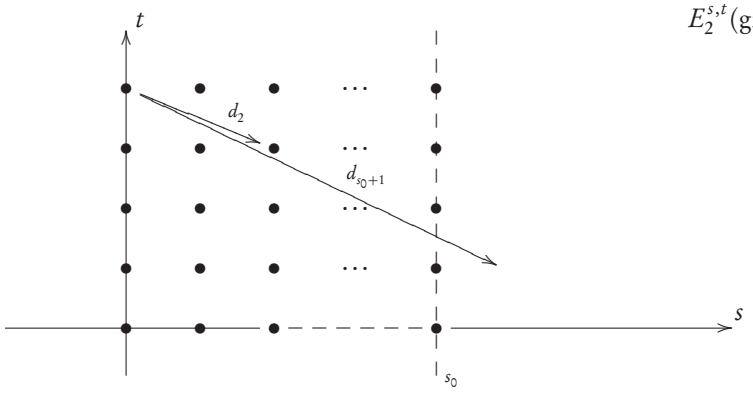
$$\mathbf{S}_r^{(-r)} \otimes \mathrm{hull}_\nabla(\mathrm{gr}A) \to H^*(G_r, \mathrm{gr}A)^{(-r)}\,,$$

D'après la proposition 2.27, l'algèbre $\mathbf{S}_r^{(-r)} = \bigotimes_{1 \leqslant i \leqslant r} \Bbbk[\mathfrak{gl}_n\langle 2p^{i-1}\rangle]$ a une bonne filtration, son produit tensoriel avec $\mathrm{hull}_\nabla(\mathrm{gr}A)$ possède donc une bonne filtration. Le théorème 5.28 assure alors que le morphisme d'algèbres

$$H^0\left(G, \mathbf{S}_r^{(-r)} \otimes \mathrm{hull}_\nabla(\mathrm{gr}A)\right) \to E_2^{0,*}(\mathrm{gr}A) \subset E_2^{*,*}(\mathrm{gr}A)$$

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

est noethérien, de source une algèbre de type fini. D'après les propriétés générales des morphismes noethériens, ceci implique $E_2^{*,*}(\mathrm{gr}\,A)$ est une algèbre de type fini. La condition (C1) du lemme 5.9 est donc satisfaite. Le théorème 5.28 assure également que la suite spectrale n'a qu'un nombre fini de colonnes non nulles. On peut représenter la suite spectrale de la façon suivante (les • symbolisent les termes potentiellement non nuls)



Il existe donc un entier s_0 tel que les différentielles d_s pour $s > s_0$ sont toutes nulles, et la condition (C2) est satisfaite. Le lemme 5.9 s'applique et le théorème 5.26 est donc démontré.

5 Retrait du gradué de Grosshans (étape 3)

Dans cette section, $\mathbb{k}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et on note $G = \mathrm{GL}_n$.

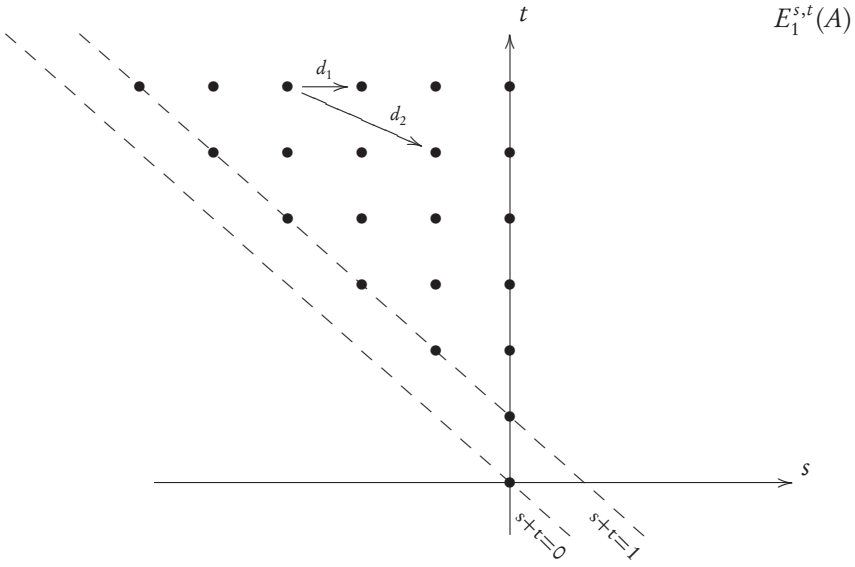
5.1 La suite spectrale de la filtration de Grosshans

Pour toute algèbre filtrée A, munie d'une action de G par automorphismes d'algèbres, on dispose d'une suite spectrale d'algèbres, naturelle vis-à-vis de l'algèbre filtrée A :

$$E_1^{s,t}(A) = H^{s+t}\left(G, \mathrm{gr}_{-s} A\right) \Rightarrow H^{s+t}(G, A)\,. \qquad (*)$$

Pour démontrer le théorème 5.7, on utilise cette suite spectrale pour une algèbre A munie de sa filtration de Grosshans. La première page de la suite spectrale est représentée dans le schéma suivant (les • représentent les termes $E_1^{s,t}(A)$ potentiellement non nuls, les termes $E_1^{s,t}(A)$ obligatoirement nuls ne sont pas représentés).

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022



Remarque 5.29. Les annulations sur la diagonale $s+t=0$ proviennent du fait suivant. Si A_0 est la composante homogène de degré nul de A, l'inclusion $A_0 \subset A$ induit un isomorphisme $H^0(G, \mathrm{gr}_{-s} A_0) \simeq H^0(G, \mathrm{gr}_{-s} A)$ (voir la remarque 3.17). D'après l'exemple 5.22, on a donc $H^0(G, \mathrm{gr}_0 A) = A^G$, et $H^0(G, \mathrm{gr}_i A) = 0$ pour $i \neq 0$.

La démonstration du théorème 5.7 consiste à vérifier que le lemme 5.9 s'applique. D'après l'étape deux de la démonstration (plus précisément le théorème 5.26), la première page de la suite spectrale est une algèbre de type fini. La condition (C1) du lemme 5.9 est donc satisfaite. On vérifie aisément que la condition technique (C3) du lemme 5.9 est également satisfaite [(2)]. La difficulté est de montrer la condition (C2), c'est-à-dire que la suite spectrale s'arrête à une certaine page. Contrairement à ce qui s'est passé avec la suite spectrale de Serre dans la section 4.3, la forme de la page initiale de la suite spectrale n'assure pas son arrêt. Pour montrer l'arrêt, nous utilisons une méthode classique due à Evens [8].

Lemme 5.30. [8] Soit R une $\Bbbk$-algèbre commutative telle que la suite spectrale $(*)$ soit une suite spectrale de R-modules. Supposons de plus que $E_1^{*,*}(A)$ est un module noethérien sur R. Alors il existe un entier i_0 tel que $E_{i_0}^{*,*}(A) = E_\infty^{*,*}(A)$.

Démonstration. On construit deux suites emboîtées de R-sous-modules de $E_1^{*,*}(A)$ (l'une croissante l'autre décroissante)

$$B_1^{*,*} \subset B_2^{*,*} \subset B_3^{*,*} \subset \cdots \subset \cdots \subset Z_3^{*,*} \subset Z_2^{*,*} \subset Z_1^{*,*}$$

de la façon suivante. On pose $Z_1^{*,*} = \mathrm{Ker}\, d_1$ le R-module des cycles de la page initiale et $B_1^{*,*} = \mathrm{Im}\, d_1$ le R-module des bords. Puis on définit $Z_2^{*,*}$, resp. $B_2^{*,*}$, comme l'image inverse

(2) En effet, la filtration de Grosshans de A étant exhaustive et bornée inférieurement, elle induit une filtration de même nature sur l'aboutissant. De plus, pour $s+t=i$ fixé, seul un nombre fini de termes $E_1^{s,t}(A)$ sont non nuls car la page initiale est une algèbre de type fini, nulle en bidegrés $(s,-s)$ pour $s \neq 0$. Ainsi, pour i fixé, seul un nombre fini de $\mathrm{gr}_j H^i(G,A)$ sont non nuls, et la filtration de $H^i(G,A)$ est donc finie.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

par la projection canonique $\pi_2 : Z_1^{*,*} \twoheadrightarrow E_2^{*,*}(A)$ des cycles, resp. des bords de la page 2. Puis on définit $Z_3^{*,*}$, resp. $B_3^{*,*}$ comme l'image inverse des cycles, resp. des bords, de la page 3 par la projection canonique $\pi_3 : Z_1^{*,*} \twoheadrightarrow E_3^{*,*}$ et ainsi de suite. Comme $E_1^{*,*}(A)$ est noethérien sur R, la suite des sous-modules stationne : a partir d'un certain rang i_0, on a $B_i^{*,*} = B_{i+1}^{*,*}$. Ceci implique que la différentielle d_i est nulle pour $i \geqslant i_0$, donc que $E_\infty^{*,*}$ est donné par $E_{i_0}^{*,*}$. □

Dans le cas de la suite spectrale d'une algèbre filtrée, on dispose d'un candidat naturel pour l'algèbre R du lemme 5.30. Soit $\mathscr{A}$ la sous-algèbre de $A[t]$ définie par

$$\mathscr{A} := \sum_{0 \leqslant k} t^k A_{\leqslant k} .$$

L'evaluation en $t = 1$ définit un morphisme d'algèbres

$$\mathrm{ev} : \mathscr{A} \to A .$$

Si on munit $\mathscr{A}$ de la filtration par le degré (c'est-à-dire $F_i\mathscr{A} = \sum_{k \leqslant i} t^k A_{\leqslant k}$), alors ev est un morphisme d'algèbres filtrées, donc il induit un morphisme de suites spectrales d'algèbres

$$E^{*,*}(\mathrm{ev}) : E^{*,*}(\mathscr{A}) \to E^{*,*}(A) .$$

La filtration par le degré de $\mathscr{A}$ est triviale donc la suite spectrale à la source est triviale : toutes les différentielles sont nulles et toutes ses pages sont isomorphes à son aboutissant $H^*(G, \mathscr{A})$. On obtient donc une algèbre qui agit sur la suite spectrale comme demandé dans le lemme 5.30 en posant $R = H^*(G, \mathscr{A})$. Pour démontrer la condition (C2) et achever la démonstration du théorème 5.7, il suffit donc de résoudre le problème suivant.

