Entre deux convergences uniformes, la convergence locale

Philippe Antoine

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Spartacus Supérieur

Niveau Master
Collection Enseignement

Entre deux convergences uniformes, la convergence locale

Philippe Antoine

2023

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Spartacus IDH

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

ISBN : 978-2-36693-114-3
© Spartacus-idh, Paris 2025

Sommaire

Préface vii

I Notion de convergence locale 1
II Propriétés de la convergence locale 13
III Convergence locale sur un espace de Baire 35
IV Polynômes de Bernstein 47
V Opérateurs linéaires et approximation 59
VI Approximation par des opérateurs positifs 75
VII Approximation par des opérateurs de convolution 87
VIII Équivariance et théorème d'Ascoli 105
A Suites convergentes de fonctions continues 123
B Convergence t-locale 129
C Convergence locale et convergence uniforme sur tout compact . . 135
D Convergence locale des suites généralisées 141
E Approximations dans le cas vectoriel 153

Bibliographie 167
Index 171
Table des matières 173

© Spartacus-Idh 2025
www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Préface

Mon collègue et ami Philippe Antoine nous a quittés il y a trois ans et demi. Après des études extrêmement brillantes (cacique de l'ENS Ulm en 1960, section Mathématiques), il a mené de front une carrière d'entomologiste et de mathématicien.
Son directeur de thèse (nous dirions aujourd'hui « superviseur ») était le mathématicien Paul Dedecker (connu pour ses travaux en topologie algébrique, il y a d'ailleurs un « Cours de topologie algébrique » coécrit par Antoine et Dedecker) mais sans rien enlever au mérite de ce dernier, l'on peut dire que Philippe Antoine, très indépendant intellectuellement, s'est essentiellement supervisé tout seul.
Sa thèse d'État (nous dirions aujourd'hui « Habilitation ») soutenue en 1972 avait pour titre « Sur la structure de certains espaces fonctionnels » et le lecteur ou la lectrice retrouvera dans l'ouvrage ici préfacé une partie des goûts mathématiques de Ph. Antoine. Beaucoup plus tard, j'ai fait sa connaissance à l'Université de Lille 1, où il m'avait précédé et dirigé de nombreuses thèses (une dizaine, de 1975 à 1996), et où j'ai été son collègue.
En préparant, à la fin des années 90, un cours de Maîtrise sur les séries de Fourier, Ph. Antoine a déniché dans le volumineux traité d'A. Zygmund « Trigonometric series », page 58 du tome I pour être précis, une notion de **« convergence uniforme en un point ».** Cette définition semble introduite par Zygmund juste en passant, pour formuler un résultat de convergence uniforme pour les séries de Fourier de fonctions à variation bornée. Nous avions beaucoup discuté de la notion à l'époque, elle nous paraissait mériter mieux que d'apparaître puis de disparaître comme une bulle de savon, à la manière du texte de Zygmund. Les choses en étaient restées là, en ce qui me concerne.

Mais Ph. Antoine s'est intéressé à la notion pour elle-même, d'un point de vue historique (elle semble due à du Bois-Reymond (1886), que Zygmund ne cite pas ; *cf.* Annexe A de l'ouvrage préfacé) et mathématique à la fois, et a écrit un livre entier d'Analyse de niveau Maîtrise sur la question (c'est son dernier travail mathématique). C'est *ce livre que nous présentons ici ;* son principal intérêt à nos yeux est que Ph. Antoine a dégagé une notion qui unifie considérablement des résultats fondamentaux comme ceux qui sont cités plus bas, et plus généralement une bonne partie des grands résultats d'Analyse de la première moitié du vingtième siècle, comme le théorème d'Ascoli. Situons d'abord mieux les choses.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

§ L'Analyse Mathématique au 19e siècle.

Les mathématiciens du dix-neuvième siècle s'exprimaient de façon fort urbaine :

> « *Et comme l'a fait voir mon confrère M. X dans le beau mémoire qu'il a consacré au calcul des variations...* »

Ils s'exprimaient aussi de façon un peu vague voire romanesque et par exemple, dans l'affirmation qui suit, la dépendance en n est mise sous le tapis :

> « *Et l'on pourra ainsi rendre la différence entre le taux d'accroissement de la fonction f_n et son nombre dérivé aussi petite que l'on veut, pourvu qu'on ait choisi préalablement l'accroissement de la variable aussi petit qu'on le souhaite* »

(Beaucoup plus tard, au début du vingtième siècle, cette histoire du « aussi petit » jouera un tour au mathématicien anglais J. E. Littlewood : ayant donné à taper un projet d'article avec une phrase comme « et l'on pourra prendre ε aussi petit que l'on veut », il eut la surprise de voir revenir, après intervention d'un typographe trop zélé, un texte où, effectivement, la lettre ε n'était plus visible sans l'aide du microscope...).
Quoiqu'il en soit, cette façon de s'exprimer, avec notamment une utilisation minimale des symboles mathématiques, engendrait parfois des erreurs fondamentales, comme celle de Cauchy (avec tout le respect dû à l'auteur de la fameuse formule de Cauchy en variable complexe) affirmant que si deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont des termes généraux équivalents, elles sont « de même nature ». Assertion fausse, à laquelle Lejeune-Dirichlet avait rapidement donné le contre-exemple

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

(la première série converge, l'autre pas...).

§ Le virage de Weierstrass.

Vers le milieu du dix-neuvième siècle, le mathématicien allemand K. Weierstrass introduit le langage un peu lourd mais beaucoup plus précis des ε et des η, et en particulier la notion de convergence uniforme (Gleichmässige Konvergenz), ce qui permet d'obtenir des énoncés parfaitement clairs et rigoureux, comme :

> « *Une limite uniforme de fonctions continues est continue* ».

> « *Il existe des fonctions continues 2π-périodiques (des sommes de séries uniformément convergentes de polynômes trigonométriques) dont la série de Fourier diverge à l'origine* »
>
> (du Bois-Reymond, encore lui).

Beaucoup plus tard, au milieu du vingtième siècle, sous l'impulsion notamment de certains membres du mouvement Bourbaki apparaissent les fameux quantificateurs quel que soit ($\forall$) et il existe ($\exists$) ; les anglo-saxons semblent peu enclins à les utiliser et disent plutôt, en toutes lettres : « for all » ou « for

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

some » (rendons à Bourbaki cette justice qu'il y a peu de $\forall$, $\exists$ dans les premiers volumes de la collection). En tout cas, certains étudiants (et enseignants) abuseront au début de ces quantificateurs, ce qui peut engendrer des textes particulièrement cryptiques à première vue ; encore que des définitions spécifiques (suites de Cauchy, valeurs d'adhérence) gagnent beaucoup à leur utilisation !

Ce dernier point sera, en passant, abondamment illustré par le livre de Ph. Antoine. L'auteur n'abuse pas de ces symboles (et le livre est écrit dans un français impeccable !), mais il y recourt quand c'est vraiment nécessaire : impossible en effet de comprendre cette notion de « convergence locale » sans utiliser de quantificateurs. Tournons un peu autour de cette notion...
Comme on le sait depuis Weierstrass, la convergence simple ne préserve pas la continuité, il faut pour cette préservation une convergence uniforme au voisinage de chaque point, par exemple. Mais alors on ne peut rien dire sur les limites simples ? Pas tout à fait... À côté des résultats de Weierstrass et de son école, on trouve des énoncés devenus célèbres, citons-en deux.

§ Le thèorème de la limite simple de Baire.

Ce théorème dit qu'étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a équivalence entre le fait que f est limite simple d'une *suite* (f_n) de fonctions continues et le fait que f a « beaucoup » de points de continuité.
La preuve complète de ce résultat a fait l'objet d'un cours Peccot (1904) de René Baire, d'un livre (« leçons sur les fonctions discontinues » et d'un volumineux article (Acta Mathematica) du même Baire (un Lecture Notes beaucoup plus récent de Todorcevic reprend le résultat sous forme plus moderne) ; elle est donc trop spécialisée pour l'ouvrage de Ph. Antoine, qui se veut essentiellement généraliste.
Néanmoins, l'implication plus facile, mais extrêmement utile disant qu'une limite simple de fonctions continues a beaucoup de points de continuité sera traitée en détail ici ; la preuve qu'on donne habituellement paraît « ad hoc » (même si derrière elle se cache un autre théorème de Baire, dit aussi **lemme de Baire,** joliment qualifié par T. Körner de « profound triviality », ce qui décrit bien sa position au paradis des énoncés d'analyse du début du vingtième siècle). Mais Ph. Antoine donne une preuve **naturelle** dans son cadre de convergence uniforme en un point.
Quant à l'utilité du résultat, elle est par exemple illustrée par cettte jolie propriété, que nous ne résistons pas au plaisir de citer et de prouver :

> *Si une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a des dérivées partielles en tout point, alors elle est différentiable en « beaucoup de points ».*

En effet, les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{n\to\infty} n\big[f(x+1/n,y) - f(x,y)\big] \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{n\to\infty} n\big[f(x,y+1/n) - f(x,y)\big]$$

ont chacune beaucoup de points de continuité par le théorème de Baire, donc ont beaucoup de points de continuité communs. En chacun de ces points communs, f a des dérivées partielles continues, donc est différentiable.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

§ Le théorème de Vitali-Hahn-Saks.

Voici maintenant le second théorème mentionné, dans lequel Ω désigne un ensemble et $\mathscr{A}$ une sigma-algèbre de parties de Ω.

> *Soit (μ_n) une suite de mesures de masse totale finie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que la suite de fonctions $A \mapsto \mu_n(A)$ converge simplement sur $\mathscr{A}$, autrement dit la limite*
>
> $$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$
>
> *existe pour tout $A \in \mathscr{A}$; alors μ est encore* une mesure (*de masse totale finie*) *sur $(\Omega, \mathscr{A})$.*

Là aussi, il s'agit d'un résultat utile (il implique le théorème de Dunford-Pettis, *i.e.* le caractère faiblement séquentiellement complet de l'espace $L^1(\mu)$ pour toute mesure μ), la démonstration est élégante, et utilise le théorème de catégorie de Baire, mais paraît encore une fois « ad hoc ». On s'incline, mais on n'a pas vraiment « situé » la preuve. Chose qui sera faite, et bien faite, dans l'ouvrage de Ph. Antoine, parmi bien d'autres résultats !

§ L'apport de Ph. Antoine et la convergence locale.

Contemplons un instant les deux définitions suivantes, dans lesquelles V désigne un voisinage du point x_0 de l'espace topologique X :

1. **Convergence uniforme au voisinage d'un point x_0**

$$(\exists V)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon, V))(\forall n > N, \forall x \in V) : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

2. **Convergence uniforme en un point x_0**

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V)(\exists N = N(\varepsilon, V))(\forall n > N, \forall x \in V) : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Si nous comparons ces deux formules avec « l'attention hâtive » que dénonce Camus dans « La chute », nous avons l'impression que le refrain est exactement le même ; il y a des ε, des V, des N, et tout çà pour la même conclusion...
Si nous regardons mieux, tout est pareil en effet, si ce n'est que les deux premières quantifications ont été interverties ! C'est là toute la différence, et elle se révèlera considérable, comme le livre de Ph. Antoine l'illustre parfaitement. (**Nous dirons ici, avec Ph. Antoine, *cf.* Annexe A, que la suite (f_n) de fonctions définies sur l'espace X converge localement en $x_0 \in X$ s'il y a convergence uniforme en x_0 au sens précédent, et converge localement sur X s'il y a convergence locale en tout point x_0 de X.**)

$\star$

Présentons maintenant le cadre et le contenu de l'ouvrage, chapitre par chapitre.

§ Le cadre. La généralité maximale n'est pas un but en soi en Mathématiques. À l'inverse, il n'y a pas que les fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans la vie...
Le cadre intermédiaire, raisonnablement général, choisi par l'auteur est celui des fonctions $f : X \to Y$ où X, Y désignent des espaces *métriques* (le plus souvent complets et séparables). Ce point de vue présente plusieurs avantages :

- Le théorème de catégorie de Baire est admirablement adapté aux espaces métriques complets.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

- Presque tous les résultats de l'ouvrage (par exemple le théorème de Vitali-Hahn-Saks, dans la preuve duquel la distance des parties A et B est la mesure de leur différence symétrique) se situent dans ce cadre.
- Les espaces métriques sont d'une grande actualité dans *l'enseignement universitaire et la recherche* : métrique p-adique en arithmétique, métriques de l'analyse complexe, de la géométrie riemannienne, des probabilités, du transport de mesures, espaces de Fréchet en dynamique linéaire, etc.

Signalons cependant, à l'intention des lecteurs plus curieux ou plus avancés, qu'en appendice est abordé le cas plus général des espaces *uniformes,* en particulier celui des espaces vectoriels topologiques généraux (autres donc que les espaces de Fréchet) dont la topologie n'est pas forcément définie par une distance.

§ Le but et le contenu du livre. Le but du livre est de donner une présentation unifiée et généralisée de grands résultats d'analyse classique (théorèmes de Baire, d'analyse fonctionnelle, de Bernstein, d'Ascoli, etc...), *le fil conducteur étant ici la convergence locale.*
Quant au contenu, le livre se compose de huit chapitres, et de cinq annexes. L'annexe A est riche et touffue du point de vue historique, et décrit bien le foisonnement d'idées sur la convergence de l'école allemande de la fin du dix-neuvième siècle et du début du vingtième siècle (du Bois-Reymond, Hahn, Hausdorff, Carathéodory, et plus tard Schaeffer) ; nous conseillons aux lecteurs de la lire, de la relire, et d'y revenir périodiquement quand ils se seront bien familiarisés avec la « convergence locale » après avoir lu les huit chapitres qui précèdent. Cette annexe décrit bien le contenu et le style de l'ouvrage : « la convergence locale permet non seulement d'interpréter ou de redémontrer des résultats classiques, mais encore d'établir des résultats nouveaux. »
Les autres annexes sont des compléments destinés à guider les lecteurs dans les huit chapitres du corps de l'ouvrage. Là aussi, dans un premier temps, la lecture de l'annexe A sur les *suites* de fonctions continues devrait suffire.

Les *chapitres* **I** et **II** sont consacrés à une définition précise de la convergence locale et de ses premières propriétés, avec le cas supplémentaire des espaces vectoriels topologiques, qui ne rentrent pas stricto sensu dans celui des espaces métriques évoqués plus haut ; on peut commencer par omettre ce cas, ou se rendre compte que rien n'est changé, pourvu qu'on remplace systématiquement le symbole

$$d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$$

par le symbole (dans lequel U désigne un voisinage de l'origine)

$$f(x) - g(x) \in U.$$

Tout cela pour dire que la généralisation aux espaces vectoriels topologiques coûtera seulement un petit effort mathématique supplémentaire aux lecteurs !

Le *chapitre* **III** est consacré à la convergence locale pour des fonctions définies sur X un « espace de Baire » (un espace dans lequel le théorème de catégorie de Baire est vrai, comme un espace métrique complet, mais aussi par exemple un espace compact non métrisable). On peut sans grand danger supposer d'abord que X est un espace métrique complet, et ce chapitre

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

est d'une lecture très facile et agréable. Le théorème de la limite simple de Baire évoqué plus haut est bien entendu revisité en détail, ainsi que le théorème de Vitali-Hahn-Saks. D'autres applications à l'analyse fonctionnelle sont également données, avec quelques joyaux comme la *propriété de Schur* de ℓ^1 : les suites de ℓ^1 qui sont faiblement convergentes, ou même faiblement de Cauchy, sont en réalité convergentes *en norme* dans ℓ^1.

Le *chapitre* **IV** est consacré à la convergence locale des polynômes de Bernstein

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) x^k (1-x)^{n-k},$$

sous des formes plus générales que les formes usuelles, et avec l'éclairage de la convergence locale.

Le *chapitre* **V** est consacré à la convergence des suites (L_n) d'opérateurs linéaires positifs ou semi-positifs. Si le chapitre **IV** est spécifique, avec les identités propres aux polynômes de Bernstein, le chapitre **V** est très général.

Le *chapitre* **VI** est consacré à des théorèmes de type Korovkin sur les suites d'opérateurs « positifs », qui généralisent ceux de Bernstein, ou de Fejèr en analyse de Fourier (rappelés ici). D'autres exemples intéressants, comme l'exemple **VI.3.4** (théorème de type Hille) sont donnés.

Le *chapitre* **VII** est consacré à l'approximation par des opérateurs de convolution sur l'espace $VB(\mathbb{R})$ des fonctions à variation totale bornée sur $\mathbb{R}$, et les résultats généraux du chapitre **V** trouvent ici leur plein emploi (*cf.* théorème **VII.2.1** par exemple).

Le *chapitre* **VIII** enfin est consacré aux théorèmes de type Ascoli (résultats de compacité dans les espaces de fonctions continues). Deux généralisations des formes classiques sont proposées :

- Extension au cas de fonctions continues quand l'espace ambiant n'est plus compact.
- Extension au cas de fonctions non nécessairement continues sur un espace compact ou non.

Il s'agit d'un chapitre difficile mais foisonnant, qui ne se laisse apprivoiser que par approximations successives, mais dans lequel la démarche de l'auteur, et les difficultés mathématiques intrinsèques qui se présentent, sont décrites avec beaucoup de précision.

Les lecteurs (étudiants en master de mathématiques, agrégés, professeurs en classes préparatoires, universitaires, mais non exclusivement...) devraient prendre un grand plaisir à l'étude de cet ouvrage, et y apprendre, ou réapprendre sous un éclairage nouveau, beaucoup de choses. Même s'il leur faudra parfois jouer du crayon et de la feuille de papier ! Et choisir le cas échéant des cadres particuliers (suites au lieu de filtres) pour se faire une première idée.

Mais laissons maintenant la parole à Philippe Antoine...

Hervé Queffélec
7 juin 2021

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Philippe Antoine tapait en Word tous ses textes, qu'ils soient mathématiques ou entomologiques. Je me suis donc chargée de la frappe en LaTeX de cet opuscule auquel j'ai dû donner un titre, puisqu'il n'en avait pas indiqué.

Dans sa rédaction finale, Philippe, fidèle à ses habitudes de généralisation, a introduit de prime abord la notion de convergence locale lorsque l'espace but est un espace uniforme. Pour des raisons pédagogiques et pour faciliter la lecture, j'ai choisi d'inverser la présentation en passant du singulier au général, c'est-à-dire en commençant par définir cette convergence lorsque l'espace but est un espace métrique, puis en passant au cas d'un espace vectoriel topologique, pour finalement introduire la définition générale. Il m'a semblé que ce choix permettait de souligner la manière dont progresse le raisonnement mathématique. C'est pourquoi j'ai dû ainsi remanier les premiers chapitres.

Je prends donc à ma charge toutes les erreurs que j'ai pu introduire dans ces chapitres (comme dans les suivants).

Marie Antoine
ENS Fontenay 64
agrégée de mathématiques

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

NOTION DE CONVERGENCE LOCALE

1. — Définitions

H étant un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique muni de la distance d, la convergence uniforme au voisinage d'un point $a \in X$ d'une suite (f_n) d'éléments de H vers l'application f s'exprime de la manière suivante : il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que l'on ait $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$ et tout $n \geqslant N$, c'est-à-dire, si $\mathscr{V}_X(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans X,

$$\exists V \in \mathscr{V}_X(a), \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in V, \forall n \geqslant N,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

L'idée de la présente monographie est de considérer le mode de convergence défini en intervertissant les deux premières quantifications de l'expression précédente.

Définition I.1.1. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y muni de la distance d. On dit que la suite (f_n)* converge localement vers *f au point $a \in X$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $n \geqslant N$, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in V,\ \forall n \geqslant N,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

La suite converge localement vers *f sur X si elle converge localement vers f en tout point de X.*

Remarque. On peut être amené à ne retenir que les ε de la forme $1/p$ $(p \in \mathbb{N})$;

la convergence locale au point a de la suite (f_n) se traduit en effet de manière équivalente par

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists N_p \in \mathbb{N},\ \forall x \in V,\ \forall n \geqslant N_p,\ d(f_n(x), f(x)) < 1/p.$$

La notion de convergence locale d'une suite se généralise naturellement à celle des filtres [1] puisque, à une suite (f_n), on peut associer le filtre engendré par les sections finissantes $F_n = \{f_p \mid p \geqslant n\}$, appelé filtre des sections de la suite.