Problème 5.31.

Montrer que le morphisme d'algèbres[(a)] $\mathscr{A} \simeq \mathrm{Gr}\,\mathscr{A} \to \mathrm{gr}\,A$ induit un morphisme noethérien $H^*(G, \mathscr{A}) \to H^*(G, \mathrm{gr}\,A)$.

(a) La notation « Gr » fait référence au gradué associé à la filtration par le degré, par opposition à « gr » qui fait référence à la filtration de Grosshans.

5.2 Stratégie de résolution du problème 5.31

Nous expliquons maintenant l'approche de W. Van der Kallen pour résoudre le problème 5.31. Toutes les informations dont on dispose sur $H^*(G, \mathrm{gr}\,A)$ proviennent de la suite spectrale de Hochschild-Serre, on retourne donc à l'analyse de cette suite spectrale. On en extrait le lemme suivant.

Lemme 5.32. Le morphisme $H^*(G, \mathscr{A}) \to H^*(G, \mathrm{gr}\,A)$ est noethérien si et seulement si la composée E suivante (où le premier morphisme d'algèbres est induit par restriction de G à G_r, et le deuxième par le morphisme d'algèbres $\mathscr{A} \to \mathrm{gr}\,A$) est un morphisme noethérien :

$$E : H^*(G, \mathscr{A}) \to H^0(G, H^*(G_r, \mathscr{A})) \to H^0(G, H^*(G_r, \mathrm{gr}\,A)) .$$

Nous utilisons la notation « E » pour l'application du lemme 5.32 car c'est essentiellement un morphisme de bord (« Edge map » en Anglais) de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Remarquons que le morphisme E se décrit simplement sans recours à la suite spectrale. Le lemme 5.32 permet donc d'évacuer complètement la suite spectrale de Hochschild-Serre dans la résolution du problème 5.31.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Démonstration (du lemme 5.32). Commençons par une observation élémentaire qui relie E à la suite spectrale de Hochschild Serre. Pour toute représentation V de G, G_r agit trivialement sur $H^*(G_r,V)$, on a donc

$$H^0(G,H^*(G_r,V))=H^0(G/G_r,H^*(G_r,V))={}^{\mathrm{HS}}E_2^{0*}(V)\,.$$

Le morphisme $\mathscr{A}\to \mathrm{gr}A$ induit un morphisme de suites spectrales : ${}^{\mathrm{HS}}E^{*,*}(\mathscr{A})\to {}^{\mathrm{HS}}E^{*,*}(A)$. On a un diagramme commutatif (les morphismes horizontaux sont les morphismes canoniques de la suite spectrale)

$$\begin{array}{ccccc} H^*(G,\mathscr{A}) & \twoheadrightarrow & {}^{\mathrm{HS}}E_\infty^{0,*}(\mathscr{A}) & \hookrightarrow & {}^{\mathrm{HS}}E_\infty^{**}(\mathscr{A}) \\ \downarrow{\scriptstyle (1)} & & \downarrow{\scriptstyle (2)} & & \downarrow{\scriptstyle (3)} \\ H^*(G,\mathrm{gr}A) & \twoheadrightarrow & {}^{\mathrm{HS}}E_\infty^{0,*}(\mathrm{gr}A) & \overset{(*)}{\hookrightarrow} & {}^{\mathrm{HS}}E_\infty^{**}(\mathrm{gr}A) \end{array}\quad .$$

L'analyse de la suite spectrale de la section 4.3 montre que $(*)$ est noethérien. On en déduit que (1) est noethérien si et seulement si (2) est noethérien si et seulement si (3) est noethérien.
De plus, soit N la page à laquelle la suite spectrale ${}^{\mathrm{HS}}E^{**}(A)$ s'arrête. On a ${}^{\mathrm{HS}}E_\infty^{**}(\mathrm{gr}A)={}^{\mathrm{HS}}E_N^{**}(\mathrm{gr}A)$ et comme les puissances p-ièmes des éléments de la page s sont des cycles de la page s (en vertu de l'identité $d_s(x^p)=pd_s(x)=0$), le morphisme noethérien d'élévation à la puissance p^N

$$P^N : {}^{\mathrm{HS}}E_2^{0*}(\mathrm{gr}A)^{(N)}\to {}^{\mathrm{HS}}E_2^{0*}(\mathrm{gr}A)$$

factorise comme la composée de deux morphismes noethériens, le deuxième étant l'inclusion canonique de la suite spectrale :

$${}^{\mathrm{HS}}E_2^{0*}(\mathrm{gr}A)^{(N)}\to {}^{\mathrm{HS}}E_\infty^{0*}(\mathrm{gr}A)\hookrightarrow {}^{\mathrm{HS}}E_2^{0*}(\mathrm{gr}A)\,.$$

On déduit donc du diagramme commutatif suivant que le morphisme (2) (ou de manière équivalente le morphisme $H^*(G,\mathscr{A})\to H^*(G,A)$) est noethérien si et seulement si la composée du lemme (qui est la ligne supérieure de ce diagramme) est un morphisme noethérien.

$$\begin{array}{ccccc} H^*(G,\mathscr{A}) & \longrightarrow & {}^{\mathrm{HS}}E_2^{0,*}(\mathscr{A}) & \longrightarrow & {}^{\mathrm{HS}}E_2^{0,*}(\mathrm{gr}A) \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow \\ & & {}^{\mathrm{HS}}E_\infty^{0,*}(\mathscr{A}) & \xrightarrow{(2)} & {}^{\mathrm{HS}}E_\infty^{0,*}(\mathrm{gr}A) \end{array}\quad .$$

□

On ne dispose d'aucune information directe sur le morphisme E du lemme 5.32. La technique pour montrer que E est un morphisme noethérien est la suivante. Grâce au théorème de Friedlander et Suslin 5.27 et à la théorie des invariants (lemme 5.12), on dispose d'un morphisme noethérien Φ_{FS} de même but que E. La stratégie de van der Kallen consiste à construire un morphisme Φ_{VdK} tel que $\Phi_{FS}=E\circ\Phi_{VdK}$.

$$\begin{array}{ccc} H^*(G,\mathscr{A}) & \xrightarrow{E} & H^0(G,H^*(G_r,\mathrm{gr}A)) \\ & \overset{\Phi_{VdK}}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle \Phi_{FS}} \\ & & H^0\left(G,\mathbf{S}_r\otimes\mathscr{A}^{(r)}\right) \end{array}\quad .$$

Comme $E\circ\Phi_{VdK}$ est noethérien, il en sera de même de E et ceci résoudra positivement le problème 5.31 et achèvera la démonstration du théorème 5.7.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

5.3 Construction de Φ_{VdK} et classes universelles

L'idée pour construire le morphisme Φ_{VdK} est approximativement [3] la suivante. Tout d'abord, revenons à la description du morphisme Φ_{FS}. De façon précise, Φ_{FS} est le morphisme induit au niveau des G-invariants par le morphisme noethérien

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S}_r \otimes \mathscr{A}^{(r)} = \mathbf{S}_r \otimes H^0(G_r, \mathscr{A}^{(r)}) & \to & H^*(G_r, \mathrm{gr}A) \\ x \otimes y & \mapsto & \phi_{FS}(x) \cup f(y) \end{array} ,$$

où f est l'application induite au niveau des G_r-invariants par la composée de l'élévation à la puissance $r : P^r : \mathscr{A}^{(r)} \to \mathscr{A}$ et du morphisme surjectif $\mathscr{A} \to \mathrm{gr}A$. La classe $\phi_{FS}(x)$ apparaissant dans l'expression ci-dessus est un produit de certaines classes universelles $H^*(G_r, \Bbbk)$. (La construction de ces classes cohomologiques universelles est un des apports principaux de l'article de Friedlander et Suslin [13]).

Pour définir le morphisme Φ_{VdK} on souhaite faire une construction similaire, mais au niveau de la cohomologie de G plutôt que de la cohomologie de G_r. Le morphisme Φ_{VdK} est donc obtenu en faisant le cup produit des éléments de $H^0\left(G, \mathbf{S}_r \otimes \mathscr{A}^{(r)}\right)$ par certaines classes cohomologiques universelles dans la cohomologie de G. Pour que le diagramme commute, il faut que ces nouvelles classes cohomologiques universelles généralisent les classes de Friedlander et Suslin. La construction de ces nouvelles classes cohomologiques universelles est l'apport principal des articles [31, 35].

Pour décrire de manière précise les nouvelles classes cohomologiques utilisées pour la construction de Φ_{VdK}, nous introduisons une notation. Si V est une représentation de G, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit sur la d-ième puissance tensorielle $V^{\otimes d}$ par permutation des facteurs, et on note $\Gamma^d(V)$ les invariants sous cette action. C'est une représentation de G (déjà rencontrée sous forme fonctorielle à l'exemple 3.4). Le produit tensoriel $\Gamma^d(V) \otimes \Gamma^e(V)$ s'identifie naturellement aux invariants de $V^{\otimes d+e}$ sous l'action de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$ de sorte que l'on a une inclusion canonique $\Delta_{d,e} : \Gamma^{d+e}(V) \hookrightarrow \Gamma^d(V) \otimes \Gamma^e(V)$. Cette inclusion induit un morphisme

$$(\Delta_{d,e})_* : H^*(G, \Gamma^{d+e}(V)) \to H^*(G, \Gamma^d(V) \otimes \Gamma^e(V)) .$$

Théorème 5.33 ([31, 35]).

Notons $G = \mathrm{GL}_n$, pour $n > 1$. Pour tout $d \geqslant 1$, il existe des classes cohomologiques

$$c[d] \in H^{2d}\left(G, \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)})\right)$$

telles que $c[1] \neq 0$ et pour tout couple (d, e) d'entiers strictement positifs :

$$(\Delta_{d,e})_*\big(c[d+e]\big) = c[d] \cup c[e] .$$

La démonstration du théorème 5.33 est donnée au chapitre 6. Nous terminons cette section par quelques commentaires sur son énoncé. Tout d'abord, il existe une classe cohomologique bien connue (et non nulle) dans $H^2(G, \mathfrak{gl}_n^{(1)})$. C'est la « classe du vecteur de Witt », qui représente l'extension non triviale de groupes algébriques :

$$0 \to M_n(\Bbbk) \to G(W_2(\Bbbk)) \to G(\Bbbk) \to 1$$

(3) Nous épargnons au lecteur les expressions explicites précises des morphismes Φ_{VdK} et Φ_{FS}. On peut assouvir sa curiosité dans [37, Section 4].

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

où $W_2(\Bbbk)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de $\Bbbk$ de longueur 2. De plus, on peut montrer facilement que cette classe engendre $H^2(G, \mathfrak{gl}_n^{(1)})$. La classe $c[1]$ ne fait donc aucun mystère. La propriété satisfaite par les classes $c[d]$, fait penser à ces classes comme des « puissances divisées » de $c[1]$. Mais on ne sait pas mettre de structure de puissances divisées sur l'anneau de cohomologie $H^*(G, \Gamma^*(\mathfrak{gl}_n^{(1)}))$, et il n'est pas du tout évident à priori que les classes $c[d]$ existent pour $d \geqslant 2$.

Mentionnons également qu'à partir des classes universelles du théorème 5.33, on peut créer des familles supplémentaires de classes $c_i[d]$. Ce sont ces classes $c_i[d]$ qui sont utilisées dans la définition du morphisme Φ_{VdK}. Plus précisément, il existe un morphisme G-équivariant (le morphisme de Verschiebung de l'algèbre à puissances divisées) :

$$\pi : \Gamma^{d\,p^{i-1}}(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) \to \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(i)}),$$

et on définit $c_i[d] = \pi_* c[d\,p^{i-1}]$. On peut montrer que la classe

$$c_i[1] \in H^{2p^{i-1}}(G, \mathfrak{gl}_n^{(i)})$$

est non nulle. Mais pour $n \geqslant p^i$, on sait (par les calculs de foncteurs strictement polynomiaux effectués par Friedlander et Suslin) que $H^{2p^{i-1}}(G, \mathfrak{gl}_n^{(i)})$ est un espace vectoriel de dimension 1, engendré par la classe universelle e_i de Friedlander et Suslin. Les classes de Friedlander et Suslin apparaissent donc (à un scalaire près) comme un sous-ensemble des classes $c_i[d]$, $i, d \geqslant 1$. C'est en ce sens que les classes universelles produites dans [31, 35] généralisent celles de Friedlander et Suslin, et c'est ce phénomène qui assure que l'on a la factorisation $E \circ \Phi_{VdK} = \Phi_{FS}$. Nous renvoyons le lecteur à [37, Section 4] pour des détails complets.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Chapitre 6

Construction des classes universelles

Dans ce chapitre, $\Bbbk$ est un corps de caractéristique $p > 0$. Nous expliquons la démonstration du théorème 5.33, utilisé dans la démonstration de la conjecture de van der Kallen.

Friedlander et Suslin ont construit [13] leurs classes universelles *via* la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux. Plus précisément, les classes de Friedlander et Suslin proviennent du calcul des extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, I^{(r)})$. Les classes universelles du théorème 5.33 sont également produites avec la technologie fonctorielle. Un des ingrédients essentiels pour les calculer est une réponse (partielle) au problème fondamental suivant.

Problème 6.1.
A partir d'une résolution injective J_F d'un foncteur strictement polynomial F, comment construire une résolution injective du foncteur composé $F \circ I^{(r)}$?

Hormis son utilisation pour construire les classes universelles du théorème 5.33, une solution au problème 6.1 est intéressante pour effectuer des calculs d'Ext faisant apparaître des foncteurs composés $F \circ I^{(r)}$. En effet, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 3, les injectifs de $\mathscr{P}_\Bbbk$ sont des produits tensoriels de puissances symétriques, c'est-à-dire des objets combinatoirement élémentaires, de sorte que la connaissance d'une résolution injective explicite donne un bon espoir de faire des calculs d'Ext explicites.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 1, nous rappelons les résultats de Troesch [36] qui apportent une réponse positive au problème 6.1 pour les puissances tensorielles de puissances symétriques. Dans la section 2 nous expliquons une approche générale déraisonnablement naïve du problème 6.1, que nous réussissons à concrétiser partiellement. Nous en déduisons la construction des classes universelles du théorème 5.33 dans la section 3.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

1 Les complexes de Troesch

On dispose de résolutions injectives explicites des foncteurs de torsion de Frobenius $I^{(r)}$, et plus généralement pour les foncteurs composés $S^n \circ I^{(r)}$. Ces résolutions injectives ont déjà été mentionnées à la section 4.2, elle sont dues à Franjou Lannes et Schwartz [9] et Friedlander et Suslin [13] en caractéristique $p = 2$ et à A. Troesch [36] en caractéristique p quelconque. Nous rappelons ici uniquement le cas $r = 1$, qui sera le cas utile pour la construction des classes universelles.

La construction de départ est simple. Soit V un espace vectoriel, et $V[i]$ une copie de cet espace vectoriel, placée en degré i. Notons $T(V)$ l'algèbre commutative et graduée obtenue en tensorisant des copies d'algèbres symétriques sur les $V[i]$:

$$T(V) := S(V[0]) \otimes S(V[1]) \otimes \cdots \otimes S(V[p-1]) .$$

Les dérivations de $T(V)$, c'est-à-dire les applications linéaires $\delta : T(V) \to T(V)$ satisfaisant la règle de Leibniz $\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b)$ (*sans* signe de Koszul dans la formule) sont uniquement déterminées par leur valeur sur l'espace vectoriel $V[0] \oplus \cdots \oplus V[p-1] \subset T(V)$. On note ∂ la dérivation de $T(V)$ telle que $\partial(V[p-1]) = 0$ et telle que si $i < p-1$, alors ∂ envoie un élément $v \in V[i]$ sur le même v, vu comme un élément de $V[i+1]$. Par construction $(T(V), \partial)$ est une algèbre différentielle graduée dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux : c'est une somme directe de foncteurs strictement polynomiaux homogènes de la variable V, la multiplication et la dérivation sont des morphismes de foncteurs strictement polynomiaux.

- Si $p = 2$, alors (T, ∂) est l'algèbre différentielle graduée déjà rencontrée dans la proposition 3.44. Son homologie est donc égale à l'algèbre $S \circ I^{(1)}$ en degré nul, et est nulle en degrés strictement positifs.
- Si p est impair, alors la dérivation ∂ n'est pas de carré nul, mais vérifie plutôt $\partial^p = 0$. Ainsi (T, ∂) est une *algèbre p-différentielle graduée*.

Pour pouvoir parler des propriétés de (T, ∂), nous avons besoin rappeler quelques définitions relatives au p-complexes.

Définition 6.2.

Un *p-complexe* est un couple (C, ∂) où $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C^i$ et $\partial : C \to C$ est un morphisme augmentant le degré de 1, tel que $\partial^p = 0$. Pour $0 < i < p$, l'homologie $H^k_{[i]}(C)$ est définie par :

$$H^k_{[i]}(C) = \mathrm{Ker}\left(\partial^i : C^k \to C^{k+i}\right) \Big/ \mathrm{Im}\left(\partial^{p-i} : C^{k-p+i} \to C^k\right) .$$

On dit que (C, ∂) est une *p-résolution de X* si pour tout $0 < i < p$ on a $H^0_{[i]}(C) = X$ et $H^k_{[i]}(C) = 0$ pour $k > 0$.

On vérifie facilement que si (C, ∂) n'est pas seulement un p-complexe, mais une algèbre p-différentielle graduée, alors $H^0_{[1]}(C)$ est une algèbre. En particulier, on peut dire qu'une algèbre p-différentielle graduée est une p-résolution d'une algèbre.

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

Théorème 6.3 (Troesch [36]).

L'algèbre p-différentielle graduée (T,∂) est une p-résolution de l'algèbre $S\circ I^{(1)}$.

Notons qu'il y a deux degrés différents sur (T,∂) : le degré polynomial au sens de la définition 3.2 et le degré homologique. Ces deux degrés ont des rôles très différents : les différentielles augmentent le degré homologique de 1, mais comme les différentielles sont des morphismes de foncteurs strictement polynomiaux, elles préservent le degré polynomial. En particulier, le p-complexe (T,∂) peut s'écrire comme la somme directe de p-complexes (T_d,∂) qui sont des p-complexes dans $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$. Le théorème 6.3 signifie concrètement que pour $d=pk$, (T_d,∂) est une p-résolution du foncteur $S^k\circ I^{(1)}$ et que si d n'est pas un multiple de p alors (T_d,∂) est une p-résolution de 0.

Exemple 6.4. On prend $p=3$. Si $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ on note S^μ le produit tensoriel $S^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes S^{\mu_n}$. Le 3-complexe (T_2,∂) est de la forme suivante (nous ne décrivons pas les différentielles) :

$$\underbrace{S^2}_{\deg 0}\to S^{(1,1)}\to S^2\oplus S^{(1,1)}\to S^{(1,1)}\to\underbrace{S^2}_{\deg 4}.$$

D'après le théorème 6.3, tous les groupes d'homologie de (T_2,∂) sont nuls. Le 3-complexe (T_3,∂) est de la forme suivante :

$$\underbrace{S^3}_{\deg 0}\to S^{(2,1)}\to\begin{matrix}S^{(2,1)}\\\oplus S^{(1,2)}\end{matrix}\to\underbrace{\begin{matrix}S^{(1,1,1)}\\\oplus S^3\end{matrix}}_{\deg 3}\to\begin{matrix}S^{(2,1)}\\\oplus S^{(1,2)}\end{matrix}\to S^{(1,2)}\to\underbrace{S^3}_{\deg 6}.$$

D'après le théorème 6.3, (T_3,∂) est une 3-résolution de $S^1\circ I^{(1)}=I^{(1)}$.