(1) Un *filtre Φ sur un ensemble H* est un ensemble de parties de H qui vérifie
- Tout ensemble contenant un élément de Φ est un élément de Φ.
- Toute intersection finie d'éléments de Φ est un élément de Φ.
- $\varnothing$ n'est pas un élément de Φ.

On dit qu'*un sous-ensemble $\mathscr{F}$ non vide de H engendre le filtre* Φ si
- Toute intersection finie $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ de n éléments F_i de $\mathscr{F}$ est non vide.
- Tout élément de Φ contient une intersection finie d'éléments de $\mathscr{F}$.

On dit que l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathscr{F}$ est une *base de filtre pour* Φ.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Définition I.1.2. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y muni de la distance d.*
On dit que le filtre Φ sur H converge localement vers l'application f au point $a \in X$ *si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un élément A du filtre tel que l'on ait, pour $x \in V$ et $h \in A$, $d\left(h(x), f(x)\right) < \varepsilon$, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ d(h(x), f(x)) < \varepsilon\ .$$

Le filtre converge localement vers f sur X *s'il converge localement vers f en tout point de X.*
On rappelle les définitions suivantes :
Le filtre Φ sur H converge uniformément au voisinage d'un point $a \in X$ vers l'application f *s'il existe un voisinage V de a tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un élément A du filtre tels que l'on ait, pour $x \in V$ et $h \in A$, $d\left(h(x), f(x)\right) < \varepsilon$, c'est-à-dire :*

$$\exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ d(h(x), f(x)) < \varepsilon\ .$$

Le filtre Φ sur H converge simplement au point $a \in X$ vers l'application f *si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un élément A du filtre tels que l'on ait, pour tout $h \in A$, $d\left(h(a), f(a)\right) < \varepsilon$, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \Phi,\ \forall h \in A,\ d(h(a), f(a)) < \varepsilon\ .$$

La notion, pour une suite, de chacune de ces convergences est donc identique à celle de la convergence de même nature du filtre de ses sections. Les résultats que l'on va obtenir seront énoncés pour les filtres, il sera aisé de les transcrire pour les suites.

Proposition I.1.3. *Tout filtre qui converge localement vers f au point a converge simplement vers f au point a.*

Démonstration. Le point a appartenant à chacun de ses voisinages, on peut faire $x = a$ dans la définition de la convergence locale. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe donc un élément A du filtre tel que l'on ait $d\left(h(a), f(a)\right) < \varepsilon$ pour $h \in A$, ce qui démontre que le filtre converge simplement vers f au point a. □

Remarque I.1.4. Dans la définition de la convergence locale au point a le voisinage du point a dépend du ε choisi. Il en résulte que *cette convergence n'entraîne, en général, aucune convergence en un point différent du point a*. En effet, on a l'exemple suivant :
la suite (f_n) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = (-1)^n x$ converge localement au point 0 vers la fonction identiquement nulle puisque, sur $V =]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a $|f_n(x)| < \varepsilon$ pour tout n, mais la suite $(f_n(x)) = ((-1)^n x)$ ne converge pour aucun $x \neq 0$.

Corollaire I.1.5. *La limite d'un filtre convergeant localement sur X est unique.*

Démonstration. La proposition **I.1.3** entraîne qu'un filtre convergeant localement vers f sur X converge simplement vers f sur X. Cette limite est donc unique puisque l'espace métrique Y est séparé. □

Il n'y a cependant pas unicité de la limite pour la convergence locale en un point. On peut caractériser les différentes limites :

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Définition I.1.6. *Deux applications f et g d'un espace topologique X dans un espace métrique Y sont* localement équivalentes en un point a de X *si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que l'on ait $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V$. La condition s'écrit plus simplement*

$$\lim_{x \to a} d(f(x), g(x)) = 0.$$

Proposition I.1.7. *La convergence locale d'un filtre Φ vers f au point a coïncide avec la convergence locale de ce filtre vers g au point a si et seulement si f et g sont localement équivalentes au point a.*

Démonstration. Comme la définition **I.1.6** est symétrique, il suffit de montrer que la convergence locale de Φ vers f en a entraîne la convergence locale de Φ vers g en a si et seulement si f et g sont localement équivalentes en a.

On suppose donc que Φ converge localement vers f au point a. Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un voisinage un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(h(x), f(x)) < \varepsilon/2$ pour $x \in V$ et $h \in A$.

Condition nécessaire. Si Φ converge localement vers g au point a, il existe un voisinage W de a et un élément B de Φ tels que l'on ait $d(h(x), g(x)) < \varepsilon/2$ pour $x \in W$ et $h \in B$. L'intersection de deux éléments du filtre étant non vide, on peut prendre $h \in A \cap B$ et on a alors, pour $x \in V \cap W$,

$$d(f(x), g(x)) \leqslant d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)) < \varepsilon,$$

ce qui démontre que f et g sont localement équivalentes au point a.

Condition suffisante. Les applications f et g étant localement équivalentes au point a, il existe un voisinage W de a tel que l'on ait $d(g(x), f(x)) < \varepsilon/2$ pour $x \in W$.

Il en résulte que l'on a, pour $x \in V \cap W$,

$$d(h(x), g(x)) \leqslant d(h(x), f(x)) + d(f(x), g(x)) < \varepsilon,$$

ce qui démontre que Φ converge localement vers g au point a. □

2. — Convergence locale et convergences uniformes

Théorème I.2.1. *La convergence uniforme sur un voisinage d'un point de X entraîne la convergence locale en ce point.*

Démonstration. La convergence uniforme de Φ vers f sur un voisinage du point a s'exprime par

$$\exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ d(h(x), f(x)) < \varepsilon\,.$$

Cette propriété ne diffère de la convergence locale au point a [Définition **I.1.2**] que parce que V est indépendant de ε. La convergence uniforme au voisinage de a entraîne donc la convergence locale au point a. □

Remarque. En général, la convergence uniforme au voisinage d'un point est « plus contraignante » que la convergence locale en ce point :

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Exemple I.2.2. Soit $X = C([0,1];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, et soit $Y = \mathbb{R}$. La suite des applications d'évaluation aux points $1/n$

$$\mathrm{ev}_n \ : \ C([0,1];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad k \mapsto k(1/n)$$

converge localement sur $C([0,1];\mathbb{R})$ vers l'application d'évaluation au point 0

$$\mathrm{ev} \ : \ C([0,1];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad k \mapsto k(0),$$

mais, en aucun point de $C([0,1];\mathbb{R})$, il n'y a convergence uniforme sur un voisinage de ce point.

Démonstration. **a)** On fixe $h \in C([0,1];\mathbb{R})$ et on se donne $\varepsilon > 0$.
Si $k \in C([0,1];\mathbb{R})$ vérifie $\|k-h\|_\infty < \varepsilon/3$, on a

$$\begin{aligned} |\mathrm{ev}_n(k) - \mathrm{ev}(k)| &= |k(1/n) - k(0)| \\ &\leqslant |k(1/n) - h(1/n)| + |h(1/n) - h(0)| + |h(0) - k(0)| \\ &\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |h(1/n) - h(0)| \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction h étant continue, il existe N tel que l'on ait, pour $n \geqslant N$, $|h(1/n) - k(0)| < \varepsilon/3$.
On a alors $|\mathrm{ev}_n(k) - \mathrm{ev}(k)| < \varepsilon$ si $\|k-h\|_\infty < \varepsilon/3$ et $n \geqslant N$.
Ceci étant vrai pour tout ε, on obtient que la suite (ev_n) converge localement vers ev au point h.

b) On fixe $h \in C([0,1];\mathbb{R})$. Si la suite (ev_n) convergeait uniformément vers ev sur un voisinage de h, elle convergerait uniformément sur toute boule fermée $B(h,\alpha)$ de centre h et de rayon α incluse dans ce voisinage, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall k \in B(h,\alpha), |\mathrm{ev}_n(k) - \mathrm{ev}(k)| < \varepsilon,$$

ce qui entraînerait en particulier, pour toute suite (k_n) incluse dans $B(h,\alpha)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |\mathrm{ev}_n(k_n) - \mathrm{ev}(k_n)| < \varepsilon,$$

ce qui signifie $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathrm{ev}_n(k_n) - \mathrm{ev}(k_n)| = 0$.
Un exemple montre que ce n'est pas le cas : soit θ_n la fonction continue, nulle sur $[1/n,1]$, valant α pour $t = 0$ et affine sur $[0,1/n]$, et soit $k_n = h + \theta_n$. On a $\|k_n - h\|_\infty = \|\theta_n\|_\infty = \alpha$ pour tout n, donc k_n appartient à $B(h,\alpha)$, mais on a $\mathrm{ev}_n(k_n) = h(1/n)$ et $\mathrm{ev}(k_n) = h(0) + \alpha$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathrm{ev}_n(k_n) - \mathrm{ev}(k_n)| = \alpha$. □

Théorème I.2.3. *La convergence locale sur X entraîne la convergence uniforme sur tout compact de X.*

Démonstration. Soit Φ un filtre convergeant localement vers f sur X et soit K un compact de X. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout point a de K, il existe un voisinage V_a du point a, que l'on peut supposer ouvert, et un élément A_a du filtre tels que l'on ait $d(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V_a$ et $h \in A_a$. La famille $\{V_a \mid a \in K\}$ étant un recouvrement ouvert du compact K, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{V_{a_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant p\}$. L'intersection (finie) des A_{a_i} est un élément A du filtre et on a $d(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $h \in A$ et x appartenant à la réunion des V_{a_i}, a fortiori pour x appartenant à K. Il y a donc convergence uniforme du filtre sur le compact K. □

Remarque. En général, la convergence locale sur X est plus « contraignante » que la convergence uniforme sur tout compact de X :

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2025

Exemple I.2.4. Soit $X = \mathbb{R} \coprod \{\omega\}$, muni de la topologie (séparée) dont les ouverts sont les parties quelconques de $\mathbb{R}$ et les parties $A \coprod \{\omega\}$ avec $\mathbb{R} \setminus A$ au plus dénombrable, soit $Y = \mathbb{R}$ et soit f_n l'application définie par $f_n(\omega) = 0$ et par $f_n(x) = x/n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers l'application nulle, mais elle ne converge pas localement au point ω.

Démonstration. **a)** Un compact K de X est une partie finie de X. En effet, si $K \cap \mathbb{R}$ contenait une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points distincts, l'ouvert $A \coprod \{\omega\}$, avec $A = \mathbb{R} \setminus \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, et les ouverts $\{a_k\}$, avec $k \in \mathbb{N}$, formeraient un recouvrement ouvert de K dont on ne pourrait pas extraire de sous-recouvrement fini.
Il en résulte que la suite (f_n), qui converge simplement vers la fonction nulle, converge uniformément sur toute partie compacte de X.

b) Si (f_n) convergeait localement vers l'application nulle au point ω, en prenant $\varepsilon = 1$, il existerait un voisinage $A \coprod \{\omega\}$ de ω, avec $\mathbb{R} \setminus A$ au plus dénombrable, et un entier N pour lesquels on aurait $|f_n(x)| < 1$ pour $x \in A$ et $n \geqslant N$. Cela est impossible car, A n'étant pas borné, pour n fixé, la fonction f_n n'est pas bornée sur A. □

On peut caractériser [*cf.* Annexe **C**] les espaces X pour lesquels le théorème **I.2.3** admet une réciproque complète (pour la convergence des filtres) ou partielle (pour la convergence des suites). Ces conditions techniques peuvent être ignorées dans la pratique, les seuls cas usuellement rencontrés étant ceux traités dans les deux propositions suivantes :

Proposition I.2.5. *Sur un espace localement compact X, la convergence uniforme au voisinage de tout point de X, la convergence locale sur X et la convergence uniforme sur tout compact de X coïncident.*

Démonstration. Si X est localement compact, tout point ayant un voisinage compact, la convergence uniforme sur tout compact entraîne la convergence uniforme sur un voisinage de tout point.
La convergence uniforme sur un voisinage de tout point entraîne la convergence locale sur X [Théorème **I.2.1**] et celle-ci entraîne la convergence uniforme sur tout compact de X [Théorème **I.2.3**]. □

Proposition I.2.6. *Une suite convergeant uniformément vers f sur tout compact de X, converge localement vers f en tout point de X ayant un système fondamental dénombrable de voisinages.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite convergeant uniformément sur tout compact vers f et soit a un point de X ayant un système fondamental dénombrable de voisinages $\{V_k\}$. Si (f_n) ne convergeait pas localement vers f au point a, il existerait un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout voisinage V de a et tout entier naturel N, on pourrait trouver un $x \in V$ et un $n \geqslant N$ tels que $d(f_n(x), f(x)) \geqslant \varepsilon$. On pourrait alors construire une suite (x_k), vérifiant $x_k \in V_k$ pour tout k, et une suite strictement croissante (n_k) d'entiers naturels, telles que $d(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) \geqslant \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite (f_n) ne convergerait donc pas uniformément sur la partie compacte $K = \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. □

Corollaire I.2.7. *Sur un espace métrique X, la convergence locale et la convergence uniforme sur tout compact coïncident pour les suites.*

Remarque I.2.8. Dans le théorème **I.2.3** et les propositions **I.2.5** et **I.2.6**, de l'hypothèse de compacité, on n'a utilisé que la condition de Borel-Lebesgue, condition qui qualifie les ensembles quasi-compacts, on peut donc remplacer « compact » par « quasi-compact » (2).

(2) Les quasi-compacts interviendront dans les annexes **A** et **C**.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3. — Convergence locale et convergence continue

Définition I.3.1. [Hahn, 1921; Schaefer, 1955; Cook & Fischer, 1965] *Un filtre Φ sur un ensemble d'applications H d'un espace topologique X dans un espace topologique Y* converge continûment vers f au point *a si et seulement si l'image par l'application d'évaluation du produit de ce filtre avec le filtre des voisinages de a est un filtre convergeant vers $f(a)$* [3].
Un filtre Φ converge donc continûment au point a vers f si, quel que soit le voisinage W de $f(a)$ dans Y, il existe un voisinage V de a et un élément A du filtre tels que l'on ait $h(x) \in W$ pour $x \in W$ et $h \in A$, c'est-à-dire

$$\forall W \in \mathscr{V}_Y(f(a)),\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ h(x) \in W\ .$$

Le filtre converge continûment vers *f s'il converge continûment vers f en tout point de l'espace X.*

Lorsque Y est un espace métrique, la convergence continue en a s'exprime de la manière suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un élément A du filtre tels que l'on ait $d(h(x), f(a)) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $h \in A$, en abrégé

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ d(h(x), f(a)) < \varepsilon\ .$$

La similitude entre cette formulation et celle de la convergence locale au point a est frappante : la seule différence est que l'on compare $h(x)$ et $f(a)$ pour $x \in V$ et $h \in A$ au lieu de comparer $h(x)$ et $f(x)$. Le rapport entre les deux modes de convergence peut donc s'exprimer ainsi :

Proposition I.3.2. *Sur un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique, un filtre converge continûment au point a vers f si et seulement si ce filtre converge localement au point a vers l'application constante f_a de valeur $f(a)$.*

Cette caractérisation de la convergence continue permet de déterminer quand les deux convergences coïncident :

Théorème I.3.3. *Sur un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique, la convergence continue vers f au point a coïncide avec la convergence locale vers f au point a si et seulement si f est continue au point a.*

Démonstration. D'après la proposition **I.3.2**, un filtre converge continûment au point a vers f si et seulement s'il converge localement au point a vers l'application constante f_a de valeur $f(a)$. D'après la proposition **I.1.7**, cette convergence locale coïncide avec la convergence locale au point a vers f si et seulement si l'application f et l'application f_a sont localement équivalentes au point a, ce qui se traduit par [Définition **I.1.6**]

$$\lim_{x \to a} d(f(x), f(a)) = \lim_{x \to a} d(f(x), f_a(x)) = 0,$$

ce qui signifie que l'application f est continue au point a. □

(3) *Un filtre $\mathscr{F}$ sur un espace topologique Y converge vers $b \in Y$* s'il vérifie

$$\forall W \in \mathscr{V}_Y(b),\ \exists A \in \mathscr{F},\ A \subset W.$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Un filtre peut converger continûment en un point a vers une application f non continue en ce point : seule la valeur $f(a)$ intervenant dans la définition de la convergence continue, il n'y a aucune condition portant sur $f(x)$ pour $x \neq a$. Dans ce cas, le théorème **I.3.3** entraîne que le filtre ne converge pas localement au point a vers f.

Inversement, un filtre peut converger localement en un point a vers une application f non continue en ce point : par exemple [*cf.* Proposition **I.4.1**], le filtre de toutes les parties contenant f converge localement au point a vers f, le théorème **I.3.3** entraîne que ce filtre ne converge pas continûment au point a vers f.

Il est indifférent d'utiliser l'un ou l'autre de ces deux modes de convergence en un point où la fonction limite est continue [Théorème **I.3.3**], mais le choix est crucial si la fonction limite n'est pas continue en ce point, les deux modes de convergences étant alors incompatibles.

Cette situation se simplifie quand on considère, non plus la convergence en un point, mais la convergence sur X : sur un ensemble d'applications à valeurs dans un espace métrique, la convergence continue n'est qu'un avatar de la convergence locale. On a en effet :

Théorème I.3.4. *Sur un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique, la convergence continue sur X est équivalente à la convergence locale sur X vers une application continue.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème **I.3.3** et des propositions suivantes [Cook & Fischer, *loc. cit.*] :

Proposition I.3.5. *Sur un ensemble H d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique, si un filtre Φ converge simplement vers f sur X, alors l'application f est continue en tout point où le filtre converge continûment.*

Démonstration. On suppose que Φ converge continûment vers f en un point a.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un voisinage V de a et un élément A du filtre tels que l'on ait $d(h(x), f(a)) < \varepsilon/2$ pour $x \in V$ et $h \in a$.
Par ailleurs, le filtre convergeant simplement, pour tout $x \in X$, il existe un élément B_x du filtre tel que l'on ait $d(f(x), h(x)) = d(h(x), f(x)) < \varepsilon/2$ pour $h \in B_x$.
Quel que soit le point $x \in V$, en prenant $h \in A \cap B_x$ on a donc $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, ce qui démontre que f est continue au point a. □

Corollaire I.3.6. *Sur un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique, si un filtre Φ converge continûment vers f sur X, alors l'application f est continue.*

Démonstration. Pour tout point a de X, la convergence continue de Φ vers f en a, qui équivaut à la convergence locale de Φ vers la fonction f_a [Proposition **I.3.2**], entraîne la convergence simple de Φ vers f au point a [Proposition **I.1.3**]. On applique la proposition **I.3.5** en chaque point de l'espace X. □

4. — Propriétés de l'ensemble des filtres convergeant localement

La convergence locale sur un ensemble d'applications n'est pas, en général, associée à une topologie sur cet ensemble. Par exemple, sur un espace d'applications continues, la convergence locale coïncide avec la convergence

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

continue [Théorème **I.3.4**] et celle-ci n'est définie par une topologie que s'il existe une « suitable topology » (4) [Spanier, 1963] sur l'espace d'applications, ce qui n'est pas toujours le cas : Spanier montre [*loc. cit.*, Corollaire 5.2] qu'il n'y a pas de « suitable topology » sur l'espace des applications continues définies sur un espace complètement régulier (5), non localement compact, à valeurs dans l'intervalle unité fermé.

Certaines propriétés usuelles des filtres convergeant sur un espace topologique sont cependant toujours vérifiées par les filtres convergeant localement sur un ensemble d'applications, elles seront utilisées au chapitre **8**.

Proposition I.4.1. *Sur un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique, le filtre de toutes les parties contenant f converge localement vers f en tout point.*

Démonstration. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on prend $V = X$ et $A = \{f\}$. □

Proposition I.4.2. *Sur un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique, l'intersection de deux filtres (6) convergeant localement vers f au point a est un filtre convergeant localement vers f au point a.*

Démonstration. Soient Φ et Φ' deux filtres convergeant localement vers f au point a. Un $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe

- d'une part, un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d\,(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $h \in A$,
- d'autre part, un voisinage V' de a et un élément A' de Φ' tels que l'on ait $d\,(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V'$ et $h \in A'$.

Alors $V \cap V'$ est un voisinage de a, $A \cup A'$ est un élément de l'intersection des deux filtres et on a $d\,(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V \cap V'$ et $h \in A \cup A'$. Il en résulte que l'intersection des deux filtres converge localement vers f au point a. □

Proposition I.4.3. *Sur un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique, tout filtre plus fin (7) qu'un filtre convergeant localement vers f au point a est un filtre convergeant localement vers f au point a.*

Démonstration. Si Φ converge localement vers f au point a, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d\,(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $h \in A$. Si Φ' est plus fin que Φ, tout élément de Φ, en particulier A, appartient à Φ' ; il en résulte que Φ' converge localement vers f au point a. □

La convergence locale des filtres est entièrement déterminée par la convergence locale des ultrafiltres (8) :

(4) C'est-à-dire « topologie appropriée ».