Si (C,∂_C) et (D,∂_D) sont deux p-complexes, leur *produit tensoriel* est $(C\otimes D,\partial)$, où $C\otimes D$ est muni de la graduation usuelle (c'est-à-dire $C^i\otimes D^j$ est placé en degré $i+j$) et ∂ est définie par la formule (*sans* signe de Koszul) :

$$\partial(x\otimes y)=\partial_C(x)\otimes y+x\otimes\partial_D(y).$$

Si (C,∂_C) est une p-résolution de X et (D,∂_D) est une p-résolution de Y, on peut vérifier que leur produit tensoriel est une p-résolution de $X\otimes Y$. En particulier le théorème 6.3 a le corollaire suivant. Rappelons que si $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ est un n-uplet d'entiers, on note $S^\mu=S^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes S^{\mu_n}$.

Corollaire 6.5. Pour tout n-uplet d'entiers $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$, le produit tensoriel $\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n}T_{p\mu_i}$, muni de la différentielle produit au sens des p-complexes, est une p-résolution de $S^\mu\circ I^{(1)}$.

On peut passer facilement des p-résolutions à des résolutions au sens ordinaire en « contractant » les p-complexes. Par exemple, si C est une p-résolution de X, alors le complexe « contracté » $C_{[1]}$ défini ci-dessous est une résolution de X au sens ordinaire.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Définition 6.6.

Si (C,∂) est un p-complexe, on note $C_{[1]}$ le complexe tel que $C_{[1]}^{2k} = C^{pk}$ et $C_{[1]}^{2k+1} = C^{pk+1}$, et dont les différentielles sont alternativement ∂ et ∂^{p-1} :

$$\underbrace{C^0}_{\deg 0} \xrightarrow{\partial} \underbrace{C^1}_{\deg 1} \xrightarrow{\partial^{p-1}} \underbrace{C^p}_{\deg 2} \xrightarrow{\partial} \underbrace{C^{p+1}}_{\deg 3} \xrightarrow{\partial^{p-1}} \cdots .$$

En appliquant ce principe au p-résolutions du corollaire 6.5, on obtient des résolutions injectives des puissances symétriques, qui seront la « brique de base » pour les constructions des sections suivantes.

Notation 6.7. Pour tout n-uplet d'entiers $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, on note $\mathbb{T}(S^\mu)$ la résolution injective de $S^\mu \circ I^{(1)}$ donné par la formule :

$$\mathbb{T}(S^\mu) = \left(\bigotimes_{1 \leqslant i \leqslant n} T_{p\mu_i} \right)_{[1]} .$$

2 Résolutions injectives des foncteurs composés

2.1 Une approche naïve du problème 6.1

Soit F un foncteur strictement polynomial. D'après la proposition 3.36, F admet une résolution injective (J_F, ∂) dont les objets J_F^k sont isomorphes à des sommes directes finies de produits tensoriels de puissances symétriques S^μ. En prenant pour $\mathbb{T}(J_F^k)$ la somme directe des résolutions injectives $\mathbb{T}(S^\mu)$ fournies par le corollaire 6.5 on obtient donc une résolution injective de $J_F^k \circ I^{(1)}$. Le lemme suivant est une application d'un lemme classique sur les doubles complexes.

Lemme 6.8. Supposons que pour tout $k \geqslant 0$ il existe des morphismes de complexes $\overline{\partial} : \mathbb{T}(J_F^k) \to \mathbb{T}(J_F^{k+1})$, tels que

(1) $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$,

(2) on a des carrés commutatifs $\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(J_F^k)^0 & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \mathbb{T}(J_F^{k+1})^0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ J_F^k \circ I^{(1)} & \xrightarrow{\partial \circ I^{(1)}} & J_F^{k+1} \circ I^{(1)} \end{array}$.

Notons d la différentielle des complexes $\mathbb{T}(J_F^k)$. Alors le complexe total associé au bicomplexe $(\mathbb{T}(J_F^k)^\ell, \overline{\partial}, d)$ est une résolution injective de $F \circ I^{(1)}$.

Le lemme fondamental de l'algèbre homologique assure que des morphismes de complexes $\overline{\partial} : \mathbb{T}(J_F^k) \to \mathbb{T}(J_F^{k+1})$ vérifiant la deuxième condition du lemme 6.8 existent bien, et sont uniques *à homotopie près*. En particulier, si on choisit aléatoirement ces morphismes, alors les composées $\overline{\partial} \circ \overline{\partial}$ ne sont pas nécessairement nulles, mais seulement *homotopes* au morphisme nul. Le problème à résoudre est donc le suivant.

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

Problème 6.9.

Comment moyen de choisir tous les relèvements $\overline{\partial}$ des différentielles $\partial \circ I^{(1)}$ du complexe $J_F \circ I^{(1)}$ de manière cohérente, pour que la première condition du lemme 6.8 soit satisfaite ?

Tenter de résoudre le problème 6.9 pour construire des résolutions de $F \circ I^{(1)}$ semble a priori une approche naïve et sans espoir (l'*existence* d'une solution au problème 6.9 n'est pas du tout évidente, et a des conséquences fortes, comme l'effondrement de certaines suites spectrales calculant des Ext entre foncteurs précomposés par $I^{(1)}$). Nous allons cependant donner une solution à ce problème de choix des relèvements dans le cas où J_F est un complexe *compatible à la torsion de Frobenius* dans le sens de la définition 6.15 de la section suivante.

2.2 Résolutions compatibles à la torsion de Frobenius

Nous commençons par expliciter quelques morphismes particuliers entre produits tensoriels de puissances symétriques. Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ un uplet d'entiers strictement positifs. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\mu\sigma$ le n-uplet $(\mu_{\sigma(1)}, \dots, \mu_{\sigma(n)})$. La permutation σ induit un morphisme

$$\sigma : S^{\mu} \to S^{\mu\sigma}$$

qui échange les facteurs des produit tensoriel. Notons ν le uplet d'entiers obtenu à partir de μ en additionnant les termes μ_i et $\mu_{i,+1}$, c'est-à-dire $\nu = (\mu_1, \dots, \mu_i + \mu_{i+1}, \dots, \mu_n)$. La multiplication de l'algèbre symétrique $S^{\mu_i} \otimes S^{\mu_{i+1}} \to S^{\mu_i + \mu_{i+1}}$ induit un morphisme

$$\mathrm{Id} \otimes \mathrm{mult} \otimes \mathrm{Id} : S^{\mu} \to S^{\nu}.$$

Pour obtenir des morphismes entre produits tensoriels de puissances symétriques, on peut aussi composer de tels morphismes, ou plus généralement prendre des combinaisons linéaires de composées de tels morphismes, ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition 6.10.

Soient μ et ν deux n-uplets d'entiers strictement positif. Un morphisme $f : S^{\mu} \to S^{\nu}$ est *de type multiplicatif* s'il s'obtient comme combinaison linéaire de morphismes obtenus par composition de morphismes induits par des permutations et des multiplications.

Remarque 6.11. Si $f : S^{\mu} \to S^{\nu}$ est un morphisme non nul de type multiplicatif, alors le nombre de facteurs du produit tensoriel S^{μ} est supérieur ou égal à celui de S^{ν}. Il existe donc (beaucoup) de morphismes entre produits tensoriels de puissances symétriques qui ne sont pas de type multiplicatif. L'exemple le plus simple est le morphisme $S^2 \to S^1 \otimes S^1$ donné par

$$\begin{array}{ccc} S^2(V) & \to & S^1(V) \otimes S^1(V) \\ vw & \mapsto & v \otimes w + w \otimes v \end{array}.$$

On peut fabriquer une catégorie $\mathscr{M}_d$ des morphismes multiplicatifs. Plus précisément, les objets de $\mathscr{M}_d$ sont des couples (F, ϕ), où F est un foncteur strictement polynomial

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

homogène de degré d, et ϕ est une décomposition de F en une somme directe *finie* de produits tensoriels de puissances symétriques :

$$\phi : F \xrightarrow{\simeq} \bigoplus S^{\mu} .$$

Les morphismes de $\mathscr{M}_d$ de (F,ϕ) vers (G,ψ) sont les morphismes $f : F \to G$ dont toutes les composantes $f^{\mu,\nu} : S^{\mu} \to S^{\nu}$ relatives aux décompositions de F et G en sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques sont de type multiplicatif. On a un foncteur d'oubli (essentiellement surjectif, fidèle)

$$\mathscr{U} : \mathscr{M}_d \to \mathscr{P}_{d,\Bbbk}$$

qui envoie un couple (F,ϕ) sur F, et qui est l'identité sur les morphismes. Notons $\mathrm{Ch}(\mathscr{P}_{d,\Bbbk})$ la catégorie des complexes dans $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$. Le théorème suivant donne une manière fonctorielle (donc « cohérente » dans le sens du problème 6.9) de faire des choix de relèvements entre complexes de Troesch.

Théorème 6.12 (fonctorialité des complexes de Troesch [31, Prop 3.13]).