(5) C'est-à-dire un ensemble tel que, pour tout point a et tout fermé F ne contenant pas a, il existe une fonction f réelle continue telle que $f(a) = 1$ et $f(F) = \{0\}$.

(6) Qui est l'ensemble constitué des éléments $\{A \cup A' \mid A \in \Phi, A' \in \Phi'\}$.

(7) Φ et Φ' étant deux filtres sur l'ensemble H, on dit que Φ' *est plus fin que* Φ, ou que Φ *est moins fin que* Φ', si $\Phi \subset \Phi'$, c'est-à-dire si, pour tout élément A de Φ, il existe un élément A' de Φ' tel que $A' \subset A$. L'intersection de deux filtres, qui est le plus fin des filtres moins fins que ces deux filtres, est aussi appelé *borne inférieure* de ces deux filtres. Si, de plus $\Phi \neq \Phi'$, on dit que Φ' *est strictement plus fin que* Φ, ou que Φ *est strictement moins fin que* Φ'.

(8) On appelle *ultrafiltre sur un ensemble H* un filtre tel qu'il n'existe aucun filtre strictement plus fin que lui.
On démontre (en utilisant le lemme de Zorn) que pour tout filtre sur H, il existe un ultrafiltre plus fin que lui.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Théorème I.4.4. *Sur un ensemble H d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique, pour qu'un filtre converge localement vers f au point a il faut et il suffit que tout ultrafiltre plus fin que ce filtre converge localement vers f au point a.*

Démonstration. Condition nécessaire. Si Φ converge localement vers f au point a, tout filtre plus fin que Φ, a fortiori tout ultrafiltre plus fin que Φ, converge localement vers f au point a d'après la proposition **I.4.3**.

Condition suffisante (par contraposition). On montre que si Φ ne converge pas localement vers f au point a, il existe un ultrafiltre plus fin que Φ ne convergeant pas localement vers f au point a.
Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout voisinage V de a et tout élément A de Φ, il existe $x \in V$ et $h \in A$ pour lesquels on a $d(h(x), f(x)) \geqslant \varepsilon$.
À tout voisinage V de a, on associe la partie

$$B_V = \{h \in H \mid \exists x \in V,\ d(h(x), f(x)) \geqslant \varepsilon\}\ .$$

Pour tout $A \in \Phi$ et tout $V \in \mathscr{V}_X(a)$, on a $A \cap B_V \neq \varnothing$ d'après l'hypothèse faite. En particulier, B_V n'est jamais vide et on a $B_V \cap B_W \supset B_{V\cap W}$. La réunion de Φ et de l'ensemble des B_V est donc une base d'un filtre Φ' plus fin que Φ.
Soit Θ un ultrafiltre plus fin que Φ', donc plus fin que Φ. Quel que soit $M \in \Theta$ et quel que soit le voisinage V de a, on a $M \cap B_V \neq \varnothing$ et il existe donc $x \in V$ et $h \in M$ tels que $d(h(x), f(x)) \geqslant \varepsilon$, ce qui démontre que l'ultrafiltre Θ ne converge pas localement vers f au point a. □

5. — Extension de la définition de la convergence locale

Lorsque l'espace but Y, muni de la distance d, est de plus un espace vectoriel topologique pour une topologie $\mathscr{T}$ équivalente à la topologie définie par d soumise à la condition

$$\forall (y, y') \in Y \times Y, d(y, y') = d(y - y', 0),$$

dire que la distance $d(y, y')$ est « petite » est équivalent à dire que $y - y'$ est « voisin » de l'origine La convergence locale définie par **I.1.2** se traduit alors par

$$\forall W \in \mathscr{V}_Y(0),\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ h(x) - f(x) \in W\ .$$

Cette caractérisation ne dépend pas explicitement de d, ce qui permet d'en faire abstraction et de prolonger la définition de la convergence locale à un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) non nécessairement métrisable :

Définition I.5.1. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace vectoriel topologique E sur $\mathbb{k}$.* Un filtre Φ sur H converge localement vers $f \in H$ au point *a si, quel que soit le voisinage W de l'origine dans E, il existe un voisinage V de a et un élément A du filtre tels que l'on ait $h(x) - f(x) \in W$ pour $x \in V$ et $h \in A$, c'est-à-dire*

$$\forall W \in \mathscr{V}_E(0),\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ h(x) - f(x) \in W.$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Remarque I.5.2. On aurait pu dès le début partir d'une définition plus générale en considérant que les espaces métriques et les espaces vectoriels topologiques sont des espaces uniformes (9) ; en effet, une base du filtre $\mathscr{E}$ des entourages d'un espace métrique (resp. vectoriel topologique) Y est formée des entourages définis à partir de $\varepsilon > 0$ (resp. W, voisinage de l'origine dans Y, qu'on pourra choisir symétrique, c'est-à-dire tel que $W = -W$) par

$$\mathscr{U}_\varepsilon = \left\{(y,y') \in Y^2 \mid d(y,y') < \varepsilon\right\} \quad \left(\text{resp. } \mathscr{U}_W = \left\{(y,y') \in Y^2 \mid\ y - y' \in W\right\}\right).$$

On obtient donc la généralisation suivante :

Définition I.5.3. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace uniforme E. Un filtre Φ sur H* converge localement vers l'application f au point *a si, quel que soit l'entourage $\mathscr{U}$, il existe un voisinage V de a et un élément A du filtre tels que l'on ait $(h(x), f(x)) \in \mathscr{U}$ pour $x \in V$ et $h \in A$, c'est-à-dire*

$$\forall \mathscr{U} \in \mathscr{E},\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ (h(x), f(x)) \in \mathscr{U}.$$

Le filtre converge localement vers f sur X *s'il converge localement vers f en tout point de X.*

La convergence locale du filtre Φ au point a sur l'espace H d'applications de l'espace X dans l'espace métrique Y considéré comme espace uniforme se traduit par

$$\forall \mathscr{U}_\varepsilon,\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ (h(x), f(x)) \in \mathscr{U}_\varepsilon.$$

La convergence locale du filtre Φ au point a sur l'espace H d'applications de l'espace X dans l'espace vectoriel topologique Y considéré comme espace uniforme se traduit par

$$\forall \mathscr{U}_W,\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ (h(x), f(x)) \in \mathscr{U}_W.$$

Tous les résultats des paragraphes précédents, y compris le corollaire **I.1.5** à condition que l'espace but Y soit séparé, se généralisent

– aux espaces vectoriels topologiques : dans les démonstrations, on remplace $\mathscr{U}_\varepsilon$ par $\mathscr{U}_W$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{U}_{\varepsilon/n}$ par $\mathscr{U}_{W_n}$ où W_n est un voisinage de 0 symétrique tel que :

$$\forall \left\{(x_i)_{i\leqslant n} \mid x_i \in W_n\right\}, \sum_{i\leqslant n} x_i \in W,$$

(9) Un espace Y est dit *uniforme* [Bourbaki, *Topologie générale*, Chapitre II] s'il existe un ensemble non vide $\mathscr{E}$ de parties de $Y \times Y$ appelées *entourages* vérifiant les propriétés suivantes :

- Tout entourage contient la diagonale de $Y \times Y$.
- Toute partie de $Y \times Y$ contenant un entourage est un entourage.
- L'intersection de deux entourages est un entourage.
- Pour tout entourage $\mathscr{U}$, l'ensemble $\mathscr{U}' = \{(y,x) \mid (x,y) \in \mathscr{U}\}$ est un entourage. $\mathscr{U}$ est dit symétrique si $\mathscr{U} = \mathscr{U}'$.
- Pour tout entourage $\mathscr{U}$, il existe un entourage $\mathscr{U}'$ tel que, si $(x,z) \in \mathscr{U}'$ et $(z,y) \in \mathscr{U}'$, alors $(x,y) \in \mathscr{U}$.

Un espace uniforme Y est un espace topologique : tout voisinage du point $y \in Y$ est de la forme $V_{\mathscr{U}}(y) = \{y' \mid (y,y') \in \mathscr{U}\}$ où $\mathscr{U}$ est un entourage de Y.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

– puis aux espaces uniformes : on remplace $\mathscr{U}_\varepsilon$ par $\mathscr{U}$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{U}_{\varepsilon/n}$ par un entourage symétrique $\mathscr{U}_{(n)}$ tel que, si on a $(y_i, y_{i+1}) \in \mathscr{U}_{(n)}$ pour tout i compris entre 1 et $n-1$, alors on a $(y_1, y_n) \in \mathscr{U}$.

On a préféré ne considérer initialement que des espaces métriques dans la mesure où, dans les exemples considérés dans les chapitres suivants, les espaces vectoriels topologiques associés à une topologie $\mathscr{T}$ sont pour la plupart métrisables, et alors tous les énoncés des paragraphes précédents sont valables sans avoir à effectuer le remplacement indiqué plus haut.
De plus, cette présentation permet de souligner la manière dont progresse le raisonnement du mathématicien qui a plaisir à poursuivre la généralisation d'un cas particulier : dans la rédaction qu'il a laissée, Philippe Antoine allait du général au particulier en prenant pour espaces buts des espaces uniformes, ce qui évitait la remarque **II.5.2**.

Notation I.5.4. *Dans les chapitres suivants, les énoncés seront établis, comme dans ce chapitre, pour un espace but métrique. Si ces énoncés ne font appel qu'à la structure uniforme associée à la distance, ils sont valables en remplaçant cet espace métrique par un espace uniforme (resp. un espace vectoriel topologique) comme il a été indiqué dans la remarque **II.5.2**. La référence indiquée sera alors suivie de « **.u** » (resp. « **.v** »).*

Le fait que l'espace but soit un espace vectoriel topologique entraîne pour la convergence locale des propriétés supplémentaires qui feront l'objet du paragraphe **2.2**.

Remarque. Les propositions **I.4.1.u**, **I.4.2.u** et **I.4.3.u** entraînent que, sur un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace uniforme, l'ensemble des filtres convergeant localement en un point (resp. convergeant localement sur X) définit une « quasi-topologie » au sens de Kowalsky [1954] et de Fischer [1959]. Le théorème **I.4.4.u** et la proposition **I.4.1.u** entraînent que, sur un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace uniforme, l'ensemble des filtres convergeant localement en un point (resp. convergeant localement sur X) définit une « pseudo-topologie » au sens de Choquet [1947]. Les propositions **I.4.2.u** et **I.4.3.v** sont toujours vérifiées pour une pseudo-topologie ; il était aisé de les démontrer directement.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

PROPRIÉTÉS DE LA CONVERGENCE LOCALE

Ce chapitre est consacré à la démonstration des propriétés générales de la convergence locale qui seront utilisées dans les applications présentées dans les chapitres suivants.

Une première lecture limitée aux seuls énoncés devrait suffire pour avoir une idée de ce que l'on peut attendre de la convergence locale. Une lecture plus approfondie, restreinte aux théorèmes pertinents, devrait alors accompagner l'étude de chacune des applications.

www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025

1. — Image directe et image réciproque d'un filtre convergeant localement

Le problème abordé est celui du respect de la convergence locale par les applications d'évaluation et de composition, donc de la continuité de ces applications quand la convergence locale est associée à une topologie. On n'a pas de résultats aussi réguliers que ceux connus pour les ensembles d'applications continues. Par exemple, pour l'application d'évaluation d'un ensemble $H(X,Y)$ d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique Y

$$\mathrm{ev} \ : \ X \times H(X,Y) \longrightarrow Y \quad (x,f) \mapsto f(x),$$

l'image du produit d'un filtre sur X convergeant vers a [10] et d'un filtre sur $H(X,Y)$ convergeant localement vers f au point a n'est pas, en général un filtre convergeant vers $f(a)$ dans Y. On a en effet :

Proposition II.1.1. *Soit $H(X,Y)$ un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y et soit Φ un filtre sur $H(X,Y)$ convergeant localement vers f au point a. L'image par l'application d'évaluation du filtre produit $\mathscr{V}_X(a) \times \Phi$ converge vers $f(a)$ si et seulement si l'application f est continue au point a.*

Démonstration. Condition nécessaire. Si le filtre ev $(\mathscr{V}_X(a) \times \Phi)$ converge vers $f(a)$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait

$$d(h(x), f(a)) < \varepsilon/2 \quad \text{pour } x \in V \ \text{ et } \ h \in A.$$

Comme le filtre Φ converge localement vers f au point a, il existe un voisinage V' de a et un élément A' de Φ tels que l'on ait

$$d(h(x), f(x)) < \varepsilon/2 \quad \text{pour } x \in V' \ \text{ et } \ h \in A'.$$

En prenant $h \in A \cap A'$, on obtient donc, pour tout $x \in V \cap V'$,

$$d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), h(x)) + d(h(x), f(a)) = d(h(x), f(x)) + d(h(x), f(a)) < \varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité de f au point a.

(10) Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :
– le filtre $\mathscr{F}$ sur Y converge vers $b \in Y$
– le filtre $\mathscr{F}$ est plus fin que le filtre $\mathscr{V}_Y(b)$ des voisinages de b.

Condition suffisante. Si f est continue au point a, un filtre convergeant localement vers f au point a converge continûment vers f au point a [Théorème **I.3.3**] et l'image par l'application d'évaluation du produit d'un filtre convergeant vers a et d'un filtre convergeant continûment vers f au point a est un filtre convergeant vers $f(a)$, par définition de la convergence continue [Définition **I.3.1**]. □

Une démarche plus générale consiste à ne considérer que la convergence de la restriction des applications d'évaluation et de composition à certains sous-ensembles.

Par exemple, pour l'application d'évaluation en un point a fixé :

$$\mathrm{ev}_a \ : \ H(X,Y) \longrightarrow Y \quad h \mapsto h(a),$$

l'image d'un filtre convergeant localement vers f au point a est un filtre convergeant vers $f(a)$ puisque tout filtre convergeant localement en un point a converge simplement en ce point [Proposition **I.1.3**]. Cette propriété ne résulte pas de la proposition **II.1.1** (ev_a est la restriction de l'application ev au sous-ensemble $\{a\} \times H(X,Y)$, mais on n'a pas d'hypothèse sur f).

Pour la composition des applications, on a les résultats suivants :

Proposition II.1.2. *Soit $H(X,Y)$ (resp. $H(X',Y)$) un ensemble d'applications d'un espace topologique X (resp. X') dans un espace métrique Y. Soit φ une application de X' dans X telle que, pour tout $h \in H(X,Y)$, $h \circ \varphi \in H(X',Y)$; soit $\varphi_\star$ l'application ainsi définie de $H(X,Y)$ dans $H(X',Y)$.*
Si φ est continue au point a', l'image par $\varphi_\star$ d'un filtre sur $H(X,Y)$ convergeant localement vers f au point $a = \varphi(a')$ est un filtre sur $H(X',Y)$ convergeant localement vers $f \circ \varphi$ au point a'.

Démonstration. Si un filtre Φ sur $H(X,Y)$ converge localement vers f au point a, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un élément A du filtre tels que l'on ait $d(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $h \in A$. L'application φ étant continue au point a', il existe un voisinage V' de a' tel que $\varphi(V') \subset V$. Il en résulte que l'on a $d(h \circ \varphi(x'), f \circ \varphi(x')) < \varepsilon$ pour tout $x' \in V'$ et tout $h \in A$, donc $\varphi_\star(\Phi)$ converge localement vers $f \circ \varphi$ au point a'. □

Corollaire II.1.3. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y et soit φ une application de X' dans X.*
Si φ est continue au point a' et si (f_n) converge localement vers f au point $a = \varphi(a')$, alors la suite $(f_n \circ \varphi)$ converge localement vers $f \circ \varphi$ au point a'.

Démonstration. On prend $H(X,Y) = Y^X$ et $H(X',Y) = Y^{X'}$, on applique la proposition **II.1.2** au filtre des sections de (f_n). □

Proposition II.1.4. *Soit $H(X,Y)$ (resp. $H(X,Y')$) un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y (resp. Y'). Soit ϑ une application de Y dans Y' telle que $\vartheta \circ h \in H(X,Y')$ pour tout $h \in H(X,Y)$; soit $\vartheta^\star$ l'application ainsi définie de $H(X,Y)$ dans $H(X,Y')$. Soit Φ un filtre sur $H(X,Y)$ convergeant localement vers f au point a.*

(i) *Si ϑ est uniformément continue, $\vartheta^\star(\Phi)$ converge localement vers $\vartheta \circ f$ au point a.*

(ii) *Si ϑ est continue au point $f(a)$ et si f est continue au point a, $\vartheta^\star(\Phi)$ converge localement vers $\vartheta \circ f$ au point a.*

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. **(i)** L'application ϑ étant uniformément continue, quel que soit $\varepsilon' > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $d(\vartheta(y), \vartheta(z)) < \varepsilon'$ pour tout $(y, z) \in Y^2$ tel que $d(y, z) < \varepsilon$.
Or, si un filtre Φ sur $H(X, Y)$ converge localement vers f au point a, il existe un voisinage V de a et un élément A du filtre tels que l'on ait $d(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $h \in A$.
On a donc $d(\vartheta \circ h(x), \vartheta \circ f(x)) < \varepsilon'$ pour tout $x \in V$ et tout $h \in A$, ce qui démontre que $\vartheta^*(\Phi)$ converge localement vers $\vartheta \circ f$ au point a.

(ii) Les applications f et $\vartheta \circ f$ étant, par hypothèse, continues au point a, il suffit [Théorème **I.3.3**] d'établir que, si un filtre converge continûment vers f au point a, son image par ϑ^* converge continûment vers $\vartheta \circ f$ au point a.
L'application ϑ étant continue au point $f(a)$, quel que soit le voisinage W' de $\vartheta(f(a))$, il existe un voisinage W de $f(a)$ tel que l'on ait $\vartheta(W) \subset W'$.
Or, si un filtre Φ converge continûment vers f au point a, il existe un voisinage V de a et un élément A du filtre tels que l'on ait $h(x) \in W$ pour $x \in V$ et $h \in A$.
On a donc $\vartheta \circ h(x) \in W'$ pour $x \in V$ et $h \in A$, ce qui démontre que $\vartheta^*(\Phi)$ converge continûment vers $\vartheta \circ f$ au point a. □

Corollaire II.1.5. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y et soit ϑ une application de Y dans un espace métrique Y'.*

(i) *Si ϑ est uniformément continue et si (f_n) converge localement vers f au point a, alors la suite $(\vartheta \circ f_n)$ converge localement vers $\vartheta \circ f$ au point a.*

(ii) *Si ϑ est continue au point $f(a)$, si f est continue au point a et si (f_n) converge localement vers f au point a, alors la suite $(\vartheta \circ f_n)$ converge localement vers $\vartheta \circ f$ au point a.*

Démonstration. On prend $H(X, Y) = Y^X$ et $H(X, Y') = Y'^X$, on applique la proposition **II.1.4** au filtre des sections de (f_n). □

Proposition II.1.6. *Soit Y le produit (métrisable [11]) d'une famille dénombrable d'espaces métriques $\{Y_i \mid i \in \boldsymbol{I}\}$, chacun muni de la distance d_i. On note ω_i la projection de Y sur Y_i.*
Soit $H(X, Y)$ (resp. $H(X, Y_i)$) un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans Y (resp. Y_i) tel que, pour toute application $h \in H(X, Y)$ et tout indice i, l'application $\omega_i \circ h$ appartienne à $H(X, Y_i)$.
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre Φ sur $H(X, Y)$ converge localement vers f au point a est que, pour tout indice i, le filtre $\omega_i^\star(\Phi)$ converge localement au point a vers $f_i = \omega_i \circ f$.

(11) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on associe à d_i la distance équivalente définie par

$$\forall (y_i, z_i) \in Y_i^2,\ d_i'(y_i, z_i) = \min\{1, d_i(y_i, z_i)\}\,.$$

On va montrer que la topologie produit est équivalente à la topologie associée à la distance d définie par

$$\forall (y, z) \in Y^2,\ d(y, z) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_i'(\omega_i(y), \omega_i(z))\,.$$

En effet, on a :

- Pour tout voisinage $W(y)$ de $y \in Y$ pour la topologie produit, il existe un sous-ensemble fini $\boldsymbol{J}$ de $\mathbb{N}$ et un ensemble $\{\varepsilon_i\}_{i \in \boldsymbol{J}}$ de réels positifs tels que l'ouvert

$$V_{\boldsymbol{J}}(y) = \cap_{i \in \boldsymbol{J}} \{z \in Y \mid \forall i \in \boldsymbol{J}, d_i'(\omega_i(y), \omega_i(z)) < \varepsilon_i\}$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Condition nécessaire. La projection ω_i est uniformément continue, donc $\omega_i^\star(\Phi)$ converge localement au point a vers $\omega_i \circ f$ si Φ converge localement vers f au point a [Proposition **II.1.4**].

Condition suffisante. Soit d une distance rendant Y métrisable. Alors, que l'ensemble I soit fini ou dénombrable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ tel que $d(y,y') < \varepsilon$ dès que $\max\limits_{i\leqslant N} d_i(\omega_i(y),\omega_i(z)) < \alpha$.

Par hypothèse, pour tout i, le filtre $\omega_i^\star(\Phi)$ converge localement au point a vers $\omega_i(f)$, donc il existe un voisinage V_i de a et un élément A_i du filtre tels que l'on ait $d_i\left(\omega_i(h(x),\omega_i(f(x)))\right) < \alpha$ pour $x \in V_i$ et $h \in A_i$.
L'ensemble $V = \cap_{i\leqslant N} V_i$ est un voisinage de a et $A = \bigcap\limits_{i\leqslant N} A_i$ est un élément du filtre Φ ; on a alors

$$d(h(x),f(x)) < \varepsilon \qquad \text{pour } \ x \in V \text{ et } h \in A,$$

ce qui traduit le fait que Φ converge localement vers f au point a. □

Corollaire II.1.7. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique X dans le produit Y d'une famille dénombrable $\{Y_i \mid i \in \boldsymbol{I}\}$ d'espaces métriques. Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (f_n) converge localement vers f au point a est que, pour tout indice i, la suite $(\omega_i \circ f_n)$ converge localement vers $\omega_i \circ f$ au point a.*

Démonstration. On prend $H(X,Y) = Y^X$ (resp. $H(X,Y_i) = Y_i^X$) et on applique la proposition **II.1.6** au filtre des sections de (f_n). □

---

soit inclus dans $W(y)$; on pose $N = \max \boldsymbol{J}$ et $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}_{i\in\boldsymbol{J}}$. On a alors, pour tout $i \leqslant N$,

$$d(y,z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^j} d'_j(\omega_j(y),\omega_j(z)) \geqslant \frac{1}{2^i} d'_i(\omega_i(y),\omega_i(z) \geqslant \frac{1}{2^N} d'_i(\omega_i(y),\omega_i(z)).$$

En prenant $r < \varepsilon/2^N$, on obtient pour tout $i \leqslant N$, donc

$$\forall i \in \boldsymbol{J},\ \forall z \mid d(y,z) < r,\ \ d'_i(\omega_i(y),\omega_i(z)) < \varepsilon,$$

ce qui entraîne que la boule de centre y et de rayon r est incluse dans l'ouvert $W(y)$ qui est alors un voisinage de y pour la distance d.

- Pour tout N, on a

$$\begin{aligned} d(y,z) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d'_i(\omega_i(y),\omega_i(z)) \leqslant \sum_{i\leqslant N} \frac{1}{2^i} d'_i(\omega_i(y),\omega_i(z)) + \sum_{i>N} \frac{1}{2^i} \\ &\leqslant \sum_{i\leqslant N} \frac{1}{2^i} d'_i(\omega_i(y),\omega_i(z)) + \frac{1}{2^N}. \end{aligned}$$

À r fixé, on associe un entier N tel que $r > 1/2^{N-1}$ et un réel ε tel que $0 < \varepsilon < r/2$. Soit

$$O_{\varepsilon,N}(y) = \left\{z \in Y \mid \forall i \leqslant N, d'_i(\omega_i(y),\omega_i(z)) < \varepsilon\right\},$$

on a alors

$$\forall z \in O_{\varepsilon,N}(y),\ d(y,z) \leqslant \sum_{i\leqslant N} \frac{1}{2^i}\varepsilon + \varepsilon/2 < \varepsilon + r/2 < r,$$

ce qui signifie que la boule de centre y et de rayon r contient l'ouvert $O_{\varepsilon,N}(y)$ et est donc un voisinage de y pour la topologie produit.

Remarque On peut remplacer d' par la distance D définie par

$$D(y,z) = \sum_{i\geqslant 1} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\omega_i(y),\omega_i(z))}{1 + d_i(\omega_i(y),\omega_i(z))}.$$

[*cf.* Schwartz, *Analyse 1*]

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Remarque II.1.8. Les résultats des propositions **II.1.2** et **II.1.4** se généralisent au cas où Y et Y' sont des espaces uniformes, il suffit de faire la substitution indiquée dans la remarque **II.5.2**.

Dans la proposition **II.1.6** et son corollaire **II.1.7**, l'hypothèse de dénombrabilité de I n'est là que pour assurer le fait que le produit des Y_i est un espace métrique, un produit non dénombrable d'espaces métriques n'étant pas en général métrisable.
Par contre, si I est un ensemble quelconque d'indices et si les Y_i sont des espaces uniformes, ce que sont les espaces métriques et les espaces vectoriels topologiques, leur produit Y est un espace uniforme pour la topologie produit, c'est un espace vectoriel topologique dans le cas où les Y_i sont des espaces vectoriels topologiques sur le même corps. Une base de filtre des entourages de Y est constituée des intersections finies de parties

$$\mathscr{W}_{\mathscr{U}_i} = \{(x,y) \in Y \times Y \mid (\omega_i(x), \omega_i(y)) \in \mathscr{U}_i\}\,,$$

où $\mathscr{U}_i$ est un entourage de Y_i.
La démonstration de la proposition **II.1.6** se généralise à un produit quelconque d'espaces uniformes : on remplace ε par un entourage $\mathscr{U}$ de Y, N par une famille finie $J \subset I$, α par une famille indexée par J d'entourages $\mathscr{W}_i$ de Y_i. La convergence locale au point a du filtre Φ sur $H(X,Y_i)$ se traduit par

$$\exists V_i \in \mathscr{V}(a),\ \exists A_i \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A_i,\ (h_i(x), f_i(x)) \in \mathscr{W}_{\mathscr{U}_i}\ .$$

On pose $V = \cap_{i\in J} V_i$ et $A = \cap_{i\in J} A_i$. On peut donc faire abstraction de l'hypothèse de dénombrabilité et obtenir en particulier la

Proposition II.1.9. *Soit Y l'espace vectoriel topologique produit d'une famille $\{Y_i \mid i \in I\}$ d'espaces vectoriels topologiques sur le même corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note ω_i la projection de Y sur Y_i. Soit $H(X,Y)$ (resp. $H(X,Y_i)$) un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans Y (resp. Y_i) tel que, pour toute application $h \in H(X,Y)$ et tout indice i, l'application $h_i = \omega_i \circ h$ appartienne à $H(X,Y_i)$.*
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre Φ sur $H(X,Y)$ converge localement vers f au point a est que, pour tout indice i, le filtre $\omega_i^\star(\Phi)$ converge localement au point a vers $f_i = \omega_i \circ f$.

Une base de filtre de $\mathscr{V}_Y(0)$ étant constituée des ensembles de la forme

$$\bigcap_{i\in J} \{z \in Y \mid \omega_i(z) \in W_i\}$$

où J est une partie finie de I et W_i est un élément de $\mathscr{V}_{Y_i}(0)$, la convergence locale au point a du filtre Φ sur $H(X,Y)$ se traduit donc par : pour toute partie finie J de I, pour toute famille $\{W_i \mid W_i \in \mathscr{V}_{Y_i}(0)\}_{i\in J}$ de voisinages de l'origine de Y_i, on a

$$\exists V \in \mathscr{V}(a),\ \exists A \in \Phi,\ \forall x \in V,\ \forall h \in A,\ h_i(x) - f_i(x) \in W_i\ .$$

Corollaire II.1.10. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique X dans le produit Y d'une famille $\{Y_i\}_{i\in J}$ d'espaces vectoriels topologiques sur le même corps. Une condition nécessaire et suffisante pour que f_n converge localement vers f au point a est que, pour tout indice i, la suite $\omega_i \circ f_n$ converge localement vers $\omega_i \circ f$ au point a.*

Démonstration. On prend $H(X,Y) = Y^X$ (resp. $H(X,Y_i) = Y_i^X$) et on applique la proposition **II.1.9** au filtre des sections de (f_n). □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

2. — Applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique

On désigne par $\mathbb{k}$ le corps des réels ou le corps des complexes ; tous les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe sont des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels.

Pour $\alpha > 0$, on note $B_{\mathbb{k}}(\alpha)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon α dans $\mathbb{k}$.

Proposition II.2.1. *Soit $H(X,E)$ (resp. $H(X,F)$) un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace vectoriel topologique E (resp. F). Soit ϑ une application linéaire continue de E dans F telle que, pour tout $h \in H(X,E)$, $\vartheta \circ h \in H(X,F)$, et soit ϑ^* l'application ainsi définie de $H(X,E)$ dans $H(X,F)$. L'image par ϑ^* d'un filtre convergeant localement vers f au point a est un filtre convergeant localement vers $\vartheta \circ f$ au point a.*

Démonstration. Une application linéaire continue étant uniformément continue, on applique le **(i)** de la proposition **II.1.4.v**. □

Corollaire II.2.2. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique X dans un espace vectoriel topologique E et soit ϑ une application linéaire continue de E dans un espace vectoriel topologique F. Si (f_n) converge localement vers f au point a, alors la suite $(\vartheta \circ f_n)$ converge localement vers $\vartheta \circ f$ au point a.*

Démonstration. On prend $H(X,E) = E^X$, $H(X,F) = F^X$ et on applique la proposition **II.2.1** au filtre des sections de (f_n). □

Application II.2.3. Soit E un espace vectoriel topologique et soient λ et μ deux scalaires. Étant donné un espace vectoriel $H(X,E)$ d'applications d'un espace topologique X dans E, si deux filtres Φ_1 et Φ_2 sur $H(X,E)$ convergent localement au point a, respectivement vers f_1 et f_2, alors le filtre $\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2$ engendré par les parties $\lambda A + \mu B$ avec $A \in \Phi_1$ et $B \in \Phi_2$, converge localement vers $\lambda f_1 + \mu f_2$ au point a.

Démonstration. Soit s l'application de combinaison linéaire dans E :

$$s \,:\, E \times E \longrightarrow E \quad (y,z) \mapsto \lambda\, y + \mu\, z$$

et ς l'application de combinaison linéaire dans $H(X,E)$:

$$\varsigma \,:\, H(X,E) \times H(X,E) \longrightarrow H(X,E) \quad (h,k) \mapsto \lambda h + \mu k\,.$$

En identifiant $H(X,E) \times H(X,E)$ avec $H(X, E \times E)$, il vient que $\varsigma(h,k) = s \circ (h,k)$ pour tout $(h,k) \in H(X,E) \times H(X,E)$, c'est-à-dire $\varsigma = s^*$. Si les filtres Φ_1 et Φ_2 sur $H(X,E)$ convergent localement au point a respectivement vers f_1 et f_2, alors le filtre produit $\Phi_1 \times \Phi_2$ s'identifie à un filtre sur $H(X, E \times E)$ convergeant localement au point a vers (f_1, f_2) [Proposition **II.1.6.v**]. L'application s étant linéaire et continue, la proposition **II.2.1** entraîne que l'image par $\varsigma = s^*$ du filtre $\Phi_1 \times \Phi_2$ converge localement au point a vers $s*(f_1, f_2) = \lambda f_1 + \mu f_2$. □

Corollaire II.2.4. *Soient (f_n) et (g_n) deux suites d'applications d'un espace topologique X dans un espace vectoriel topologique E et soient λ et μ deux scalaires. Si les suites (f_n) et (g_n) convergent localement respectivement vers f et g au point a, alors la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge localement vers $\lambda f + \mu g$ au point a.*

Démonstration. On prend $H(X,E) = E^X$ et on applique le résultat précédent aux filtres des sections de (f_n) et (g_n). □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Cette compatibilité de la combinaison linéaire avec la convergence locale aurait pu être démontrée directement, sans recours à la proposition **II.2.1** ; la présente démarche a été choisie pour rendre manifeste le rôle clé joué par la continuité uniforme de l'application s. Il en va tout autrement pour le produit par un scalaire.

On considère les applications

$$p : \mathbb{k} \times E \longrightarrow E \quad (\lambda, y) \mapsto \lambda y \qquad \text{et} \qquad \pi : \mathbb{k} \times E^X \longrightarrow E^X \quad (\lambda, h) \mapsto \lambda h.$$

En identifiant le produit $\mathbb{k} \times E^X$ avec le sous-espace des applications de X dans $\mathbb{k} \times E$ dont la première composante est constante, il vient que $\pi(\lambda, h) = p \circ (\lambda \times h)$ pour tout $(\lambda, h) \in \mathbb{k} \times E^X$, c'est-à-dire $\pi = p^*$. L'application p étant bilinéaire, on ne peut pas utiliser la proposition **II.2.1** et, si E n'est pas réduit à $\{0\}$, l'application p n'étant pas uniformément continue, on ne peut pas utiliser le **(i)** de la proposition **II.1.4.v**. On ne peut pas non plus utiliser le **(ii)** de cette proposition, faute d'une hypothèse de continuité sur les applications éléments de E^X. De fait, le produit π *n'est pas*, en général, compatible avec la convergence dans $\mathbb{k}$ et la convergence locale dans E^X : par exemple, si X est compact, la convergence locale coïncide avec la convergence uniforme [Proposition **I.2.5**] et on sait que le produit π n'est pas, en général, continu lorsque E^X est muni de la topologie de la convergence uniforme.

Remarque II.2.5. On pourrait se restreindre aux espaces d'applications continues en un point a, ce qui permettrait d'utiliser le **(ii)** de la proposition **II.1.4.v**. Ce n'est pas satisfaisant car cette hypothèse de continuité n'est pas nécessaire : on peut en effet établir la compatibilité du produit avec la convergence locale, sans hypothèse de continuité, pour tout espace d'applications localement $\mathscr{T}$-bornées au point a selon la définition suivante :

Définition II.2.6. *On rappelle qu'un sous-ensemble A d'un espace vectoriel topologique E muni de la topologie $\mathscr{T}$ est* borné *si tout voisinage W de l'origine absorbe A, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda A \subset W$ pour tout $\lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha)$* [Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*]. *On précisera « $\mathscr{T}$-borné » pour qu'il n'y ait pas de confusion avec « borné » pour une métrique rendant E métrisable.*

Une application f d'un espace topologique dans l'espace vectoriel topologique E sera dite localement $\mathscr{T}$-bornée au point *a s'il existe un voisinage V de a dont l'image par f est une partie $\mathscr{T}$-bornée de E, c'est-à-dire*

$$\exists V \in \mathscr{V}_X(a), \forall W \in \mathscr{V}_E(0), \exists \alpha > 0, \forall x \in V, \forall \lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha), \lambda f(x) \in W .$$

Exemple II.2.7. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie produit $\mathscr{T}$; une base de voisinages de l'origine est formée d'intersections finies de voisinages élémentaires

$$W_{N,\varepsilon} = \{x = (x_n) \mid |x_N| < \varepsilon\} \quad \text{pour } N \in \mathbb{N} \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Pour tout voisinage V de l'origine, il existe une famille finie $\boldsymbol{I}$ d'indices i telle que $W = \cap_{i \in \boldsymbol{I}} W_{i,\varepsilon_i} \subset V$. Si N n'appartient pas à $\boldsymbol{I}$, pour tout $\varepsilon > 0$, $W_{N,\varepsilon}$ n'absorbe pas W, donc n'absorbe pas V. V n'est alors pas $\mathscr{T}$-borné, ce qui entraîne que l'identité de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement $\mathscr{T}$-bornée à l'origine.
Par contre, l'identité est bornée pour la distance d définie par

$$d(x, y) = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} \min\{1, |x_n - y_n|\}$$

qui est majorée par 1 et qui rend $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ métrisable [*cf.* Proposition **II.1.6**].

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Proposition II.2.8. *Pour tout sous-ensemble A d'un espace E normé, il y a équivalence entre « A est $\mathscr{T}$-borné » et « A est borné » pour la métrique définie par la norme de E (c'est-à-dire inclus dans une boule fermée $B_E(r)$ de rayon r et de centre l'origine).*

Démonstration. On utilise le fait que dans un espace normé, les boules de centre 0 sont homothétiques, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha > 0$ et tout $r \geqslant 0$, on a $\alpha\, B_E(r) = B_E(\alpha r)$ (ce qui n'est pas toujours vrai dans un espace métrisable, comme dans l'exemple **II.2.7**).

Si A est $\mathscr{T}$-borné, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha A \subset B_E(\varepsilon)$, c'est-à-dire $A \subset 1/\alpha\, B_E(\varepsilon) = B_E(\varepsilon/\alpha)$, ce qui signifie que A est borné.

Réciproquement, si A est borné, il existe $r > 0$ tel que $A \subset B_E(r)$. Pour tout voisinage W de 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_E(\varepsilon) \subset W$. On a alors, pour tout $\lambda \in B_E(\varepsilon/r)$,

$$\lambda A \subset \lambda B_E(r) \subset B_E(|\lambda|\, r) \subset B_E(\varepsilon) \subset W,$$

ce qui signifie que A est $\mathscr{T}$-borné. □

Les deux conditions suffisantes qui ont été évoquées dans la remarque **II.2.5** sont étrangères l'une à l'autre : une application localement $\mathscr{T}$-bornée en un point n'est pas nécessairement continue en ce point (évident) et une application continue en un point n'est pas nécessairement localement $\mathscr{T}$-bornée en ce point [*cf.* Exemple **II.2.7**].

Pour donner un traitement uniforme du problème, nous proposons une condition nouvelle [Définition **II.2.9**], plus faible que les deux précédentes, qui est nécessaire et suffisante pour assurer la compatibilité avec la convergence locale du produit d'un vecteur par un scalaire [Application **II.2.14**].

L'importance de cette condition dans la théorie de la convergence locale se mesure au fait qu'elle permet d'utiliser la propriété que tout voisinage contient un voisinage équilibré [12] (propriété non exploitée jusqu'ici) pour assurer la compatibilité du produit avec la convergence locale des applications induites par une application bilinéaire continue quelconque [Proposition **II.2.12**], bien qu'elle n'ait été conçue que pour assurer la compatibilité du produit p avec la convergence locale.

Définition II.2.9. *Une application f d'un espace topologique X dans un espace vectoriel topologique E est* $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point *a si, quel que soit le voisinage W de l'origine dans E, il existe un voisinage V de a et un réel $\alpha > 0$ tels que l'on ait $\lambda f(V) \subset W$ pour tout $\lambda \in \mathscr{B}_{\mathbb{k}}(\alpha)$, c'est-à-dire*

$$\forall W \in \mathscr{V}_E(0)\,, \exists V \in \mathscr{V}_X(a)\,, \exists \alpha > 0, \forall x \in V, \forall \lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha), \lambda f(x) \in W\,.$$

(La définition **II.2.9** diffère de la définition **II.2.6** par l'interversion des deux premières quantifications)

Proposition II.2.10. *Une application localement $\mathscr{T}$-bornée au point a est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a. La réciproque est vraie si l'origine de E a au moins un voisinage $\mathscr{T}$-borné, par exemple si E est un espace normé.*

Démonstration. **1)** Si l'application f est localement $\mathscr{T}$-bornée point a, on a

$$\exists V \in \mathscr{V}_X(a)\,, \forall W \in \mathscr{V}_E(0)\,, \exists \alpha > 0, \forall x \in V, \forall \lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha), \lambda f(x) \in W;$$

elle est donc $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a, V étant indépendant de W.