Il existe un foncteur additif

$$\mathbb{T} : \mathscr{M}_d \to \mathrm{Ch}(\mathscr{P}_{pd,\Bbbk})$$

tel que $\mathbb{T}(S^{\mu})$ est le complexe de Troesch de la notation 6.7, et tel que pour tout morphisme $f : (F,\phi) \to (G,\phi)$ de $\mathscr{M}_d$, le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(F)^0 & \xrightarrow{\mathbb{T}(f)^0} & \mathbb{T}(G)^0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ F \circ I^{(1)} & \xrightarrow{f \circ I^{(1)}} & G \circ I^{(1)} \end{array} .$$

La définition de $\mathbb{T}$ sur les objets est donnée dans l'énoncé du théorème 6.12, tout le problème est de définir l'effet de $\mathbb{T}$ sur les morphismes. La démonstration du théorème 6.12 repose sur deux observations. La première observation donne un choix canonique de $\mathbb{T}(f)^0$. L'inclusion canonique $S^n \circ I^{(1)} \hookrightarrow S^{np}$ admet une factorisation

$$S^n \circ I^{(1)} \hookrightarrow S^n \circ S^p \twoheadrightarrow S^{np}$$

dans lequel l'épimorphisme $\pi^n : S^n \circ S^p \twoheadrightarrow S^{np}$ est la composante homogène de degré np du morphisme d'algèbres

$$\pi : S(S^p(V)) \to S(V)$$

dont la restriction à $S^p(V)$ est l'inclusion naturelle $S^p(V) \to S(V)$. Concrètement, les éléments de $S(S^p(V))$ sont des combinaisons linéaires de concaténations d'expressions de la forme « $(v_1 \dots v_p)$ ». Le morphisme π a pour effet de « retirer les parenthèses » dans une telle expression. Par exemple si $p = 2$, alors π envoie $(v_1v_2)(v_3v_4)(v_5v_6) \in S^3(S^2(V))$ sur $v_1 \dots v_6 \in S^6(V)$. En général, si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ est un uplet d'entiers strictement positif, on note $\pi^{\mu} : S^{\mu} \circ S^p \to S^{p\mu}$ le produit tensoriel des morphismes $\pi^{\mu_i} : S^{\mu_i} \circ S^p \to S^{p\mu_i}$.

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

Lemme 6.13. Pour tout morphisme $f : S^\mu \to S^\nu$ de type multiplicatif, il existe une unique application $\overline{f}$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} S^\nu \circ I^{(1)} & \hookrightarrow & S^\nu \circ S^p & \xrightarrow{\pi^\nu} & S^{p\nu} \\ {\scriptstyle f\circ I^{(1)}}\uparrow & & {\scriptstyle f\circ S^p}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \overline{f}} \\ S^\mu \circ I^{(1)} & \hookrightarrow & S^\mu \circ S^p & \xrightarrow{\pi^\mu} & S^{p\mu} \end{array} .$$

De plus, $\overline{f}$ est de type multiplicatif.

Démonstration. L'unicité de $\overline{f}$ est une conséquence du fait que π^μ est un épimorphisme (on n'a aucun besoin que f soit multiplicatif pour l'unicité). Pour montrer l'existence, il suffit de considérer le cas où f est une permutation ou une multiplication. Dans ce cas on prend pour $\overline{f}$ la permutation ou la multiplication correspondante entre $S^{p\mu}$ et $S^{p\nu}$. Dans le cas d'une permutation, la commutativité du diagramme est évidente, dans le cas d'une multiplication, elle provient du fait que π est un morphisme d'algèbres. □

La deuxième observation montre qu'une fois effectué le choix de $\mathbb{T}(f)^0$, on a un choix canonique pour les $\mathbb{T}^i(f)$, $i > 0$. On note pI le foncteur gradué qui envoie un espace vectoriel V sur l'espace vectoriel gradué $pI(V) = V[0] \oplus V[1] \oplus \cdots \oplus V[p-1]$. On a donc $\mathbb{T}(S^\mu) = (S^{p\mu} \circ pI)_{[1]}$ par définition du complexe $\mathbb{T}(S^\mu)$.

Lemme 6.14. Pour tout morphisme $\overline{f} : S^{p\mu} \to S^{p\nu}$ de type multiplicatif,

$$\overline{f} \circ pI : S^{p\mu} \circ pI \to S^{p\nu} \circ pI$$

est un morphisme de p-complexes, qui induit par contraction un morphisme de complexes

$$\left(\overline{f} \circ pI\right)_{[1]} : \mathbb{T}(S^\mu) \to \mathbb{T}(S^\nu)$$

tel que $\left(\overline{f} \circ pI\right)^0_{[1]} = \overline{f}$.

Démonstration. Le morphisme $\overline{f} \circ pI$ est clairement un morphisme gradué. Pour vérifier que c'est un morphisme de *p-complexes*, il suffit de vérifier le cas où $\overline{f}$ est une permutation ou une multiplication. Dans le premier cas c'est évident (car la différentielle sur $S^{p\mu} \circ pI$ est par définition le produit tensoriel des différentielles des $S^{p\mu_i} \circ pI$ définies par Troesch, et idem pour la différentielle de $S^{p\nu} \circ pI$), dans le second cas cela provient du fait que la différentielle définie par Troesch est un différentielle de p-algèbres différentielles. Le reste de l'énoncé est une conséquence formelle des propriétés de $f \circ pI$. □

Démonstration (du théorème 6.12). On choisit une construction fonctorielle de la somme directe dans $\mathrm{Ch}(\mathscr{P}_{pd,\Bbbk})$. Pour tout objet $\phi : F \simeq \bigoplus S^\mu$ de $\mathscr{M}_d$, on pose $\mathbb{T}(F) = \bigoplus \mathbb{T}(S^\mu)$. Pour tout morphisme $f : (F, \phi) \to (G, \psi)$, on note $\mathbb{T}(f)$ le morphisme dont les composantes sont données par :

$$\mathbb{T}(f)^{\mu,\nu} = \left(\overline{f^{\mu,\nu}} \circ pI\right)_{[1]} .$$

Ce sont des morphismes de complexes d'après le lemme 6.14, et l'unicité dans le lemme 6.13 assure que $\mathbb{T}$ est additif, et que $\mathbb{T}(g \circ f) = \mathbb{T}(g) \circ \mathbb{T}(f)$ et $\mathbb{T}(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$. □

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

Définition 6.15.

Une résolution injective J_F de F est *compatible à la torsion de Frobenius* s'il existe des décompositions $J_F^k \simeq \bigoplus S^\mu$, de sorte que les composantes $\partial^{\mu,\nu} : S^\mu \to S^\nu$ des différentielles $\partial : J_F^k \to J_F^{k+1}$ sont de type multiplicatif. De manière équivalente, il existe un complexe $\widetilde{J}_F$ dans $\mathscr{M}_d$ tel que $\mathscr{U}(\widetilde{J}_F) = J_F$.

L'énoncé suivant est un corollaire immédiat du théorème 6.12. Il justifie la terminologie de la définition 6.15, et constitue notre solution partielle au problème 6.1 de l'introduction du chapitre.

Corollaire 6.16. Si J_F est une résolution injective de F compatible à la torsion de Frobenius, alors $\mathbb{T}(\widetilde{J}_F)$ est un bicomplexe, et le complexe total associé est une résolution injective de $F \circ I^{(1)}$.

Nous finissons par une propriété sur les produits tensoriels qui nous sera utile dans la suite. Le produit tensoriel de foncteurs strictement polynomiaux est distributif par rapport à la somme directe. En particulier, si (F, ϕ) est un objet de $\mathscr{M}_d$ et (G, ψ) est un objet de $\mathscr{M}_e$, leur produit tensoriel $F \otimes G$ est muni d'une décomposition (où dist est l'isomorphisme de distributivité)

$$F \otimes G \xrightarrow[\simeq]{\phi\otimes\psi} \Big(\bigoplus_\mu S^\mu\Big) \otimes \Big(\bigoplus_\nu S^\nu\Big) \xrightarrow[\simeq]{\text{dist}} \bigoplus_{\mu,\nu} S^\mu \otimes S^\nu .$$

De plus, le produit tensoriel de deux morphismes de type multiplicatif est de type multiplicatif. On en déduit un foncteur de produit tensoriel $\otimes : \mathscr{M}_d \times \mathscr{M}_e \to \mathscr{M}_{d+e}$ qui relève le produit tensoriel de foncteurs. La proposition suivante est une conséquence directe du théorème de Künneth.

Proposition 6.17.

Si J_F (resp. J_G) est une résolution de F (resp. G) compatible à la torsion de Frobenius, alors $J_F \otimes J_G$ est une résolution de $F \otimes G$ compatible à la torsion de Frobenius.

2.3 L'exemple des puissances divisées

Comme nous l'avons observé à la remarque 6.11, les morphismes de type multiplicatif constituent une toute petite partie des morphismes entre puissances symétriques. Il est donc peu probable qu'un foncteur « pris au hasard » admette une résolution injective compatible à la torsion de Frobenius. Cependant, certains foncteurs d'intérêt ont des résolutions injectives compatibles à la torsion de Frobenius. Commençons par un exemple très simple.

Exemple 6.18. Le foncteur Γ^1 admet une résolution injective compatible à la torsion de Frobenius. De façon plus explicite, on a un complexe exact :

$$\Gamma^1 \xrightarrow{=} S^1 .$$

Le foncteur Γ^2 admet une résolution injective compatible à la torsion de Frobenius. De

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

façon plus explicite, on a un complexe exact :

$$0 \to \Gamma^2 \to S^1 \otimes S^1 \xrightarrow{1-\tau} S^1 \otimes S^1 \xrightarrow{\text{mult}} S^2 \to 0\,.$$

L'exemple 6.18 se généralise en tout degré. Rappelons que $\mathscr{U} : \mathscr{M}_d \to \mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ désigne le foncteur d'oubli qui à un couple (F, ϕ) (un foncteur muni d'une décomposition en somme directe finie de tenseurs symétriques) associe le foncteur F.

Proposition 6.19 ([31, Prop 3.21]).

Pour tout $d \geqslant 1$, il existe un complexe $\widetilde{J}_d$ dans $\mathscr{M}_d$ qui est une résolution injective de Γ^d, dont le début est :

$$J_d^0 = (S^1)^{\otimes d} \xrightarrow{\prod_{1\leqslant i<d}(1-\tau_i)} \bigoplus_{1\leqslant i<d} (S^1)^{\otimes d} = J_d^1 \to \cdots$$

où τ_i est la transposition qui échange le i-ième facteur et le $(i+1)$-ième facteur du produit tensoriel $(S^1)^{\otimes d}$. De plus, les inclusions $\Delta_{d,e} : \Gamma^{d+e} \to \Gamma^d \otimes \Gamma^e$ se relèvent en des morphismes de complexes :

$$\widetilde{\Delta}_{d,e} : \widetilde{J}_{d+e} \to \widetilde{J}_d \otimes \widetilde{J}_e$$

égaux à l'identité de $(S^1)^{\otimes d+e}$ en degré 0.