(12) Un voisinage W est dit équilibré si c'est un voisinage de l'origine tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ vérifiant $|\lambda| \leqslant 1$, $\lambda W \subset W$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

2) Si f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a et si U est un voisinage $\mathscr{T}$-borné de l'origine, il existe un voisinage V de a et un réel $\alpha > 0$ tels que l'on ait $\alpha f(V) \subset U$, c'est-à-dire $f(V) \subset \alpha^{-1}U$, ce qui entraîne que $f(V)$ est $\mathscr{T}$-borné comme sous-ensemble d'un ensemble $\mathscr{T}$-borné.
Si E est normé, la proposition **II.2.8** entraîne que toute boule de rayon fini et de centre l'origine est $\mathscr{T}$-bornée, donc que l'origine admet un voisinage $\mathscr{T}$-borné. □

Proposition II.2.11. *Une application continue au point a est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale en ce point.*

Démonstration. Soit W un voisinage de 0 dans E et W' un voisinage équilibré de 0 dans E tels que $W' + W' \subset W$.
L'application f étant continue au point a, il existe un voisinage V de a tel que $f(x) - f(a) \in W'$ pour tout $x \in V$.
Le voisinage W' étant absorbant, il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda f(a) \in W'$ si $\lambda \in B_{\boldsymbol{K}}(\alpha)$.
En écrivant $\lambda f(x) = \lambda\left(f(x) - f(a)\right) + \lambda f(a)$, on a alors $\lambda f(x) \in \lambda W' + W'$, donc $\lambda f(x) \in W$ pour $x \in V$ et $\lambda \in B_{\boldsymbol{K}}(\min\{1, \alpha\})$.
Il en résulte que f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a. □

Proposition II.2.12. *$H(X, E_1)$, $H(X, E_2)$ et $H(X, F)$ désignant respectivement des espaces vectoriels d'applications d'un espace topologique X dans des espaces vectoriels topologiques E_1, E_2 et F, soit B une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F telle que $B \circ (h_1, h_2)$ appartienne à $H(X, F)$ pour tout $(h_1, h_2) \in H(X, E_1) \times H(X, E_2)$.*

(i) *Soit $f_1 \in H(X, E_1)$ et soit Φ_2 un filtre sur $H(X, E_2)$ convergeant localement au point a vers une application f_2. Si f_1 est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a, alors le filtre image de $\{f_1\} \times \Phi_2$ par B converge localement vers $B(f_1, f_2)$ au point a.*

(ii) *Soit Φ_1 (resp. Φ_2) un filtre sur $H(X, E_1)$ (resp. $H(X, E_2)$) convergeant localement au point a vers une application f_1 (resp. f_2). Si f_1 et f_2 sont $\mathscr{T}$-bornées pour la convergence locale au point a, alors le filtre image de $\Phi_1 \times \Phi_2$ par B converge localement vers $B(f_1, f_2)$ au point a.*

Démonstration. **(i)** Soit W un voisinage de l'origine dans F. L'application B étant continue, il existe des voisinages équilibrés U_1 et U_2 de l'origine dans E_1 et E_2 tels que $B(U_1 \times U_2) \subset W$.
L'application f_1 étant $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a, il existe un voisinage V' de a et un scalaire $\alpha > 0$, que l'on peut supposer inférieur à 1, tels que l'on ait $\alpha f_1(x) \in U_1$ pour $x \in V'$.
Un tel α étant fixé, le filtre Φ_2 convergeant localement au point a vers f_2, il existe un voisinage V'' de a et un élément $A_2 \in \Phi_2$ tels que l'on ait $h_2(x) - f_2(x) \in \alpha U_2$ pour $x \in V''$ et $h_2 \in A_2$.
En posant $V = V' \cap V''$, il en résulte que l'on a, pour $x \in V$ et $h_2 \in A_2$,

$$B(f_1(x), h_2(x)) - B(f_1(x), f_2(x)) = B\left(\alpha f_1(x), \alpha^{-1}\left(h_2(x) - f_2(x)\right)\right) \in W,$$

donc le filtre image par B de $\{f_1\} \times \Phi_2$ converge localement vers $B(f_1, f_2)$ au point a.
(ii) Soit W un voisinage de l'origine dans F. On fixe un voisinage W' de l'origine dans F tel que $W' + W' + W' \subset W$; l'application B étant continue, il existe des voisinages équilibrés U_1 et U_2 de l'origine dans E_1 et E_2 tels que $B(U_1, U_2) \subset W'$.
Pour $h_1 \in H(X, E_1)$, $h_2 \in H(X, E_2)$ et $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} B(h_1(x), h_2(x) - B(f_1(x), f_2(x)) = \quad & B(f_1(x), h_2(x) - f_2(x)) \\ & + B(h_1(x) - f_1(x), h_2(x) - f_2(x)) \\ & + B(h_1(x) - f_1(x), f_2(x)) \,. \end{aligned} \tag{1}$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

L'application f_1 (resp. f_2) étant $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a, il résulte de **(i)** qu'il existe un voisinage V_1 (resp. V_2) de a, un scalaire $\alpha_1 \in]0,1]$ (resp. $\alpha_2 \in]0,1]$) et un élément $A_2 \in \Phi_2$ (resp. $A_1 \in \Phi_1$) tels que l'on ait

$$h_2(x)-f_2(x)\in\alpha_1 U_2 \text{ et } B(f_1(x),h_2(x)-f_2(x))\in W' \text{ pour } x\in V_1 \text{ et } h_2\in A_2, \quad (2)$$
$$h_1(x)-f_1(x)\in\alpha_2 U_1 \text{ et } B(h_1(x)-f_1(x),h_2(x))\in W' \text{ pour } x\in V_2 \text{ et } h_1\in A_1. \quad (3)$$

Compte tenu des conditions imposées à α_1 et α_2, on a

$$h_1(x) - f_1(x) \in \alpha_2 U_1 \subset U_1 \text{ et } h_2(x) - f_2(x) \in \alpha_1 U_2 \subset U_2$$

pour $x \in V_1 \cap V_2$, $h_1 \in A_1$ et $h_2 \in A_2$, donc

$$B(h_1(x) - f_1(x), h_2(x) - f_2(x)) \in W' \quad \text{pour } x \in V_1 \cap V_2, h_1 \in A_1 \text{ et } H_2 \in A_2. \quad (4)$$

Il résulte de (1), (2), (3) et (4) que, pour $x \in V_1 \cap V_2$, $h_1 \in A_1$ et $h_2 \in A_2$,

$$B(h_1(x), h_2(x)) - B(f_1(x), f_2(x)) \in W' + W' + W' \subset W,$$

ce qui entraîne que le filtre image de $\Phi_1 \times \Phi_2$ par B converge localement vers $B(f_1, f_2)$ au point a. □

Remarque. L'énoncé **(i)** ne suppose pas que f_2 soit $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a ; le résultat **(i)** n'est donc pas un corollaire de **(ii)**.

Corollaire II.2.13. *Soit X un espace topologique, soient E_1, E_2 et F des espaces vectoriels topologiques et B une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F.*

(i) *Soit f une application de X dans E_1 et soit (g_n) une suite d'applications de X dans E_2 convergeant localement vers g au point a.*
Si f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a, la suite $(B(f, g_n))$ converge localement vers $B(f, g)$ au point a.

(ii) *Soit (f_n) (resp. (g_n)) une suite d'applications de X dans E_1 (resp. E_2) convergeant localement vers f (resp. g) au point a.*
Si f (resp. g) est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a, la suite $(B(f_n, g_n))$ converge localement vers $B(f, g)$ au point a.

Démonstration. On prend $H(X, E_1) = E_1^X$, $H(X, E_2) = E_2^X$, $H(X, F) = F^X$, on applique la proposition **II.2.12** aux filtres des sections de (f_n) et de (g_n). □

Application II.2.14. Soit $H(X, E)$ un espace vectoriel d'applications d'un espace topologique X dans un espace vectoriel topologique E et soit Φ un filtre sur $H(X, E)$ convergeant localement vers f au point a. Pour que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{k}$ et quel que soit le filtre Θ sur $\mathbb{k}$ convergeant vers λ, le filtre $\pi(\Theta \times \Phi)$ converge localement vers λf au point a, il faut et il suffit que f soit $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a.

Démonstration. Condition nécessaire. La propriété de convergence locale de $\pi(\Theta \times \Phi)$ vers λf doit, en particulier, être vérifiée pour $\lambda = 0$ et pour le filtre $\Theta = \mathscr{V}_{\mathbb{k}}(0)$ des voisinages de 0 dans $\mathbb{k}$. Nous allons montrer que la convergence locale vers 0 au point a du filtre $\pi(\mathscr{V}_{\mathbb{k}}(0) \times \Phi)$ entraîne que f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a.

Soit W un voisinage de 0 dans E et soit W' un voisinage équilibré de 0 dans E tel que $W' + W' \subset W$. Le filtre Φ convergeant localement vers f au point a, il existe un voisinage V' de a et un élément A' de Φ tels que l'on ait $f(x) - h(x) \in W'$ pour $x \in V'$ et $h \in A'$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Le filtre $\pi(\mathscr{V}_{\mathbb{k}}(0) \times \Phi)$ convergeant localement vers 0 au point a, il existe un voisinage V'' de a, un réel $\alpha \in]0,1]$ et un élément A'' de Φ tels que l'on ait $\lambda h(x) \in W'$ pour $x \in V''$, $\lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha)$ et $h \in A''$.
Le voisinage W' étant équilibré, en écrivant

$$\lambda f(x) = \lambda(f(x) - h(x)) + \lambda h(x),$$

avec $h \in A' \cap A''$, il en résulte que l'on a

$$\lambda f(x) \in \lambda W' + W' \subset W \quad \text{pour } x \in V' \cap V'' \text{ et } \lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha),$$

ce qui démontre que f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a.

Condition suffisante. L'application

$$p : \mathbb{k} \times E \to E \quad (\lambda, y) \mapsto \lambda y$$

est bilinéaire et continue. En identifiant $\mathbb{k} \times H(X,E)$ avec le sous-espace des applications de X dans $\mathbb{k} \times E$ dont la première composante est constante et la deuxième appartient à $H(X,E)$, on a $\pi = p*$. On applique alors la proposition **II.2.12**. □

Proposition II.2.15. *L'ensemble $BL_a(X,E)$ des applications d'un espace topologique X dans un espace vectoriel topologique E qui sont $\mathscr{T}$-bornées pour la convergence locale au point a est un sous-espace vectoriel de E^X et c'est le plus grand sous-espace vectoriel de E^X pour lequel la convergence locale au point a soit compatible avec les deux opérations de l'espace vectoriel E^X.*

Démonstration. a) Stabilité pour la somme. Soit W un voisinage de 0 dans E et soit W' un voisinage de 0 dans E tel que $W' + W' \subset W$.
Si h_1 et h_2 sont $\mathscr{T}$-bornées pour la convergence locale au point a, il existe un voisinage V_1 (resp. V_2) de a et un réel $\alpha_1 > 0$ (resp.$\alpha_2 > 0$) tels que $\lambda h_1(V_1) \subset W'$ (resp. $\lambda h_2(V_2) \subset W'$) pour tout $\lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha_1)$ (resp. $\lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha_2)$). En posant $V = V_1 \cap V_2$ et $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, on a $\lambda(h_1 + h_2)(V) \subset W' + W' \subset W$ pour tout $\lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha)$, ce qui démontre que l'application $h_1 + h_2$ est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale.

b) Stabilité pour le produit par un scalaire. Soit W un voisinage de 0 dans E. Si h est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a, il existe un voisinage V de a et un réel $\alpha > 0$ tels que $\lambda h(V) \subset W$ pour tout $\lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha)$. Si μ est un scalaire non nul, on a alors $\lambda(\mu h)(V) \subset W$ si $|\lambda| < \alpha / |\mu|$, donc μh est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a.

c) Compatibilité des opérations avec la convergence locale. La proposition **II.2.1** assure que la somme est compatible avec la convergence locale au point a. L'application **II.2.14** assure que, les éléments de $BL_a(X,E)$ étant $\mathscr{T}$-bornés pour la convergence locale au point a, le produit par un scalaire est compatible avec la convergence locale au point a.

d) Maximalité de $BL_a(X,E)$. Soit H un sous-espace vectoriel de E^X dont les opérations sont compatibles avec la convergence locale au point a. Quelle que soit l'application f élément de H, le filtre de toutes les parties de H contenant f converge localement vers f au point a [Proposition **I.4.1**] ; le produit d'un élément de H par un scalaire étant compatible avec la convergence locale au point a, il en résulte que f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a [Application **II.2.14**]. On a donc $H \subset BL_a(X,E)$. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3. — Critères de convergence locale

Soit $H(X,Y)$ un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique Y. On peut formuler un critère de Cauchy pour la convergence locale en un point :

Théorème II.3.1. (**Condition de Cauchy locale**). *Sur un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y, une condition nécessaire pour qu'un filtre Φ converge localement vers f au point a est qu'il vérifie la condition*

(C_a) *Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(h(x),k(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$ et tout $(h,k) \in A \times A$.*

Cette condition est suffisante si Φ converge simplement vers f sur un voisinage de a.

Démonstration. Condition nécessaire. Soit $\varepsilon > 0$. Si le filtre Φ converge localement vers f au point a, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(f(x),h(x)) = d(h(x),f(x)) < \varepsilon/2$ pour $x \in V$ et $h \in A$; il en résulte que

$$\forall x \in V, \forall (h,k) \in A \times A, d(h(x),k(x)) < d(h(x),f(x)) + d(f(x),k(x)) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Le filtre Φ vérifie donc **(C_a)**.

Condition suffisante. Soit $\varepsilon > 0$. Le filtre Φ convergeant simplement vers f sur un voisinage W de a, quel que soit $x \in W$, il existe un élément $B_x \in \Phi$ tel que l'on ait $d(k(x),f(x)) < \varepsilon/2$ pour tout $k \in B_x$.
Si de plus le filtre vérifie la condition **(C_a)**, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(h(x),k(x)) < \varepsilon/2$ quels que soient $x \in V$ et $(h,k) \in A \times A$.
Alors, en prenant $k \in A \cap B_x$, on a $d(h(x),k(x)) < \varepsilon/2$ et $d(k(x),f(x)) < \varepsilon/2$.
Il en résulte que, pour tout $x \in V \cap W$ et tout $h \in A$, on a

$$d(h(x),f(x)) < d(h(x),k(x)) + d(k(x),f(x)) < \varepsilon,$$

ce qui démontre que le filtre Φ converge localement vers f au point a. □

Corollaire II.3.2. *Soit Φ un filtre sur l'espace Y^X de toutes les applications de l'espace topologique X dans l'espace métrique complet Y. Si Φ vérifie la condition **(C_a)** en tout point de X, alors le filtre Φ converge localement sur X.*

Démonstration. En faisant $x = a$ dans la condition **(C_a)**, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \Phi,\ \forall (h,k) \in A,\ d(h(a),k(a)) < \varepsilon.$$

Le filtre $\Phi_a = \mathrm{ev}_a(\Phi)$ constitué des ensembles $\mathrm{ev}_a(A) = \{h(a) \mid h \in A\}$ est donc un filtre de Cauchy [13] sur l'espace métrique complet Y ; il converge alors vers un élément de Y noté $f(a)$. La fonction f ainsi définie sur X est limite simple du filtre Φ. La condition suffisante du théorème **II.3.1** montre que Φ converge localement vers f sur X. □

(13) On dit que le filtre $\mathscr{F}$ sur l'espace uniforme Y (resp. espace vectoriel topologique, resp. espace métrique) est un *filtre de Cauchy* si on a

$$\begin{aligned} &\forall U \in \mathscr{U},\ \exists F \in \mathscr{F},\ \forall (y,z) \in F \times F,\ (y,z) \in U, \\ (\text{resp.}\quad &\forall V \in \mathscr{V}_Y(0),\ \exists F \in \mathscr{F},\ \forall (y,z) \in F \times F,\ y - z \in V), \\ (\text{resp.}\quad &\forall \varepsilon > 0,\ \exists F \in \mathscr{F},\ \forall (y,z) \in F \times F,\ d(y,z) < \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Si Φ est le filtre des sections d'une suite (x_n), on dit que la suite est de Cauchy, la définition se traduit par

$$\forall U \in \mathscr{U},\ \exists N \in N,\ \forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N,\ (x_p, x_q) \in U.$$

Un *espace complet* est un espace sur lequel tout filtre de Cauchy est convergent.
Lorsque Y est un espace métrique complet, la définition coïncide avec la définition classique d'un espace métrique complet : espace tel que toute suite de Cauchy est convergente. En effet, on a la

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Corollaire II.3.3. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. Une condition nécessaire pour que (f_n) converge localement vers f au point a est qu'elle vérifie la condition de Cauchy locale suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait $d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$, tout $p \geqslant N$ et tout $q \geqslant N$.*

Si la suite (f_n) vérifie cette condition en tout point a de X et converge simplement vers f, alors elle converge localement vers f sur X.

Démonstration. On applique le théorème **II.3.1** au filtre des sections de (f_n). □

Un deuxième type de critère de convergence locale résulte de l'exploitation de conditions particulières vérifiées par un filtre ou par une suite. Par exemple, on a montré [Théorème **I.3.3**] que la convergence locale au point a vers une application continue en ce point est équivalente à la convergence continue au point a. Cela entraîne que la définition de la convergence continue [Définition **I.3.1**] peut être utilisée comme critère de convergence locale :

Théorème II.3.4. *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique Y. Si l'application f est continue au point a, une condition nécessaire et suffisante pour que Φ converge localement vers f au point a est que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(h(x), f(a)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$ et tout $h \in A$.*

Corollaire II.3.5. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. Si l'application f est continue au point a, une condition nécessaire et suffisante pour que (f_n) converge localement vers f au point a est que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tel que l'on ait $d(f_n(x), f(a)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$ et tout $n \geqslant N$.*

Démonstration. On applique le théorème **II.3.4** au filtre des sections de (f_n). □

Proposition. *Dans un espace métrique Y sur lequel toute suite de Cauchy est convergente, tout filtre de Cauchy est convergent.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ un filtre de Cauchy sur Y. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists A_n \in \mathscr{F},\ \forall (y_n, z_n) \in A_n \times A_n,\ d(y_n, z_n) < \frac{1}{n}\,.$$

Pour tout n, l'ensemble $A'_n = \cap_{1 \leqslant p \leqslant n} A_p$, intersection finie d'éléments de $\mathscr{F}$, est un élément de $\mathscr{F}$. Soit (x_n) une suite d'éléments de Y telle que, pour tout n, x_n soit un élément de A'_n. On a alors

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, x_m) < \max\{1/m, 1/n\}\,,$$

ce qui entraîne que la suite (x_n) est de Cauchy. Cette suite est alors convergente vers un élément x de Y, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ d(x_n, x) < \varepsilon/2,$$

ce qui entraîne que, pour tout $y \in A_n$ avec $n > \max\{N, 2/\varepsilon\}$, on a

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui signifie que le filtre $\mathscr{F}$ converge vers x. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

On ne sait pas nécessairement que la limite est continue – c'est parfois ce que l'on cherche à démontrer [*cf.* Théorème **II.4.1**]. Dans ce cas, l'existence de « suffisamment » d'applications continues dans un filtre permet d'avoir recours au critère suivant :

Théorème II.3.6. *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. On suppose que tout $A \in \Phi$ contient au moins une application continue au point a.*
Une condition nécessaire pour que Φ converge localement vers f au point a est que Φ vérifie la condition

(E$_a$) *Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(h(x), h(a)) < \varepsilon$ pour tout $x \in U$ et tout $h \in A$.*

Cette condition est suffisante si Φ converge simplement vers f au voisinage de a.

Démonstration. Condition nécessaire. Soit $\varepsilon > 0$.
Si le filtre Φ converge localement au point a, il vérifie la condition de Cauchy locale au point a : il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(h(x), k(x)) < \varepsilon/3$ pour tout $x \in V$ et tout $(h, k) \in A \times A$.
Par hypothèse, il existe une application k appartenant à A et continue au point a . La continuité de k entraîne l'existence d'un voisinage W de a tel que l'on ait $d(k(x), k(a)) < \varepsilon/3$ pour tout $x \in W$; l'appartenance de k à A entraîne $d(h(a), k(a)) < \varepsilon/3$ pour tout $h \in A$.
On a donc, quels que soient $h \in A$ et $x \in U = V \cap W$,

$$d(h(x), k(x)) < \varepsilon/3, \quad d(k(x), k(a)) < \varepsilon/3, \quad d(k(a), h(a)) = d(h(a), k(a)) < \varepsilon/3,$$

ce qui entraîne $d(h(x), h(a)) < \varepsilon$ et démontre que Φ vérifie **(E$_a$)**.

Condition suffisante. Soit $\varepsilon > 0$.
Si le filtre Φ converge simplement vers f au voisinage de a, il vérifie en particulier la condition de Cauchy pour la convergence simple au point a : il existe un élément B de Φ tel que l'on ait $d((h(a), k(a)) < \varepsilon/3$ pour $(h, k) \in B \times B$.
Si de plus le filtre Φ vérifie la condition **(E$_a$)**, il existe un voisinage V de a et un élément A' de Φ tels que l'on ait $d(h(x), h(a) < \varepsilon/3$ pour $x \in V$ et $h \in A'$.
On a donc, quels que soient $x \in V$ et $(h, k) \in A \times A$ avec $A = A' \cap B$,

$$d(h(x), h(a)) < \varepsilon/3, \quad d(h(a), k(a)) < \varepsilon/3, \quad d(k(a), k(x)) = d(k(x), k(a)) < \varepsilon/3,$$

ce qui entraîne $d(h(x), k(x)) < \varepsilon$, ainsi Φ vérifie la condition de Cauchy **(C$_a$)**. Le filtre convergeant simplement vers f au voisinage de a, le théorème **II.3.1** entraîne qu'il converge localement vers f au point a. □

Corollaire II.3.7. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique Y. Si (f_n) converge simplement vers f et si les applications f_n sont continues au point a, une condition nécessaire et suffisante pour que (f_n) converge localement vers f est que les applications f_n soient équicontinues au point a.*

Démonstration. Le théorème **II.3.6** appliqué au filtre des sections de (f_n) entraîne qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (f_n) converge localement vers f au point a est qu'elle vérifie la condition

(E$_a$) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $n \geqslant N$.

Si les fonctions f_n sont équicontinues au point a, la condition **(E$_a$)** est vérifiée avec $N = 0$.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2025

Réciproquement, si $(\mathbf{E}_a)$ est vérifiée, soient N et V associés à ε par cette condition. Pour $N > 0$, la famille finie $\{f_n \mid n < N\}$ d'applications continues au point a est équicontinue en ce point, il existe alors un voisinage W de a tel que l'on ait $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ pour $x \in W$ et $n < N$. On a donc $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V \cap W$ et $n \in \mathbb{N}$, ce qui démontre l'équicontinuité des applications f_n au point a. □

Exemple II.3.8. Si X et Y sont métriques, toute suite d'applications lipschitziennes de rapport k, convergeant simplement vers f, converge localement vers f sur X.

Démonstration. Les applications f_n sont équicontinues en tout point de X. □

Certains critères sont réservés aux suites parce qu'il dépendent des propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$:

Théorème II.3.9. *Si l'application f d'un espace topologique dans un espace métrique Y, est continue au point a, une condition nécessaire pour qu'une suite (f_n) converge localement vers f au point a est que, quelle que soit la suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(a)$.*
Cette condition est suffisante si le point a admet un système dénombrable de voisinages.

Démonstration. Condition nécessaire. L'application f étant continue au point a, la convergence locale de (f_n) au point a est équivalente à la convergence continue de (f_n) au point a [Théorème **I.3.3**], donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N' tels que l'on ait $d(f_n(x), f(a)) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $n \geqslant N'$ [Corollaire **II.3.5**].
Par ailleurs, la suite (x_n) convergeant vers a, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geqslant N''$.
En posant $N = \max\{N', N''\}$, il vient alors que $d(f_n(x_n), f(a)) < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui démontre que la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Condition suffisante. On suppose que le point a admet un système dénombrable de voisinages et que, pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(a)$.
L'application f étant continue au point a, si la suite (f_n) ne convergeait pas localement vers f au point a, elle ne convergerait pas continûment au point a [Théorème **I.3.3**]. Il existerait donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout voisinage V de a et tout entier N, il existerait $x \in V$ et $n \geqslant N$ vérifiant $d(f_n(x), f(a)) \geqslant \varepsilon$.
Étant donné un système fondamental dénombrable de voisinages $\{V_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ de a, on pourrait alors construire une suite (x_k) vérifiant $x_k \in V_k$ pour tout k et une suite strictement croissante (x_{n_k}) d'entiers naturels, telles que $d(f_{n_k}(x_k), f(a)) \geqslant \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
La suite $(\hat{x}_n)$ définie par $\hat{x}_n = x_k$ si $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ convergerait vers a, la suite $(f_n(\hat{x}_n))$ donc vers $f(a)$, ce qui est en contradiction avec

$$d(f_{n_k}(\hat{x}_{n_k}), f(a)) = d(f_{n_k}(x_n), f(a)) \geqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$ □

Remarque II.3.10. Tous les énoncés précédents, à l'exception de l'exemple **II.3.8**, sont encore valables lorsqu'on remplace l'espace métrique Y par un espace uniforme [Remarque **II.5.2**]., en particulier un espace vectoriel topologique.
Par contre, l'hypothèse « métrique » est bien nécessaire dans le théorème suivant.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Théorème II.3.11. (**Théorème de Dini local**). *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique Y muni de la distance d_Y. Si*

- *la suite $(f_n(a))$ converge vers $f(a)$,*
- *sur un voisinage V_0 de a, la suite des fonctions numériques $d_Y(f_n, f)$ est décroissante,*
- *les applications f_n et f sont toutes continues au point a,*

alors la suite (f_n) converge localement vers f au point a.

Démonstration. La suite $(f_n(a))$ convergeant vers $f(a)$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que l'on ait $d_Y(f_N(a), f(a)) < \varepsilon$; f_N et f étant des fonctions continues au point a, il en résulte qu'il existe un voisinage V de a tel que l'on ait $d_Y(f_N(x), f(x)) < 2\varepsilon$ pour tout $x \in V$.
L'hypothèse de décroissance de la suite des fonctions $d_Y(f_n, f)$ entraîne alors que l'on a :

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leqslant d_Y(f_N(x), f(x)) < 2\varepsilon \quad \text{pour } x \in V \cap V_0 \text{ et } n \geqslant N,$$

donc (f_n) converge localement vers f au point a. □

Remarque. Le théorème classique de Dini en résulte : si la suite (f_n) converge simplement vers f, si la suite $(d_Y(f_n, f))$ est décroissante et si toutes les fonctions f_n et f sont continues, alors (f_n) converge localement sur X, ce qui entraîne que la suite converge uniformément sur tout compact [Théorème **I.2.3**] et, a fortiori, qu'elle converge uniformément si l'espace source est compact. La démonstration classique du théorème de Dini *n'est pas* une application de la notion de compacité.

4. — Propriétés de la limite d'un filtre convergeant localement

Théorème II.4.1. *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique. Si tout $A \in \Phi$ contient au moins une application continue au point a et si Φ converge localement vers f au point a, alors f est continue au point a.* (14)

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Le filtre Φ convergeant localement vers f au point a, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(h(x), f(x)) < \varepsilon/3$ pour $x \in V$ et $h \in A$.
Par hypothèse, il existe une application $k \in A$ continue au point a, c'est-à-dire telle qu'il existe un voisinage V' de a pour lequel on a $d(k(x), k(a)) < \varepsilon/3$ pour tout $x \in V'$. Cette application appartenant à A, on a aussi $d(k(x), f(x)) < \varepsilon/3$ pour tout $x \in V$.
On a alors, pour tout $x \in V \cap V'$,

$$d(k(x), f(x)) < \varepsilon/3, \quad d(k(a), k(x)) < \varepsilon/3 \quad d(f(a), k(a)) = d(k(a), f(a)) < \varepsilon/3,$$

ce qui entraîne $d(f(a), f(x)) < \varepsilon$ et montre ainsi que f est continue au point a. □

(14) **Remarque.** Sans hypothèse sur X, ce résultat est faux si Φ converge uniformément sur tout compact : en effet ce mode de convergence entraîne que la restriction de f à tout compact contenant a est continue au point a mais il reste à établir la continuité de f au point a. C'est sûrement le cas si la convergence uniforme sur tout compact entraîne la convergence locale, par exemple si X est localement compact [Proposition **I.2.5**], c'est encore le cas si une application continue sur tout compact est continue, c'est-à-dire si X est un k-espace [Kelley,1955], mais c'est en général faux sans hypothèse sur X.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Corollaire II.4.2. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique. Si les applications f_n sont continues au point a et si la suite (f_n) converge localement vers f au point a, alors f est continue au point a.*

Démonstration. On applique le théorème **II.4.1** au filtre des sections de (f_n). □

Théorème II.4.3. *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique. Si tout $A \in \Phi$ contient au moins une application localement bornée au point a et si Φ converge localement vers f au point a, alors f est localement bornée au point a.*

Démonstration. Le filtre Φ convergeant localement vers f au point a, en prenant $\varepsilon = 1$ dans l'expression de la convergence locale, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d_Y(h(x), f(x)) < 1$ pour tout $x \in V$ et tout $h \in A$. Par hypothèse, il existe une application k appartenant à A (donc telle que $d_Y(f(x), k(x)) < 1$ pour tout $x \in V$) et *localement bornée au point a* (c'est-à-dire telle qu'il existe un voisinage W de a et un réel $M > 0$ pour lesquels on a $d_Y(k(x), k(a)) \leqslant M$ pour tout $x \in W$). Par l'inégalité triangulaire il en résulte que, pour tout $x \in V \cap W$,

$$d_Y(f(x), f(a)) \leqslant d_Y(f(x), k(x)) + d_Y(k(x), k(a)) + d_Y(k(a), f(a)) \leqslant 2 + M$$

donc f est localement bornée au point a. □

Corollaire II.4.4. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique. Si les applications f_n sont localement bornées au point a et si la suite (f_n) converge localement au point a, alors f est localement bornée au point a.*

Démonstration. On applique le théorème **II.4.3** au filtre des sections de (f_n). □

Cas où l'espace but est un espace vectoriel topologique

Remarque II.4.5. En vertu de la remarque **II.5.2**, le théorème **II.4.1** et son corollaire **II.4.2** sont encore valides quand on remplace l'espace but métrique par un espace vectoriel topologique.

Ce n'est pas pareil pour le théorème **II.4.3** et son corollaire **II.4.4** : il ne suffit pas, pour avoir des résultats analogues, de remplacer « borné » par « $\mathscr{T}$-borné » lorsque l'espace but est un espace vectoriel topologique ; en effet, l'exemple suivant montre que la propriété d'être localement $\mathscr{T}$-bornée en un point ne passe pas à la limite pour la convergence locale, même si on renforce l'hypothèse de convergence locale en une hypothèse de convergence uniforme.

Exemple. Soit $X = Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles muni de la topologie produit $\mathscr{T}$ [*cf.* Exemple **II.2.7**]. Soit f_n l'application de X dans Y qui à toute suite $x_* = (x_k)$ associe la suite tronquée $x_*^n = (x_k^n)$ définie par $x_k^n = x_k$ si $k \leqslant n$ et $x_k^n = 0$ autrement. Chaque application f_n est localement $\mathscr{T}$-bornée à l'origine. La suite (f_n) converge uniformément vers l'identité de X, application qui n'est pas localement $\mathscr{T}$-bornée à l'origine.

Démonstration. Tout voisinage W de l'origine pour la topologie produit $\mathscr{T}$ contient un voisinage de la forme

$$W_{N,\varepsilon} = \left\{x_* = (x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall k \leqslant N, |x_k| < \varepsilon\right\} \ ;$$

en effet, comme W contient une intersection finie $\cap_{i \in \boldsymbol{I}} V_i$ de voisinages de la forme $V_{i,\varepsilon_i} = \left\{x_* = (x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid |x_i| < \varepsilon_i\right\}$, on prend $N = \max \boldsymbol{I}$ et $\varepsilon = \min \{\varepsilon_i \mid i \in \boldsymbol{I}\}$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

a) L'image du voisinage $W_{n,1}$ par l'application f_n est l'ensemble des suites $x_* = (x_k)$ telles que $|x_k| < 1$ si $k \leqslant n$ et $x_k = 0$ autrement. Cet ensemble est absorbable par tout $W_{N,\varepsilon}$, donc par tout voisinage W. L'application f_n est donc localement $\mathscr{T}$-bornée.

b) Dès que $n \geqslant N$, la suite $f_n(x_*) - x_*$, dont les n premiers éléments sont nuls, est un élément de $W_{N,\varepsilon}$ donc de W. La suite (f_n) converge donc uniformément vers l'application identité, qui n'est pas localement $\mathscr{T}$-bornée à l'origine [Exemple **II.2.7**]. □

Par contre, la propriété d'être $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale en un point [Définition **II.2.9**] passe à la limite pour la convergence locale :

Théorème II.4.6. *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique Y. Si tout $A \in \Phi$ contient au moins une application $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a et si Φ converge localement vers f au point a, alors f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a.*

Démonstration. Soit W un voisinage de 0 dans Y et soit W' un voisinage équilibré de 0 tel que $W' + W' \subset W$.
Le filtre Φ convergeant localement vers f au point a, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $h(x) - f(x) \in W'$ pour tout $x \in V$ et tout $h \in A$.
Par hypothèse, il existe une application k appartenant à A qui est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a, c'est-à-dire telle qu'il existe un voisinage V' de a et un $\alpha > 0$ pour lesquels on a $\lambda k(V') \subset W'$ pour tout $\lambda \in B_{\mathbb{k}}(\alpha)$.
Cette application appartenant à A, on a aussi $k(x) - f(x) \in W'$ pour tout $x \in V$.
De $\lambda f(x) = \lambda\,(f(x) - k(x)) + \lambda k(x)$, le voisinage W' étant équilibré, on tire : $\lambda f(x) \in W$ pour $x \in V \cap V'$ et $\lambda \in B_{\mathbb{k}}(\inf\{\alpha, 1\})$, ce qui démontre que f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a. □

Remarque. Ce théorème est, pour les applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique, une extension du théorème **II.4.3** qui est applicable à un espace normé, puisque la notion d'application $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale coïncide alors avec la notion d'application localement bornée en un point [Propositions **II.2.10** et **II.2.8**].

Corollaire II.4.7. *Soit (f_n) une suite d'applications d'un espace topologique dans un espace vectoriel topologique. Si les applications sont $\mathscr{T}$-bornées pour la convergence locale au point a et si (f_n) converge localement au point a, alors f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a.*

Démonstration. On applique le théorème **II.4.6** au filtre des sections de (f_n). □

Corollaire II.4.8. *Si Y est un espace vectoriel topologique, le sous-espace vectoriel $BL_a(X, Y)$ des applications $\mathscr{T}$-bornées pour la convergence locale au point a est fermé dans Y^X, en ce sens que, si un filtre sur Y^X a une base dans $BL_a(X, Y)$ et si ce filtre converge localement vers au point a, alors f appartient à $BL_a(X, Y)$.*

Démonstration. Un filtre ayant une base dans $BL_a(X, Y)$ est tel que tout élément de ce filtre contient au moins une application $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a. Le théorème **II.4.6** entraîne alors que f est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Cas où l'espace but est normé

Les propositions **II.2.8** et **II.2.10** indiquent que, dans ce cas, il y a identité entre « $\mathscr{T}$-borné » et « borné ».

Théorème II.4.9. *Soit Φ un filtre d'applications définies sur un ouvert Ω d'un espace normé E, à valeurs dans un espace normé F. Si le filtre Φ converge simplement vers f, s'il admet une base Φ_0 formée d'applications différentiables et si le filtre $D\Phi_0$, engendré par l'image de Φ_0 par l'application de différentiation, converge localement vers g au point a, alors Φ converge localement vers f au point a, l'application f est différentiable au point a et $Df(a) = g(a)$. Si, de plus, tout élément de Φ_0 contient (au moins) une application différentiable au point a, alors l'application f est strictement différentiable au point a.* (15)

Démonstration. **a)** Soit $r > 0$ fixé tel que la boule $B(a, r)$ de centre a et de rayon r soit contenue dans Ω.

Le filtre Φ, convergeant simplement au point a, vérifie la condition de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément A' de Φ tel que l'on ait

$$\|h(a) - k(a)\| < \varepsilon \quad \text{si } h \in A' \text{ et } k \in A'. \tag{1}$$

Le filtre $D\Phi_0$, convergeant localement au point a, vérifie la condition de Cauchy locale au point a : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0, r]$ et un élément A'' de Φ_0 tels que l'on ait

$$\|Dh(x) - Dk(x)\| < \varepsilon \quad \text{si } \|x - a\| < \alpha,\ h \in A'' \text{ et } k \in A''. \tag{2}$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $h - k$ entraîne alors que l'on a

$$\|h(x) - k(x) - (h(y) - k(y))\| < \varepsilon \|x - y\| \tag{3}$$

si $\|x - a\| < \alpha$, $\|y - a\| < \alpha$, $h \in A''$ et $k \in A''$.

Soit $A = A' \cap A''$. Les relations (1) et (3) entraînent que

$$\|h(x) - k(x)\| \leqslant \|h(a) - k(a)\| + \|(h(x) - k(x)) - (h(a) - k(a))\| < 2\varepsilon$$

si $\|x - a\| < \min\{1, \alpha\}$, $h \in A$ et $k \in A$. Le filtre Φ vérifie donc la condition de Cauchy locale au point a. Comme le filtre converge simplement sur Ω, il en résulte qu'il converge localement vers f au point a [Théorème **II.3.1**].

b) Étant donné une application différentiable h de Ω dans F, on note $\Delta_a h$ l'application définie sur $\Omega \times \Omega$ par :

$$\begin{cases} \Delta_a h(x, x) &= 0 \\ \Delta_a h(x, y) &= \dfrac{1}{\|x - y\|} (h(x) - h(y) - Dh(a)(x - y)) \quad \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Cette application est continue au point (a, a) si et seulement si l'application h est strictement différentiable au point a.

Le filtre $\Delta_a \Phi$ sur $F^{\Omega \times \Omega}$ engendré par les $\Delta_a A = \{\Delta_a h \mid h \in A\}$ avec $A \in \Phi_0$, converge simplement vers l'application Θ_a définie sur $\Omega \times \Omega$ par

$$\begin{cases} \Theta_a(x, x) &= 0 \\ \Theta_a(x, y) &= \dfrac{1}{\|x - y\|} (f(x) - f(y) - g(a)\ (x - y)) \quad \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

(15) L'application f est strictement différentiable au point a si elle est différentiable au point a et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a sur lequel l'application

$$x \mapsto f(x) - f(a) - Df(a)\ (x - a)$$

est ε-lipschitzienne [Cartan, *Calcul différentiel*].

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

et cette convergence est locale au point (a,a). On a en effet

$$\begin{aligned} \|\Delta_a h(x,x) - \Delta_a k(x,x)\| &= 0 \\ \text{et } \|\Delta_a h(x,y) - \Delta_a k(x,y)\| &\leqslant \frac{1}{\|x-y\|}\|h(x)-k(x)-(h(y)-k(y))\| \\ &\quad + \frac{1}{\|x-y\|}\|(Dh(a)-Dk(a))(x-y)\| \text{ si } x \neq y, \end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de (2) et (3), entraîne que l'on a

$$\|\Delta_a h(x,y) - \Delta_a k(x,y)\| < 2\varepsilon$$

si $\|x-a\| < \alpha, \|y-a\| < \alpha$ et $(\Delta_a h, \Delta_a k) \in \Delta_a A \times \Delta_a A$, c'est-à-dire la condition de Cauchy locale au point (a,a) ; comme le filtre converge simplement vers Θ_a, il en résulte qu'il converge localement vers Θ_a au point (a,a) [Théorème **II.3.1**].
Si tout élément A de Φ_0 contient au moins une application strictement différentiable au point a, alors $\Delta_a A$ contient au moins une application continue au point (a,a), donc le filtre $\Delta_a\Phi$ engendré par les $\Delta_a A$ vérifie les hypothèses du théorème **II.4.1**. L'application Θ_a est donc continue au point (a,a), ce qui exprime que $Df(a) = g(a)$ et que f est strictement différentiable au point a.

c) Étant donné une application différentiable h de Ω dans F, on note $\delta_a h$ l'application définie sur Ω par $\delta_a h(x) = \Delta_a h(x,a)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \delta_a h(a) &= 0 \\ \delta_a h(x) &= \dfrac{1}{\|x-a\|}(h(x)-h(a)-Dh(a)\,(x-a)) \quad \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

Cette application est continue au point a, puisque h est différentiable au point a.
Le filtre $\delta_a\Phi$ sur F^Ω, engendré par les $\delta_a A = \{\delta_a h \mid h \in A\}$ avec $A \in \Phi_0$, est l'image réciproque de $\Delta_a\Phi$ par l'application continue ι_a de Ω dans $\Omega \times \Omega$ définie par $\iota_a(x) = (x,a)$; il converge donc localement au point a vers $\Theta_a \circ \iota_a$ [Proposition **II.1.2**], c'est-à-dire vers l'application θ_a définie sur Ω par

$$\begin{cases} \theta_a(a) &= 0 \\ \theta_a(x) &= \dfrac{1}{\|x-a\|}(f(x)-f(a)-g(a)\,(x-a)) \quad \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

Les applications $\delta_a h$ étant continues au point a, le filtre $\delta_a\Phi$ a une base formée d'applications continues au point a, donc sa limite θ_a est continue au point a [Théorème **II.4.1**], ce qui entraîne que l'application f est différentiable au point a et que $Df(a) = g(a)$. □

Remarque. Les propriétés de différentiabilité et de stricte différentiabilité étant de nature locale, il est suffisant de vérifier les hypothèses du théorème sur un voisinage du point a.