Démonstration. Nous donnons les grandes lignes de la construction des complexes $\widetilde{J}_d$, qui repose sur un outil technique mais standard d'algèbre homologique, les *complexes bar*. Si A est une algèbre différentielle graduée commutative augmentée (ADGCA), son complexe bar (normalisé, réduit) $\overline{B}A$ est l'algèbre de Hopf différentielle graduée commutative (HDGC), qui est égale à l'algèbre shuffle $T^{\text{sh}}(s\overline{A})$ sur la suspension $s\overline{A}$ de l'idéal d'augmentation $\overline{A}$ (c'est-à-dire l'espace vectoriel gradué $s\overline{A}^i = \overline{A}^{i+1}$) et dont la différentielle est définie comme combinaison linéaire de morphismes obtenus en tensorisant la différentielle de A ou la multiplication de A par des morphismes identité. Notons $\mathscr{M} = \prod_{d\geqslant 0} \mathscr{M}_d$ la catégorie des morphismes multiplicatifs. C'est un catégorie symétrique monoïdale, le produit monoïdal étant induit par les produits tensoriels $\otimes \mathscr{M}_d \times \mathscr{M}_e \to \mathscr{M}_{d+e}$. On voit à partir de la description de la construction bar que si A est une ADGCA dans $\mathscr{M}$, alors $\overline{B}A$ est une HDGC dans $\mathscr{M}$.

En particulier, on peut partir de l'ADGCA $S(V[-2])$ (l'algèbre symétrique sur une copie de V placée en degré cohomologique -2, munie de la différentielle nulle) et lui appliquer deux fois la construction bar. Alors $\overline{B}\overline{B}S(V[-2])$ est une HDGC dans $\mathscr{M}$. Le complexe $\overline{B}\overline{B}S(V[-2])$ se scinde comme une somme directe de complexes $\widetilde{J}_d$ dans $\mathscr{M}_d$:

$$\overline{B}\overline{B}S(V[-2]) = \bigoplus_{d\geqslant 0} \widetilde{J}_d\,.$$

Le complexe $\overline{B}\overline{B}S(V[-2])$ est un complexe combinatoire explicite, et on peut facilement montrer que les complexes $\widetilde{J}_d$ ont la forme donnée dans la proposition. Le calcul de l'homologie de $\overline{B}\overline{B}S(V[-2])$ est un résultat bien connu de la théorie classique de la dualité de Koszul des algèbres, elle est égale à $\Gamma(V[0])$, c'est-à-dire à l'algèbre à puissances divisées sur une copie de V placée en degré 0. De manière équivalente, chaque complexe $\widetilde{J}_d$ est une résolution de Γ^d. Enfin, les morphismes $\widetilde{\Delta}_{d,e}$ sont obtenus comme les composantes de la comultiplication de $\overline{B}\overline{B}S(V[-2])$. □

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

3 Construction des classes universelles

Dans cette section, nous expliquons la construction des « classes universelles » utilisées dans la démonstration de la conjecture de van der Kallen. Nous commençons par en rappeler l'énoncé (un énoncé nettement plus fort est donné dans [35, thm 3.1], mais l'énoncé suivant est suffisant pour la démonstration de la conjecture).

Théorème 6.20.

Soit $n > 1$. Pour tout $d \geqslant 1$, il existe des classes cohomologiques

$$c[d] \in H^{2d}\left(\mathrm{GL}_n, \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)})\right)$$

telles que $c[1] \neq 0$ et pour tout couple (d,e) d'entiers strictement positifs :

$$(\Delta_{d,e})_*\big(c[d+e]\big) = c[d] \cup c[e]\,.$$

Notre démonstration du théorème 6.20 est de nature combinatoire : on utilise des résolutions explicites des représentations $\Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)})$, et on y construit des cycles explicites z_d qui représentent les classes désirées. La propriété sur les cup produits est ensuite vérifiée au niveau des cycles.

3.1 Des résolutions explicites

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 2 (à la section 6), il est irréaliste de chercher à construire des résolutions *injectives* maniables des représentations rationnelles de GL_n, mais on peut utiliser des résolutions par des représentations ayant des bonnes filtrations. D'après le théorème 2.26 et la proposition 2.27 les représentations $S^\mu(\mathfrak{gl}_n) = S^{\mu_1}(\mathfrak{gl}_n) \otimes \cdots \otimes S^{\mu_k}(\mathfrak{gl}_n)$ ont des bonnes filtrations, ce qui nous donne le résultat suivant.

Lemme 6.21. Soit V une représentation de GL_n, et K_V une résolution de V par des somme directes de représentations de la forme $S^\mu(\mathfrak{gl}_n)$, pour des uplets d'entiers strictement positifs μ. Alors la cohomologie $H^*(\mathrm{GL}_n, V)$ peut se calculer comme l'homologie du complexe

$$K_V^{\mathrm{GL}_n} := (K_V^0)^{\mathrm{GL}_n} \to (K_V^1)^{\mathrm{GL}_n} \to (K_V^2)^{\mathrm{GL}_n} \to \dots\,.$$

En particulier, si F est un foncteur strictement polynomial, et si J est une représentation injective de F dans $\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$, alors le complexe $K = J(\mathfrak{gl}_n)$ obtenu par évaluation sur $\mathfrak{gl}_n$ est une résolution de la représentation $V = F(\mathfrak{gl}_n)$ comme dans le lemme 6.21.

Puisque la représentation $\Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)})$ s'obtient comme l'évaluation sur $\mathfrak{gl}_n$ du foncteur strictement polynomial $\Gamma^d \circ I^{(1)}$, le lemme 6.21 nous conduit à chercher des résolutions injectives (dans $\mathscr{P}_{pd,\Bbbk}$) les plus explicites possibles des foncteurs strictement polynomiaux $\Gamma^d \circ I^{(1)}$. C'est précisément ce que les résultats de la section 2 nous apportent. En combinant le corollaire 6.16 et la proposition 6.19 nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 6.22. Pour tout $d \geqslant 1$, il existe un bicomplexe K_d premier quadrant de représentations de GL_n avec les propriétés suivantes.

1. Les objets de K_d sont des sommes directes de représentations de la forme $S^\mu(\mathfrak{gl}_n)$, et le complexe $\mathrm{Tot}\, K_d$ est une résolution de $\Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)})$.
2. Le bicomplexe K_1 est concentré sur la colonne d'indice 0, et $K_1^{0,*}$ est isomorphe au

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

complexe $\mathbb{T}(S^1)(\mathfrak{gl}_n)$, c'est-à-dire à l'évaluation du complexe $\mathbb{T}(S^1)$ sur la représentation $\mathfrak{gl}_n$.

3. Pour $d \geqslant 2$, les colonnes d'indice 0 et 1 de K_d sont non nulles. Plus précisément, on a :

$$K_d^{*,*} = \begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \\ \uparrow\partial & & \uparrow\partial & & \\ K_1^{0,2} & \xrightarrow{d} & K_1^{1,2} & \xrightarrow{d} & \dots \\ \uparrow\partial & & \uparrow\partial & & \\ K_1^{0,1} & \xrightarrow{d} & K_1^{1,1} & \xrightarrow{d} & \dots \\ \uparrow\partial & & \uparrow\partial & & \\ K_1^{0,0} & \xrightarrow{d} & K_1^{1,0} & \xrightarrow{d} & \dots \end{array} = \mathbb{T}(\otimes^d) \xrightarrow{\prod_{1\leqslant i<d} 1-\mathbb{T}(\tau_i)} \bigoplus_{1\leqslant i<d} \mathbb{T}(\otimes^d) \to \dots$$

où $\mathbb{T}(\otimes^d)$ est la résolution de Troesch de $\otimes^d = S^{(1,\dots,1)}$ (cf. notation 6.7) et $\tau_i : \otimes^d \to \otimes^d$ est le morphisme qui échange le i-ième et le $(i+1)$-ième facteur de $\otimes^d$.

Le premier point du lemme 6.22 et le lemme 6.21 donnent un isomorphisme gradué :

$$H^*\left(\mathrm{GL}_n, \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)})\right) \simeq H^*\left((\mathrm{Tot}\, K_d)^{\mathrm{GL}_n}\right) = H^*\left(\mathrm{Tot}\left(K_d^{\mathrm{GL}_n}\right)\right).$$

et les deuxièmes et troisièmes points du lemme 6.22 montrent que le (début du) bicomplexe $K_d^{\mathrm{GL}_n}$ est très explicite.

3.2 La classe $c[1]$ et le cycle z_1

Comme nous l'avons déjà expliqué à la fin de la section 5 du chapitre 5, la classe $c[1]$ ne fait pas mystère : pour tout $n \geqslant 2$, l'espace vectoriel $H^2(\mathrm{GL}_n, \mathfrak{gl}_n^{(1)})$ est de dimension 1, engendré par la « classe du vecteur de Witt ». On prend donc $c[1]$ égale à cette classe du vecteur de Witt.

On choisit ensuite un cycle $z_1 \in (K_1^{2,0})^{\mathrm{GL}_n}$ représentant la classe $c[1]$.

3.3 Construction des classes $c[d]$ et des cycles z_d, $d \geqslant 2$

Nous commençons par expliquer le cas de la caractéristique $p = 2$. Notons $T := \mathbb{T}(S^1)(\mathfrak{gl}_n)$.