Corollaire II.4.10. *Soit (f_n) une suite d'applications définies sur un ouvert d'un espace normé à valeurs dans un espace normé. Si les applications f_n sont différentiables, si la suite (f_n) converge simplement vers f et si la suite (Df_n) converge localement vers g au point a, alors (f_n) converge localement au point a, l'application f est différentiable au point a et $Df(a) = g(a)$. Si, de plus, les applications (f_n) sont strictement différentiables au point a, alors f est strictement différentiable au point a.*

Démonstration. On applique le théorème **II.4.9** au filtre des sections de (f_n). □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Corollaire II.4.11. *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications définies sur un ouvert Ω d'un espace normé, à valeurs dans un espace normé. Si Φ a une base Φ_0 formée d'applications de classe C^1, si Φ converge simplement vers f et si le filtre $D\Phi_0$, engendré par l'image de Φ_0 par l'application de différentiation, converge localement vers g, alors Φ converge localement vers f, l'application f est de classe C^1 et $Df = g$.*

Démonstration. Le théorème **II.4.9** assure que Φ converge localement en tout point de X, que f est différentiable en tout point et que $Df = g$. Par ailleurs, $D\Phi$ a une base formée d'applications continues et converge donc localement vers g, c'est-à-dire vers Df qui est alors continue [Théorème **II.4.1**]. □

Corollaire II.4.12. *Soit (f_n) une suite d'applications définies sur un ouvert d'un espace normé, à valeurs dans un espace normé. Si les applications f_n sont de classe C^1, si la suite (f_n) converge simplement vers f et si la suite (Df_n) converge localement vers g, alors (f_n) converge localement vers f, l'application f est de classe C^1 et $Df = g$.*

Démonstration. On applique le corollaire **II.4.11** au filtre des sections de (f_n). □

Remarque. Si l'espace source est de dimension infinie, ce résultat est strictement plus fort que le théorème classique sur la limite d'une suite d'applications de classe C^1 pour lequel on suppose la convergence uniforme de la suite (Df_n). Ici, on ne suppose que la convergence locale, c'est-à-dire, l'espace source étant métrique, la convergence uniforme sur tout compact [Corollaire **I.2.7**].

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Convergence locale sur un espace de Baire

La démonstration de plusieurs théorèmes classiques d'analyse et d'analyse fonctionnelle repose implicitement sur la convergence locale, en tout point d'une partie dense, d'une suite simplement convergente d'applications d'un espace de Baire [16] dans un espace métrique qui vérifient une hypothèse de semi-continuité [17] [Théorème **III.1.1**].

Le rôle de la convergence locale en tant qu'outil de démonstration est essentiel dans ce cas : la convergence locale en tout point d'une partie dense ne correspond en effet à aucun mode classique de convergence. À défaut, il ne reste qu'à répéter tout ou partie de la démonstration du théorème **III.1.1** dans la démonstration de chacun des théorèmes où ce résultat est pertinent [cf. Yosida, 1966].

1. — Suite convergeant localement sur un espace de Baire

Théorème III.1.1. *Soient X un espace de Baire, Y un espace métrique et (f_n) une suite d'applications de X dans Y convergeant simplement vers f. Si la suite (f_n) vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :*

(H) *Quel que soit p, la fonction $d_Y(f_p, f)$ est semi-continue inférieurement,*

(H') *Quels que soient p et q, la fonction $d_Y(f_p, f_q)$ est semi-continue inférieurement,*

alors (f_n) converge localement vers f en tous les points d'un G_δ dense.

Démonstration. L'ensemble C des points où (f_n) converge localement est, d'après la définition, l'intersection des parties

$$C_k = \left\{a \in X \mid \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists N,\ \forall x \in V,\ \forall p \geqslant N,\ d_Y\left(f_p(x), f(x)\right) < 1/k\right\}$$

(16) Un espace de Baire est un espace topologique dans lequel toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (ce qui équivaut à : toute réunion de fermés sans point intérieur est sans point intérieur). On qualifie de G_δ toute intersection dénombrable d'ouverts.
Le théorème de Baire énonce que
– tout ouvert d'un espace de Baire,
– tout espace localement compact,
– tout espace métrique complet,
est un espace de Baire.

(17) Une fonction ϕ définie sur l'espace topologique X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement si elle vérifie l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes :

(i) Pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\{x \in X \mid \phi(x) \leqslant \lambda\}$ est fermé.

(ii) Pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\{x \in X \mid \phi(x) > \lambda\}$ est ouvert.

Pour toute famille $\{\phi_i\}_{i \in \boldsymbol{I}}$ de fonctions semi-continues inférieurement, $\sup_{i \in \boldsymbol{I}} \phi_i$ est semi-continue inférieurement. Si l'ensemble $\boldsymbol{I}$ est fini, $\inf_{i \in \boldsymbol{I}} \phi_i$ est semi-continue inférieurement.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

et d'après le corollaire **II.3.3**, c'est aussi l'ensemble des points où (f_n) vérifie la condition de Cauchy locale, donc l'intersection des parties

$$C'_k = \{a \in X \mid \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists N,\ \forall x \in V,\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ d_Y\left(f_p(x), f_q(x)\right) < 1/k\}.$$

Les parties C_k (resp. C'_k) étant ouvertes (puisque, pour tout a, on peut prendre V ouvert, donc voisinage de tous ses points et alors $V \subset C_k$), C est un G_δ. L'espace X étant de Baire, C est dense si et seulement si les ouverts C_k (resp. C'_k) sont denses, ce qu'on va montrer.

Pour cela, on fixe un entier k ; à tout ouvert U de X on associe les parties :

$$F_N = \{x \in U \mid \forall p \geqslant N,\ d_Y\left(f_p(x), f(x)\right) \leqslant 1/2k\}$$
$$(\text{ resp. } F'_N = \{x \in U \mid \forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N,\ d_Y\left(f_p(x), f_q(x)\right) \leqslant 1/2k\}\ ).$$

La suite (f_n) convergeant simplement, quel que soit $x \in U$, la suite $(f_n(x))$ est convergente (resp. est de Cauchy) dans Y, donc U est la réunion des F_N (resp. F'_N).

Sous l'hypothèse (**H**) (resp. (**H'**)), les parties F_N (resp. F'_N) sont fermées dans U. L'espace X étant de Baire, l'ouvert U est aussi un espace de Baire, et il existe donc N tel que F_N (resp F'_N) ait un point intérieur dans U, donc dans X, puisque U est ouvert. Ce point appartient à $U \cap C_k$ (resp. $U \cap C'_k$), qui n'est donc pas vide.

Ceci étant vrai pour tout ouvert U de X, C_k est dense dans X. □

Corollaire III.1.2. *Soient X un espace de Baire, Y un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues de X dans Y, convergeant simplement vers f. Alors (f_n) converge localement en tous les points d'un G_δ dense.*

Démonstration. On utilise (**H'**) : les applications $d_Y\left(f_p, f_q\right)$ sont semi-continues inférieurement puisque continues. □

Application III.1.3. (**Théorème de la limite simple de Baire**). Soient X un espace de Baire, Y un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues de X dans Y convergeant simplement vers f. Alors f est continue en tous les points d'un G_δ dense.

Démonstration. Le corollaire **III.1.2** entraîne que (f_n) converge localement en tous les points d'un G_δ dense. Les applications f_n étant continues, l'application f est continue en chaque point de ce G_δ [Corollaire **II.4.2**]. □

Application III.1.4. (**Limite simple d'applications de classe C^1**). Soit (f_n) une suite d'applications de classe C^1, définies sur un ouvert Ω d'un espace de Banach, à valeurs dans un espace normé. Si (f_n) converge simplement vers f et si (Df_n) converge simplement vers g, alors la suite (f_n) converge localement vers f en tout point d'un G_δ dense et l'application f est strictement différentiable et vérifie $Df(a) = g(a)$ en tout point de ce G_δ.

Démonstration. L'espace Ω est de Baire puisque c'est un ouvert d'un espace métrique complet, donc la suite de fonctions continues (Df_n) converge en tout point d'un G_δ dense [Corollaire **III.1.2**]. Le corollaire **II.4.10** entraîne alors que la suite (f_n) converge localement vers f en tout point de ce G_δ dense et que, les applications f_n étant strictement différentiables, l'application f est strictement différentiable et vérifie $Df(a) = g(a)$ en tout point de ce G_δ. □

Exemple III.1.5. La borne supérieure d'une famille finie de fonctions numériques de classe C^1, définies sur un ouvert Ω d'un espace de Banach, est strictement différentiable en tout point d'un G_δ dense.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

Démonstration. Pour utiliser l'application **III.1.4**, il suffit de montrer par récurrence sur p la propriété suivante

$(\boldsymbol{P}_p)$ *Quelle que soit la famille finie* $\{f_k \mid 1 \leqslant k \leqslant p\}$ *de fonctions réelles de classe* C^1 *définies sur un ouvert* Ω *d'un espace normé, il existe une suite* (h_n) *de fonctions de classe* C^1 *sur* Ω *qui converge simplement vers* $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant p} f_k$ *et dont la suite des différentielles converge simplement, ces deux convergences étant « stationnaires » en tout point.*

La démonstration repose sur la formule classique :

$$\sup\{a,b\} = \frac{1}{2}\left(a+b+|a-b|\right)$$

associée à la suite d'approximations φ_n de la fonction valeur absolue définies par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} |t| & \text{si} \quad |t| \geqslant 1/n \\ \dfrac{3n}{2}t^2 - \dfrac{n^3}{2}t^4 & \text{si} \quad |t| < 1/n. \end{cases}$$

On vérifie aisément que
– les fonctions φ_n sont de classe C^1,
– les suites (φ_n) et (φ_n') convergent simplement respectivement vers la fonction valeur absolue et la fonction σ définie par

$$\sigma(t) = \begin{cases} t/|t| & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0, \end{cases}$$

et ces convergences sont *stationnaires* en tout point, en ce sens que, pour t fixé, il existe un entier N dépendant de t, tel que l'on ait $\varphi_n(t) = |t|$ et $\varphi_n'(t) = \sigma(t)$ pour $n > N$.

1) La propriété $(\boldsymbol{P}_1)$ est vérifiée : pour tout n, on pose $h_n = f_1$.

2) Soit $\{f_k \mid 1 \leqslant k \leqslant p+1\}$ une famille de $p+1$ applications de classe C^1, avec $p \geqslant 1$. Si la propriété $(\boldsymbol{P}_p)$ est vérifiée, il existe une suite $(\hat{h}_n)$ de fonctions de classe C^1 qui converge simplement vers $\hat{f} = \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant p} f_k$ et dont la suite des différentielles converge simplement vers une fonction $\hat{g}$, ces deux convergences étant stationnaires en tout point.
Soit alors (h_n) la suite des fonctions de classe C^1 définies sur Ω par

$$h_n = \frac{1}{2}\left(\hat{h}_n + f_{p+1} + \varphi_n \circ \left(\hat{h}_n - f_{p+1}\right)\right) .$$

2 a) Pour x fixé, la suite $\left(\hat{h}_n(x)\right)$ étant stationnaire par hypothèse, il existe un entier N tel que l'on ait $\hat{h}_n(x) = \hat{f}(x)$ si $n \geqslant N$, d'où

$$h_n(x) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x) + f_{p+1}(x) + \varphi_n\left(\hat{f}(x) - f_{p+1}(x)\right)\right) \quad \text{si} \quad n \geqslant N .$$

Pour $t = \hat{f}(x) - f_{p+1}(x)$ fixé, la suite $(\varphi_n(t))$ étant stationnaire par construction, il existe un entier N' tel que l'on ait

$$\varphi_n\left(\hat{f}(x) - f_{p+1}(x)\right) = \left|\hat{f}(x) - f_{p+1}(x)\right| \text{ si } n \geqslant N',$$

ce qui, pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$, entraîne

$$h_n(x) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x) + f_{p+1}(x) + \left|\hat{f}(x) - f_{p+1}(x)\right|\right) = \sup\left(\hat{f}(x), f_{p+1}(x)\right) = \sup_{1\leqslant k\leqslant p+1} f_k(x).$$

La suite $(h_n(x))$ est donc stationnaire et converge vers $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant p+1} f_k(x)$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

2 b) Pour x fixé, on a

$$Dh_n(x)=\frac{1}{2}\left(D\hat{h}_n(x)+Df_{p+1}(x+\varphi'_n\left(\hat{h}_n(x)-f_{p+1}(x)\right)\left(D\hat{h}_n(x)-Df_{p+1}(x)\right)\right).$$

La suite $\left(D\hat{h}_n(x)\right)$ étant stationnaire par hypothèse, il existe un entier N'' tel que l'on ait $D\hat{h}_n(x)=\hat{g}(x)$ pour $n\geqslant N''$, d'où

$$Dh_n(x)=\frac{1}{2}\left(\hat{g}(x)+Df_{p+1}(x)+\varphi'_n\left(\hat{f}(x)-f_{p+1}(x)\right)\left(\hat{g}(x)-Df_{p+1}(x)\right)\right).$$

Pour $t=\hat{f}(x)-f_{p+1}(x)$ fixé, la suite $(\varphi'_n(t))$ étant stationnaire par construction, il existe un entier N''' tel que l'on ait, pour $n\geqslant N'''$,

$$\varphi'_n\left(\hat{f}(x)-f_{p+1}(x)\right)=\sigma\left(\hat{f}(x)-f_{p+1}(x)\right),$$

ce qui, pour $n\geqslant\max\{N,N'',N'''\}$, entraîne

$$Dh_n(x)=\frac{1}{2}\left(\hat{g}(x)+Df_{p+1}(x)+\sigma\left(\hat{f}(x)-f_{p+1}(x)\right)\left(\hat{g}(x)-Df_{p+1}(x)\right)\right).$$

La suite $(Dh_n(x))$ est donc stationnaire et convergente. □

Application III.1.6. (**Limite à l'infini d'une fonction**). Soit φ une application de R_+^* dans un espace métrique Y. Si φ est continue et si la suite $(\varphi(na))$ a une limite quel que soit $a\in R_+^*$, alors φ a une limite à l'infini.

Démonstration. Soit f_n l'application définie sur R_+^* par $f_n(x)=\varphi(nx)$. La suite (f_n) converge simplement vers une application f et, φ étant continue, les applications f_n sont continues. La suite (f_n) converge donc localement en au moins un point a de l'espace de Baire R_+^* [Corollaire **III.1.2**] et f est continue en ce point [Application **III.1.3**]. La convergence locale au point a s'exprime alors ainsi [Corollaire **II.3.5**] : quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un réel $\alpha\in\,]0,a[$ et un entier N tels que l'on ait $d\left(f_n(x),f(a)\right)<\varepsilon$ pour tout $x\in[a-\alpha,a+\alpha]$ et tout $n\geqslant N$.
On vérifie qu'il existe un entier $n_0\geqslant N$ et un réel $T>0$ tels que l'on ait

$$\cup_{n\geqslant n_0} n\,[a-\alpha,a+\alpha]\supset[T,+\infty[\ .^{(18)}$$

Il en résulte que, quel que soit $\xi\in[T,+\infty[$, il existe $n\geqslant n_0$ et $x\in[a-\alpha,a+\alpha]$ tels que $\xi=nx$. On a alors $\varphi(\xi)=\varphi(nx)=f_n(x)$, avec $n\geqslant N$, donc $d\left(\varphi(\xi),f(a)\right)<\varepsilon$, ce qui démontre que $\varphi(\xi)$ tend vers $f(a)$ quand ξ tend vers l'infini. □

Application III.1.7. (**Suites d'applications continues simplement bornées**). Soient X un espace de Baire et Y un espace normé. Si (f_n) est une suite d'applications continues de X dans Y telle que, pour tout x, la suite $(f_n(x))$ soit bornée, alors (f_n) est localement bornée en tous les points d'un G_δ dense.

Démonstration. Soit g_n l'application de X dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x)=\frac{1}{n}\sup_{k\in\mathbb{N}}\|f_k(x)\|.$$

La suite (g_n) convergeant simplement vers 0 et les fonctions g_n étant semi-continues inférieurement, le théorème **III.1.1** entraîne que la suite (g_n) converge localement vers 0 en tout point d'un G_δ dense. En un point a de ce G_δ, il existe

(18) Pour que $\cup_{n\geqslant n_0} n\,[a-\alpha,a+\alpha]$ recouvre $[T,+\infty[$, il suffit d'avoir $n(a+\alpha)>(n+1)(a-\alpha)$ pour tout $n\geqslant n_0$, donc, puisque la suite $(n/n+1)$ est croissante, de prendre $n_0\geqslant N$ tel que $\dfrac{n_0}{n_0+1}>\dfrac{a-\alpha}{a+\alpha}$ et $T=n_0(a-\alpha)$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

donc un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait $g_n(x) < 1$ pour tout $x \in V$ et tout $n \geqslant N$; il en résulte que l'on a $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k(x)\| < N$ pour tout $x \in V$, donc que la suite (f_n) est localement bornée au point a. □

Application III.1.8. (**Propriété de Schur**). Soit A un ensemble quelconque. Toute suite (u_*^n) dans $\ell^1(A)$, de Cauchy pour la topologie faible[19] $\sigma\left(\ell^1(A), \ell^\infty(A)\right)$, converge en norme dans $\ell^1(A)$.

Démonstration. Les espaces $\ell^\infty(A)$ et $\ell^1(A)$ sont mis en dualité par la forme bilinéaire

$$B \,:\, \ell^\infty(A) \times \ell^1(A) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x^*, u_*) = ((x_\alpha^*), (u_{*,\alpha})) \mapsto \sum_{\alpha\in A} x_\alpha^* u_{*,\alpha}.$$

À tout élément u_* de $\ell^1(A)$, on associe la forme linéaire

$$\phi_{u_*} \,:\, \ell^\infty(A) \longrightarrow \mathbb{R} \quad x^* = (x_*^\alpha) \mapsto \sum_{\alpha\in A} u_{*,\alpha} x_\alpha^*$$

qui est continue pour la topologie forte (la topologie définie par la norme $\|\ \|_\infty$) puisqu'on a

$$\forall x^* \in \ell^\infty(A),\ |\phi_{u_*}(x^*)| \leqslant \sum_{\alpha\in A} |u_{*,\alpha}|\,|x_\alpha^*| \leqslant \sum_{\alpha\in A} |u_{*,\alpha}| \sup_{\alpha\in A} |x_\alpha^*| = \|u_*\|_1 \|x^*\|_\infty .$$

À tout élément x^* de $\ell^\infty(A)$, on associe la forme linéaire

$$\psi_{x^*} \,:\, \ell^1(A) \longrightarrow \mathbb{R} \quad u_* = (u_{*,\alpha}) \mapsto \sum_{\alpha\in A} u_{*,\alpha} x_\alpha^* .$$

qui est continue pour la topologie $\sigma\left(\ell^1(A), \ell^\infty(A)\right)$; l'image par ψ_{x^*} de la suite de Cauchy (u_*^n) est alors une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. La suite (U_n) de formes linéaires sur $\ell^1(A)$ définies par $U_n(x^*) = \phi_{u_*^n}(x^*) = \psi_{x^*}(u_*^n)$ converge donc simplement vers une forme linéaire U.
On va montrer que la suite (U_n) vérifie une condition de Cauchy uniforme sur la boule unité $X = \{x^* \mid \|x\|_\infty = \sup_{\alpha\in A} |x_\alpha^*| \leqslant 1\}$ de $\ell^\infty(A)$, ce qui entraînera la continuité de sa limite et la convergence en norme de la suite (u_*^n).
On identifie X à $[-1,1]^A$ muni de la topologie produit (la topologie la moins fine rendant continues chaque projection, forme linéaire ϕ_{λ_*} associée à l'élément $\lambda_* = (\lambda_{*,\alpha'})$ de $\ell^1(A)$ tel que $\lambda_{*,\alpha'}$ est égal à 1 si $\alpha' = \alpha$ et à 0 sinon). Les fonctions U_n, continues pour la topologie forte, sont donc continues pour la topologie produit.