Remarque 6.23. Nous n'avons pas besoin de la description exacte du complexe T pour la construction des classes $c[d]$. Cependant, le complexe $\mathbb{T}(S^1)$ est très explicite, et pour $p = 2$ le complexe T a une description particulièrement simple que nous donnons pour

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

aider l'imagination du lecteur.

$$T = \begin{array}{c} T^2 \\ \partial\uparrow \\ T^1 \\ \partial\uparrow \\ T^0 \end{array} = \begin{array}{c} S^2(\mathfrak{gl}_n) \\ \partial\uparrow \\ \mathfrak{gl}_n^{\otimes 2} \\ \partial\uparrow \\ S^2(\mathfrak{gl}_n) \end{array} .$$

Lorsque $p = 2$, les p-complexes sont des complexes au sens ordinaire, et l'opération de contraction des p-complexes est triviale. En particulier, on a une égalité de complexes $\mathbb{T}(\otimes^d) = \mathbb{T}(S^1)^{\otimes d}$, et le morphisme $\mathbb{T}(\tau_i)$ n'est autre que le morphisme de complexes (encore noté τ_i) qui permute le i-ième et le $(i+1)$-ième facteur du produit tensoriel. On peut donc réécrire les deux premières colonnes du bicomplexe K_d sous la forme

$$K_d = K^{0,*} \xrightarrow{d} K^{1,*} \xrightarrow{d} \ldots = T^{\otimes d} \xrightarrow{\prod_{1\leqslant i<d}(1-\tau_i)} \bigoplus_{1\leqslant i<d} T^{\otimes d} \to \ldots$$

L'objet $K_d^{0,2d} = (T^{\otimes d})^{2d}$ contient [1] le produit tensoriel $(T^2)^{\otimes d}$. On pose :

$$z_d := z_1^{\otimes d} \in (T^{\otimes d})^{2d} \subset K^{0,2d} . \qquad (*)$$

Lemme 6.24. L'élément z_d est un cycle de degré $2d$ du complexe $\mathrm{Tot}\, K_d^{\mathrm{GL}_n}$.

Démonstration. L'élément $z_d \in K^{0,2d}$ est de degré total $2d$ par définition, et il est dans le sous-espace $(K^{0,2d})^{\mathrm{GL}_n}$ car z_1 est invariant sous l'action de GL_n. Il reste à vérifier que chacune des deux différentielles du bicomplexe s'annule sur z_d. La différentielle verticale ∂ s'annule sur z_d par définition du produit tensoriel de complexes, et la différentielle horizontale d s'annule sur z_d car z_d est invariant sous l'action du groupe symétrique qui permute les facteurs du produit tensoriel $T^{\otimes d}$. □

Lorsque p est impair, la contraction des p-complexes est une opération non triviale, qui ne commute pas avec les produits tensoriels. Cependant, la définition du complexe $\mathbb{T}(\otimes^d)$ montre que $K^{0,2d}$ contient toujours une copie du produit tensoriel $(T^2)^{\otimes d}$, de sorte que la formule $(*)$ fait toujours sens. Le lemme 6.24 reste valable pour p impair, avec juste une légère modification de l'argument montrant que la différentielle verticale ∂ s'annule sur z_d.

Que p soit pair ou impair, la classe du cycle z_d définit donc une classe :

$$c[d] := [z_d] \in H^{2d}\left(\mathrm{GL}_n, \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)})\right) .$$

3.4 Compatibilité des classes $c[d]$ au cup produit

Nous commençons par rappeler la description des cup produits donnée au chapitre 4 (à la section 2.2). Soient V_1, V_2 deux représentations de GL_n. Étant données deux classes $c_i \in H^{d_i}(\mathrm{GL}_n, V_i)$, pour $i \in \{1,2\}$, la classe

$$c_1 \cup c_2 \in H^{d_1+d_2}(\mathrm{GL}_n, V_1 \otimes V_2)$$

(1) En fait, on a même $K_d^{0,2d} = (T^2)^{\otimes d}$ comme on peut le voir en utilisant la description explicite de T donnée à la remarque 6.23.

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

est définie au niveau des cycles de la manière suivante. Notons J_1, J_2 et J_{1+2} des résolutions injectives des représentations V_1, V_2 et $V_1 \otimes V_2$ (ou plus généralement des résolutions par des objets ayant une bonne filtration), et soit $\phi : J_1 \otimes J_2 \to J_{1+2}$ un morphisme de complexes tel que $H^0(\phi) = \mathrm{Id}$. Si chaque classe c_i est représentée par un cycle $z_i \in (J_i^{d_i})^{\mathrm{GL}_n}$, alors la classe $c_1 \cup c_2$ est représentée par le cycle

$$\phi(z_1 \otimes z_2) \in (J_{1+2}^{d_1+d_2})^{\mathrm{GL}_n} . \qquad (\dagger)$$

On peut également décrire la fonctorialité de la cohomologie au niveau des cycles. Plus précisément donnons-nous une représentation W munie d'une résolution K_W. Soit $c_W \in H^{d_1+d_2}(\mathrm{GL}_n, W)$, représentée par un cycle $z_W \in (J_W^{d_1+d_2})^{\mathrm{GL}_n}$. Soit $D : W \to V_1 \otimes V_2$ un morphisme de représentations et soit $\overline{D} : K_W \to K_{1+2}$ un morphisme de complexes tel que $H_0(\overline{D}) = D$. Alors la classe $D_*(c_W)$ est représentée par le cycle

$$\overline{D}(z_W) \in (J_{1+2}^{d_1+d_2})^{\mathrm{GL}_n} . \qquad (\ddagger)$$

Pour vérifier la formule des cup produits du théorème 6.20, on considère d'abord le cas plus simple de la caractéristique $p = 2$. On dispose alors du complément suivant au lemme 6.22.

Lemme 6.25. Supposons $p = 2$. Il existe des morphismes de bicomplexes $\overline{\Delta}_{d,e} : K_{d+e} \to K_d \otimes K_e$ vérifiant les deux conditions suivantes.

1. Le morphisme $H^0(\mathrm{Tot}\,\overline{\Delta}_{d,e})$ est égal au morphisme

$$\Delta_{d,e} : \Gamma^{d+e}(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) \to \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) \otimes \Gamma^e(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) .$$

2. La restriction de $\overline{\Delta}_{d,e}$ aux colonnes d'indice nul :

$$\overline{\Delta}_{d,e} : K_{d+e}^{0,*} = T^{\otimes d+e} \to T^{\otimes d} \otimes T^{\otimes e} = (K_d \otimes K_e)^{0,*}$$

est égale à l'identité.

Démonstration. Comme $p = 2$, la contraction des p-complexes est une opération triviale, d'où une égalité (où les complexes $\widetilde{J}_k$ sont fournis par la proposition 6.19) : $\mathbb{T}(\widetilde{J}_d \otimes \widetilde{J}_e) = \mathbb{T}(\widetilde{J}_d) \otimes \mathbb{T}(\widetilde{J}_e)$. Il suffit donc de prendre $\overline{\Delta}_{d,e} = \mathbb{T}(\widetilde{\Delta}_{d,e})$ où le morphisme $\widetilde{\Delta}_{d,e}$ est fourni par la proposition 6.19. □

On applique alors les formules (†) et (‡) avec les objets suivants :

$$\begin{aligned} V_1 &= \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) & J_1 &= \mathrm{Tot}\,K_d , \\ V_2 &= \Gamma^e(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) & J_2 &= \mathrm{Tot}\,K_e , \\ & & J_{1+2} &= (\mathrm{Tot}\,K_d) \otimes (\mathrm{Tot}\,K_e) , \\ & & \phi &= \mathrm{Id} , \\ W &= \Gamma^{d+e}(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) & J_W &= \mathrm{Tot}\,K_{d+e} , \\ D &= \Delta_{d,e} & \overline{D} &= \mathrm{Tot}\,\overline{\Delta}_{d,e} , \end{aligned}$$

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

On obtient que les classes $c[d] \cup c[e]$ et $(\Delta_{d,e})_* c[d+e]$ sont toutes les deux représentées par le même cycle $z_1^{\otimes d+e}$ du complexe $(K_d \otimes K_e)^{\mathrm{GL}_n}$, ce qui démontre le résultat suivant (qui achève la démonstration du théorème 6.20 en caractéristique $p = 2$).

Lemme 6.26. Si $p = 2$, alors $(\Delta_{d,e})_* c[d+e] = c[d] \cup c[e]$.

Le cas de la caractéristique p impaire est légèrement plus compliqué. En effet, l'opération de contraction des p-complexes étant non triviale, on a :

$$\mathbb{T}(\widetilde{J}_d \otimes \widetilde{J}_e) \neq \mathbb{T}(\widetilde{J}_d) \otimes \mathbb{T}(\widetilde{J}_e) = K_d \otimes K_e \,.$$

Le bicomplexe de gauche est le bicomplexe naturel pour lire l'effet de l'application $\Delta_{d,e}$ au niveau des cycles (c'est-à-dire pour avoir un analogue du lemme 6.25) alors que le bicomplexe de droite est le bicomplexe naturel pour lire l'effet des cup produits. On résout ce problème technique dans [31, Prop 2.4], où l'on construit un morphisme explicite

$$\phi : \mathbb{T}(\widetilde{J}_d) \otimes \mathbb{T}(\widetilde{J}_e) \to \mathbb{T}(\widetilde{J}_d \otimes \widetilde{J}_e)$$

tel que $H^0(\mathrm{Tot}\,\phi)$ est l'identité de $\Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) \otimes \Gamma^e(\mathfrak{gl}_n^{(1)})$. On peut alors appliquer les formules (†) et (‡) avec les objets suivants :

$$\begin{aligned}
V_1 &= \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) & J_1 &= \mathrm{Tot}\, K_d \,, \\
V_2 &= \Gamma^e(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) & J_2 &= \mathrm{Tot}\, K_e \,, \\
& & J_{1+2} &= \mathrm{Tot}\, \mathbb{T}(\widetilde{J}_d \otimes \widetilde{J}_e) \,, \\
& & \phi & \text{ fournie par [31, Prop 2.4]}, \\
W &= \Gamma^{d+e}(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) & J_W &= \mathrm{Tot}\, K_{d+e} = \mathrm{Tot}\, \mathbb{T}(\widetilde{J}_{d+e}) \,, \\
D &= \Delta_{d,e} & \overline{D} &= \mathrm{Tot}\, \overline{\Delta}_{d,e} = \mathrm{Tot}\, \mathbb{T}(\widetilde{\Delta}_{d,e}).
\end{aligned}$$

On obtient, comme dans le cas de la caractéristique paire, que les classes $c[d] \cup c[e]$ et $(\Delta_{d,e})_* c[d+e]$ sont toutes les deux représentées par le même cycle $z_1^{\otimes d+e}$ du complexe $(\mathrm{Tot}\, \mathbb{T}(\widetilde{J}_d \otimes \widetilde{J}_e))^{\mathrm{GL}_n}$. Le lemme 6.26 est donc encore valable pour p impair, ce qui achève la démonstration du théorème 6.20.

Conjecture de W. van der Kallen
Construction des classes universelles
www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

Bibliographie

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

[1] K. Brown, Cohomology of groups. Corrected reprint of the 1982 original. Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] M. Chałupnik, Extensions of strict polynomial functors. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (2005), n° 5, 773–792.

[3] M. Chałupnik, Derived Kan extension for strict polynomial functors. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, n° 20, 10017–10040.

[4] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, Detecting rational cohomology of algebraic groups, J. London Math. Soc. (2) 28 (1983), n° 2, 293–300.

[5] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, W. van der Kallen, Rational and generic cohomology. Invent. Math. 39 (1977), n° 2, 143–163.

[6] C. de Concini, C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory. Advances in Math. 21 (1976), n° 3, 330–354.

[7] S. Donkin, Rational representations of algebraic groups. Tensor products and filtration. Lecture Notes in Mathematics, 1140. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[8] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 224–23.

[9] V. Franjou, J. Lannes, L. Schwartz, Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. (French) [On the Mac Lane cohomology of finite fields] Invent. Math. 115 (1994), n° 3, 513–538.

[10] V. Franjou, E. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, General linear and functor cohomology over finite fields, Ann. of Math. (2) 150 (1999), n° 2, 663–728.

[11] E. Friedlander, B. Parshall : On the cohomology of algebraic and related finite groups, Invent. math. 74 (1983), 85–117.

[12] E. Friedlander, B. Parshall : Cohomology of innitesimal and discrete groups, Math. Ann. 273 (1986), 353–374.

[13] E. M. Friedlander, A. Suslin, Cohomology of finite group schemes over a field. Invent. Math. 127 (1997), n° 2, 209–270.

[14] J. A. Green, Polynomial representations of GL_n, Lecture Notes in Mathematics 830, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[15] F. Grosshans, Algebraic homogeneous spaces and invariant theory, Lecture Notes in Mathematics, 1673. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[16] W. J. Haboush, Reductive groups are geometrically reductive. Ann. of Math. (2) 102 (1975), n° 1, 67–83.

[17] D. Hilbert, Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. 36 (1890) 473–534.

[18] G. Hochschild, Cohomology of algebraic linear groups. Illinois J. Math. 5 1961 492–519.

[19] J. C. Jantzen, Representations of algebraic groups. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 107. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[20] S. Mac Lane, Homology. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[21] O. Mathieu, Filtrations of G-modules. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 23 (1990), n° 4, 625–644.

[22] J. McCleary, A user's guide to spectral sequences. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[23] M. Nagata, On the 14-th problem of Hilbert. Amer. J. Math. 81 (1959) 766–772.

[24] M. Nagata, Invariants of a group in an affine ring, J. Math. Kyoto Univ. 3 (1963/1964), 369–377.

[25] V. T. Pham, Applications des foncteurs strictement polynomiaux, Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2015.

[26] V. L. Popov, On Hilbert's theorem on invariants. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 249 (1979), n° 3, 551–555. Translated in Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 1318–1322.

[27] I. Schur, Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, 1927, in Gesammelte Abhandlungen. Vol III (eds. Alfred Brauer und Hans Rohrbach) Springer-Verlag, 1973, p. 68–85.

[28] J.P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. (2) 58, (1953). 258–294.

[29] V. Srinivas, W. van der Kallen, Finite Schur filtration dimension for modules over an algebra with Schur filtration, Transformation Groups, Vol. 14, No. 3, 2009, p. 695–711.

[30] A. Touzé, Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint, Adv. Math. 225 (2010) 33–68.

[31] A. Touzé, Universal classes for algebraic groups, Duke Math. J. 151 (2010), n° 2, 219–250.

[32] A. Touzé, Troesch complexes and the twisting spectral sequence, Ann. Sci. École Norm. Sup. 45 (2012), n° 1, 53–99.

[33] A. Touzé, A construction of the universal classes for algebraic groups with the twisting spectral sequence. Transform. Groups 18 (2013), n° 2, 539–556.

[34] A. Touzé, Cohomology of algebraic groups with coefficients in twisted representations, In : Geometric and Topological Aspects of Group Representations, eds. JF Carlson, SB Iyengar and J Pevtsova, PIMS (2018), Springer.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2022

[35] A. Touzé, W. van der Kallen, Bifunctor cohomology and Cohomological finite generation for reductive groups, Duke Math. J. 151 (2010), nº 2, 251–278.

[36] A. Troesch, Une résolution injective des puissances symétriques tordues. (French) [Injective resolution of twisted symmetric powers] Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), nº 5, 1587–1634.

[37] W. van der Kallen, Cohomology with Grosshans graded coefficients, In : Invariant Theory in All Characteristics, Edited by : H. E. A. Eddy Campbell and David L. Wehlau, CRM Proceedings and Lecture Notes, Volume 35 (2004) 127–138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[38] W. C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, Graduate Texts in Mathematics, 66. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.

[39] W. C. Waterhouse, Geometrically reductive affine group schemes, Arch. Math. 62 (1994), 306–307.

[40] H. Weyl, The Classical Groups. Their Invariants and Representations. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939. xii+302 p.

www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Index

A

algèbre
- de cohomologie 52
- de Schur 36
- des points fixes 3

C

classe cohomologique
- du vecteur de Witt 74
- universelle 74

cohomologie
- d'un groupe linéaire algébrique 6
- d'un schéma en groupes 13

cup produit 52

F

filtration
- bonne filtration 18
- de Grosshans 66

foncteur
- de puissances divisées 26
- de torsion de Frobenius 28
- strictement polynomial 25

G

groupe linéaire algébrique 1
- réductif 5

H

Hilbert, quatorzième problème 4

M

morphisme noethérien 62

N

noyaux de Frobenius 15

P

p-complexe 78
points fixes 5, 13

R

représentation
- d'un schéma en groupes 11
- polynomiale 35
- rationnelle 2
- tordue par le Frobenius 21

S

schéma en groupes algébrique affine 9
suite spectrale
- d'algèbres 60
- de Hochschild-Serre 67
- d'une algèbre filtrée 70
- hypercohomologique 43

T

théorèmes fondamentaux 51

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Index des notations

$\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ catégorie des $\Bbbk$-algèbres commutatives unitaires 9

$A^{(r)}$ $\Bbbk$-algèbre obtenue à partir de la $\Bbbk$-algèbre A par restriction le long du morphisme $\Bbbk \to \Bbbk$, $x \mapsto x^{-p^r}$. 62

$F^\sharp$ dual d'un foncteur strictement polynomial F 27

$\Gamma^{d,V}$ générateur projectif des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d 39

Γ^λ produit tensoriel de foncteurs de puissances divisées 39

Γ^d foncteur de d-ième puissance divisée 26

GL_n schéma en groupes linéaires . . 10

$\mathfrak{gl}_n^{(r)}$ représentation adjointe de GL_n 68

$H^i(G,V)$ espace vectoriel de cohomologie de degré i d'une représentation V 13

Ind_B^G foncteur d'induction de B dans G 18

$I^{(r)}$ foncteur de r-ième torsion de Frobenius 28

$\Bbbk[G]$ algèbre des coordonnées d'un schéma en groupes G 10

$\Bbbk[V]$ algèbre des polynômes sur un espace vectoriel de dimension finie V 2

Λ^d foncteur de d-ième puissance extérieure 26

$\otimes^d$ foncteur de r-ième puissance tensorielle 26

$\mathscr{P}_{d,\Bbbk}$ catégories des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d 32

$\mathscr{P}_{\Bbbk}$ catégorie des foncteurs strictement polynomiaux 25

$\mathrm{Rep}\, G$ catégorie des représentations d'un schéma en groupes G 11

S^d foncteur de d-ième puissance symétrique 26

S_V^d cogénérateur injectif des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d 41

S^λ produit tensoriel de foncteurs de puissances symétriques 41

$S(n,d)$ algèbre de Schur 36

Sp_n schéma en groupes symplectiques 49

V^G espace vectoriel des points fixes d'une représentation V 13

$\mathscr{V}_{\Bbbk}$ catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie 23

$V^{[r]}$ r-ième torsion de Frobenius d'une représentation V 21

$V^\vee$ dual d'un espace vectoriel V . . 23

© Spartacus-Idh 2022 www.spartacus-idh.com

Collection Les cours Peccot

dirigée par Pierre Cartier

Déjà parus

- *Invariants, cohomologie et représentations fonctorielles des groupes algébriques*.
  Antoine Touzé, Mars-avril 2010.
  Préface de Eric M. Friedlander.

- *Approche duale des représentations du groupe symétrique*.
  Valentin Féray, janvier-février 2013.
  Préface de Pierre Cartier.

- *Théorèmes de de Finetti, limites de champ moyen et condensation de Bose-Einstein*.
  Nicolas Rougerie, février-mars 2014.

- *Graphical representations of lattice spin models*.
  Hugo Duminil-Copin, janvier-février 2015.

- *Autour de la correspondance de Langlands locale p–adique pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$
  Gabriel Dospinescu, mai 2015.
  Préface de Pierre Colmez.

À paraître

- *Quelques propriétés du mouvement brownien et de ses points multiples*.
  Jean-François Le Gall, 1989.

© Spartacus-Idh 2022
www.spartacus-idh.com

N° d'édition : 350434146-1
Dépôt Légal : juin 2021
Achevé d'imprimer : juin 2021

Imprimé en France par

AQUIPRINT

33520 Bruges
www.impression-edition-gironde.com

IMPRIM'VERT
Votre imprimeur agit pour l'environnement

PEFC
QUALI-06-329 - PEFC/10-31-1393