(19) Soient $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ deux topologies sur un même ensemble E. $\mathscr{T}$ est dite moins fine que $\mathscr{T}'$ si l'ensemble des ouverts pour $\mathscr{T}$ est contenu dans l'ensemble des ouverts pour $\mathscr{T}'$.
Pour toute famille $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de fonctions sur un ensemble E, il existe une unique topologie moins fine que toutes les autres parmi les topologies rendant continues les fonctions f_α. Une base de voisinages de l'élément x_0 pour cette topologie est constituée des ensembles $V_{A_0,\varepsilon}(x_0) = \cap_{\alpha\in A_0} \{x \mid |f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)| < \varepsilon\}$, où A_0 est une sous famille finie de A.
Soit B une forme bilinéaire définie sur le produit $F \times G$ de deux espaces vectoriels sur le corps K. La topologie faible sur F, notée $\sigma(F,G)$, est la topologie la moins fine rendant continues les applications

$$\phi_b \,:\, F \longrightarrow K \quad a \mapsto B(a,b),$$

où b désigne un élément de G.
Pour toute forme linéaire f sur F, continue pour la topologie faible $\sigma(F,G)$, il existe un unique élément b de G tel que, pour tout $x \in F$, $f(a) = B(a,b)$. [Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. IV, §1, n° 2].
F et G ayant des rôles interchangeables, on définit pareillement la topologie $\sigma(G,F)$ sur G.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Comme la boule X, produit de compacts, est un espace compact, donc est un espace de Baire, le corollaire **III.1.2** entraîne alors que la suite (U_n) converge localement vers U en tous les points d'un G_δ dense dans X pour la topologie produit. Soit $x^{0,*}$ un point de X où (U_n) converge localement. Un système fondamental de voisinages de $x^{0,*}$ est l'ensemble des produits de voisinages V_α de $x^{0,*}_\alpha$ dans $[-1,1]$ avec V_α égal à $[-1,1]$ sauf pour un ensemble fini d'indices. La condition de Cauchy locale au point $x^{0,*}$ s'exprime alors de la manière suivante :
quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe

- un entier N',
- un ensemble fini $\boldsymbol{A}_0 \subset \boldsymbol{A}$ et un voisinage fondamental $V = \prod_{\alpha\in\boldsymbol{A}} V_\alpha$ de $x^{0,*}$, où $\boldsymbol{A}_0$ est l'ensemble d'indices hors duquel les V_α sont égaux à $[-1,1]$,

tels que l'on ait, pour $p \geqslant N', q \geqslant N'$ et $\xi^* \in V$, $\left|U_p(\xi^*) - U_q(\xi^*)\right| < \varepsilon$.
Soit x^* un élément quelconque de X et soit $\tilde{x^*}$ l'élément de V défini par $\tilde{x^*}_\alpha = x^{0,*}_\alpha$ si $\alpha \in \boldsymbol{A}_0$ et $\tilde{x^*}_\alpha = x^*_\alpha$ sinon. En écrivant :

$$\begin{aligned} U_p(x^*) - U_q(x^*) &= U_p(\tilde{x^*}) - U_q(\tilde{x^*}) + U_p(x^* - \tilde{x^*}) - U_q(x^* - \tilde{x^*}) \\ &= U_p(\tilde{x^*}) - U_q(\tilde{x^*}) + \sum_{\alpha\in\boldsymbol{A}_0} (u^p_{*,\alpha} - u^q_{*,\alpha})(x^*_\alpha - x^{*,0}_\alpha), \end{aligned}$$

il vient, pour $p \geqslant N'$ et $q \geqslant N'$,

$$\left|(U_p - U_q)(x^*)\right| = \left|U_p(x^*) - U_q(x^*)\right| < \varepsilon + 2\sum_{\alpha\in\boldsymbol{A}_0} \left|u^p_{*,\alpha} - u^q_{*,\alpha}\right|.$$

Pour tout $\alpha \in \boldsymbol{A}$, la suite $(u^n_{*,\alpha})$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ comme image de la suite de Cauchy (u^n_*) par la forme linéaire continue $\phi_{\lambda^*_\alpha}$ associée à l'élément λ^*_α de $\ell^\infty(\boldsymbol{A})$ défini par $\lambda^*_{\alpha,\alpha} = 1$ et $\lambda^*_{\alpha,\alpha'} = 0$ pour tout $\alpha' \neq \alpha$. La famille $\boldsymbol{A_0}$ étant finie, il existe alors un entier N'' tel que l'on ait $\sum_{\alpha\in\boldsymbol{A}_0} \left|u^p_{*,\alpha} - u^q_{*,\alpha}\right| < \varepsilon$ pour $p \geqslant N''$ et $q \geqslant N''$.
En posant $N = \max(N', N'')$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N, \forall x^* \in X,\ \left|(U_p - U_q)(x^*)\right| < 3\varepsilon\,.$$

$U(x^*)$ étant la limite de $U_q(x^*)$ quand q tend vers l'infini, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall x^* \in X,\ \left|(U_p - U)(x^*)\right| \leqslant 3\varepsilon, \qquad (C)$$

Les formes linéaires U_n étant continues sur l'espace $\ell^\infty(\boldsymbol{A})$ muni de la topologie forte, la forme U, limite uniforme sur X de la suite (U_n), est continue sur X, donc continue à l'origine, donc continue sur $\ell^\infty(\boldsymbol{A})$ pour la topologie forte. U est donc continue pour la topologie moins fine $\sigma(\ell^\infty(\boldsymbol{A}), \ell^1(\boldsymbol{A}))$. Il existe alors un unique élément u_* de $\ell^1(\boldsymbol{A})$ tel que

$$\forall x^* \in \ell^\infty(\boldsymbol{A}),\ U(x^*) = \sum_{\alpha\in\boldsymbol{A}} x^*_\alpha u_{*,\alpha}.$$

En appliquant (C) à l'élément ξ^* de X défini par $\xi^*_\alpha = 1$ si $u^p_{*\alpha} - u_{*\alpha} \geqslant 0$ et $\xi^*_\alpha = -1$ sinon, on obtient que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geqslant N, \left\|u^p_* - u_*\right\|_1 = \sum_{\alpha\in\boldsymbol{A}} \left|u^p_{*\alpha} - u_{*\alpha}\right| = \sum_{\alpha\in\boldsymbol{A}} (u^p_{*\alpha} - u_{*\alpha})\xi^*_\alpha = \left|(U_p - U)(\xi^*)\right| \leqslant 3\varepsilon\,.$$

La suite (u^n_*) est donc convergente en norme dans $\ell^1(\boldsymbol{A})$. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

2. — Applications à l'analyse fonctionnelle

Dans certains cas particuliers, la convergence locale en un point entraîne la convergence locale en tout point de X. Par exemple :

Théorème III.2.1. *Soit X un espace vectoriel topologique, Y un espace vectoriel topologique métrisable et (f_n) une suite d'applications de X dans Y convergeant simplement vers l'application constante de valeur 0.*
Si, pour tout $x \in X$ et tout $x' \in X$, les applications f_n vérifient la propriété de sous-additivité suivante :

$$d_Y\left(f_n(x+x'),0\right) \leqslant d_Y\left(f_n(x)+f_n(x'),0\right) \qquad \textbf{(s.a.)}$$

et si (f_n) converge localement en un point de X, alors (f_n) converge localement sur X.

Démonstration. Soit a un point en lequel (f_n) converge localement et soit b un point quelconque de X. La condition **(s.a.)** entraîne que, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} d_Y\left(f_n(b+x),0\right) &= d_Y\left(f_n\left((b-a)+(a+x)\right),0\right) \\ &\leqslant d_Y\left(f_n(b-a)+f_n(a+x),0\right). \end{aligned}$$

et la somme étant continue dans Y, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $d_Y\left(f_n(b+x),0\right) < \varepsilon$ si $d_Y\left(f_n(b-a),0\right) < \alpha$ et $d_Y\left(f_n(a+x),0\right) < \alpha$.
La suite (f_n) convergeant localement vers 0 au point a, il existe un voisinage V de 0 dans X et un entier N' tel que l'on ait $d_Y\left(f_n(a+x),0\right) < \alpha$ pour $x \in X$ et $n \geqslant N'$.
Par ailleurs, la suite $(f_n(b-a))$ tendant vers 0 par hypothèse, il existe N'' tel que l'on ait $d_Y\left(f_n(b-a),0\right) < \alpha$ pour $n \geqslant N''$.
En posant $N = \max(N', N'')$, il en résulte que l'on a $d_Y\left(f_n(b+x),0\right) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $n \geqslant N$, ce qui démontre que la suite (f_n) converge localement vers 0 au point b. □

Si, dans le théorème **III.2.1**, on rajoute l'hypothèse que X est un espace de Baire, le théorème **III.1.1** entraîne la convergence locale de la suite (f_n) sur X et donc toutes les propriétés résultant de ce mode de convergence ; on obtient ainsi les applications suivantes :

Application III.2.2. (**Espace quasi-normé**). La distance associée à une quasi-norme sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définit sur E une structure d'espace vectoriel topologique.

Démonstration. Une quasi-norme sur un espace vectoriel E [Yosida, 1966, p. 30] [20] est une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(i) pour tout $x \in E$, $\mathrm{N}(x) \geqslant 0$, avec $\mathrm{N}(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;

(ii) pour tout $(x,y) \in E^2$, $\mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$;

(20) L'intérêt des espaces quasi-normés tient

- d'une part à ce que tout espace localement convexe séparé dont la topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes est un espace quasi-normé,
- d'autre part à ce que certains espaces vectoriels topologiques non localement convexes sont des espaces quasi-normés.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

(iii) pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{k} \times E$,

$$\textbf{a)}\ \mathrm{N}(-x) = \mathrm{N}(x), \quad \textbf{b)}\ \lim_{\lambda_n \to 0} \mathrm{N}(\lambda_n x) = 0, \quad \textbf{c)}\ \lim_{x_n \to 0} \mathrm{N}(\lambda x_n) = 0.$$

Comme pour une norme, l'inégalité triangulaire **(ii)** et **(iii.a)** entraînent
(iv) $|\mathrm{N}(x) - \mathrm{N}(y)| \leqslant \mathrm{N}(x-y)$ quels que soient x et y dans E.
et les propriétés **(i)**,**(ii)** et **(iii.a)** entraînent que l'on définit une distance sur E en posant $d(x,y) = \mathrm{N}(x-y)$.

L'inégalité triangulaire entraîne que l'addition est continue. On a, en effet,

$$\begin{aligned} d(x+y, a+b) &= \mathrm{N}((x+y)-(a+b)) = \mathrm{N}((x-a)+(y-b)) \\ &\leqslant \mathrm{N}(x-a) + \mathrm{N}(y-b) = d(x,a) + d(y,b). \end{aligned}$$

Il est plus difficile de montrer la continuité du produit en tout point (λ, a) de l'espace métrisable $\mathbb{k} \times E$. Il suffit pour cela de montrer que l'image de toute suite $((\lambda_n, x_n))$ convergeant vers (λ, a) converge vers λa. On a

$$d(\lambda_n x_n, \lambda a) = \mathrm{N}(\lambda_n x_n - \lambda a) \leqslant \mathrm{N}(\lambda_n (x_n - a)) + \mathrm{N}((\lambda_n - \lambda)a).$$

La quantité $(\lambda_n - \lambda)a$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'après **(iii.b)**. Pour montrer que $\lambda_n(x_n - a)$ tend aussi vers 0, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{k}$ par $f_n(t) = \mathrm{N}(t(x_n - a))$ pour tout $t \in \mathbb{k}$. Ces fonctions convergent simplement vers 0 d'après **(iii.c)**, elles sont continues d'après **(iii.b)** et la majoration **(iv)**, puisque l'on a

$$|f_n(t) - f_n(\alpha)| = |\mathrm{N}(t(x_n - a)) - \mathrm{N}(\alpha(x_n - a))| \leqslant \mathrm{N}(t - \alpha)(x_n - a)) \ .$$

Le corollaire **III.1.2** entraîne que (f_n) converge localement vers 0 en tout point d'une partie dense de l'espace de Baire $\mathbb{k}$, donc au moins en un point. Par ailleurs, d'après **(ii)**, les fonctions f_n sont sous-additives, donc vérifient la condition **(s.a.)** du théorème **III.2.1**. Il en résulte que la suite f_n converge localement vers 0 sur $\mathbb{k}$, donc uniformément sur tout compact [Théorème **I.2.3**]. En se plaçant sur un voisinage compact de λ, il vient enfin que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{N}(\lambda_n(x_n - a)) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) = 0 \ . \qquad \square$$

Remarque. La démonstration publiée par Yosida [*loc.cit.*] due à Kakutani, est basée sur le théorème d'Egoroff.

Application III.2.3. (**Théorème de la borne uniforme**). Si X est un espace vectoriel topologique de Baire, Y un espace vectoriel topologique quasi-normé et (f_n) une suite simplement bornée d'applications linéaires continues de X dans Y, alors les applications f_n sont uniformément équicontinues.

Démonstration. Soit g_n l'application de X dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}\Big(\frac{1}{n} f_k(x)\Big) .$$

La suite (g_n) converge simplement vers 0 et les fonctions $d_{\mathbb{R}}(g_n, 0) = g_n$ sont semi-continues inférieurement, donc [Théorème **III.1.1**] la suite (g_n) converge localement en tous les points d'un G_δ dense, donc au moins en un point.
Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} g_n(x+x') &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}\Big(\frac{1}{n} f_k(x+x')\Big) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}\Big(\frac{1}{n} f_k(x) + \frac{1}{n} f_k(x')\Big) \\ &\leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}\Big(\frac{1}{n} f_k(x)\Big) + \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}\Big(\frac{1}{n} f_k(x')\Big) = g_n(x) + g_n(x') \end{aligned}$$

donc les applications g_n vérifient la condition **(s.a.)** du théorème **III.2.1**.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Il en résulte que la suite g_n converge localement en tous les points de X, en particulier à l'origine. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe donc un voisinage équilibré V de 0 dans X et un entier N tels que l'on ait $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}\Big(\frac{1}{n} f_k(x)\Big) < \varepsilon$ pour $x \in V$ et $n \geqslant N$.
En posant $W = \frac{1}{N} V$, on a donc $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}(f_k(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in W$, ce qui exprime que les applications f_n sont équicontinues à l'origine. L'équicontinuité sur X en découle puisque l'on a :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}(f_k(a+x) - f_k(a)) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}(f_k(x)) < \varepsilon$$

pour tout $a \in X$ et tout $x \in W$. □

Application III.2.4. (**Théorème de Banach-Steinhaus**). Si X est un espace vectoriel topologique de Baire, si Y est un espace vectoriel topologique métrisable et si (f_n) est une suite d'applications linéaires continues de X dans Y, convergeant simplement vers f, alors (f_n) converge localement sur X, l'application f est continue et les applications f_n sont uniformément $\mathscr{T}$-bornées pour la convergence locale en 0.

Démonstration. L'espace X étant de Baire et les applications f_n étant continues, le corollaire **III.1.2** entraîne que la suite (f_n) converge localement vers f en tout point d'une partie dense. En particulier, la suite $(f_n - f)$ converge localement vers 0 en au moins un point de X.
Les applications $f_n - f$ étant linéaires, elles vérifient la condition **(s.a.)** du théorème **III.2.1**. Il en résulte que la suite $(f_n - f)$ converge localement sur X. L'application f est alors continue [Corollaire **II.4.2.v**].
Enfin, la suite (f_n) convergeant localement au point 0, les applications f_n sont équicontinues en ce point [Corollaire **II.3.7.v**], ce qui entraîne que pour tout voisinage W de 0 dans Y, il existe un voisinage V (qu'on peut choisir équilibré) tel que, pour tout n, on ait $f_n(V) \subset W$; on a alors

$$\forall \lambda \in B_{\mathbb{k}}(1),\ \forall n \in N, \lambda f_n(V) = f_n(\lambda V) \subset f_n(V) \subset W,$$

ce qui signifie que la suite (f_n) est uniformément $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale en 0. □

Remarque. Le théorème de Banach-Steinhaus n'est souvent énoncé que pour des applications d'un espace de Banach dans un espace normé : c'est un cas particulier du présent théorème. Bourbaki [*Espaces vectoriels topologiques*, 1955, chap. III] l'énonce pour des applications d'un espace tonnelé dans un espace localement convexe séparé. Cette version et celle démontrée ici ne coïncident que pour les applications d'un espace localement convexe et de Baire dans un espace localement métrisable et elles ont chacune un domaine propre d'application. En effet, le théorème proposé par Bourbaki ne concerne que les espaces localement convexes, une restriction que ne connait pas la présente version (il existe des espaces de Fréchet, donc de Baire, non localement convexes), mais il fait appel à des hypothèses plus faibles : d'une part, un espace tonnelé n'est pas, en général, un espace de Baire (la réciproque est vraie : un espace localement convexe qui est un espace de Baire est tonnelé) ; d'autre part, un espace localement convexe séparé n'est pas nécessairement métrisable.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Le théorème **III.2.1** relatif aux applications définies sur un espace vectoriel topologique, a un homologue pour les applications définies sur l'ensemble $\mathscr{B}$ des parties mesurables d'un espace mesuré $(E, \mathscr{B}, m)$, muni de la topologie associée à l'écart $\delta(A, B) = m(A\Delta B))$ où $A\Delta B$ désigne la différence symétrique des parties A et B.

L'espace $\mathscr{B}$ est un groupe abélien topologique pour la loi Δ ; un système fondamental de voisinages d'un point $B \in \mathscr{B}$ est donc formé des translatées par B des boules de rayon $\alpha > 0$ centrées en l'élément neutre $\varnothing$

$$B\Delta \{X \mid \delta(\varnothing, X) < \alpha\} = \{B\Delta X \mid m(X) < \alpha\}.$$

Il en résulte qu'une application additive f de $\mathscr{B}$ dans un espace normé Y est continue si et seulement si elle est continue au point $\varnothing$; en effet, si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\|f(X)\| < \varepsilon$ pour $m(X) < \alpha$, alors, quel que soit $B \in \mathscr{B}$, on a

$$\|f(B\Delta X) - f(B)\| = \|f(X) - 2f(B \cap X)\| < 3\varepsilon \quad \text{pour} \quad m(X) < \alpha,$$

puisque $m(B \cap X) \leqslant m(X) < \alpha$.

Théorème III.2.5. *Soient $(E, \mathscr{B}, m)$ un espace mesuré, Y un espace vectoriel normé et (f_n) une suite d'applications de $\mathscr{B}$ dans Y convergeant simplement vers l'application nulle. Si les applications f_n sont additives et si (f_n) converge localement en un point de $\mathscr{B}$, alors (f_n) converge localement sur $\mathscr{B}$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $A \in \mathscr{B}$ tel que (f_n) converge localement vers 0 au point A. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait

$$\|f_n(A\Delta X)\| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant N \text{ et } m(X) < \alpha\,.$$

Quel que soit $X \in \mathscr{B}$ vérifiant $m(X) < \alpha$, on a $m(A \cap X) \leqslant m(X) < \alpha$, donc

$$\|f_n(A\backslash X)\| = \|f_n\left(A\Delta(X \cap A)\right)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N, \tag{1}$$

et on a $m(X\backslash A) \leqslant m(X) < \alpha$, donc

$$\|f_n(A \cup X)\| = \|f_n\left(A\Delta(X\backslash A)\right)\| \quad \text{si} \quad n \geqslant N\,. \tag{2}$$

En remarquant que $A \cup X = (A\backslash X) \cup X$ avec $(A\backslash X) \cap X = \varnothing$, les applications f_n étant additives, il résulte de (1) et (2) que, pour $n \geqslant N$ et $m(X) < \alpha$, on a

$$\|f_n(X)\| = \|f_n(A \cup X) - f_n(A\backslash X)\| \leqslant \|f_n(A \cup X)\| + \|f_n(A\backslash X)\| < 2\varepsilon\,. \tag{3}$$

Soit B un élément quelconque de $\mathscr{B}$. Quel que soit $X \in \mathscr{B}$ vérifiant $m(X) < \alpha$, on a $m(B \cap X) \leqslant m(X) < \alpha$, donc (3) entraîne que, pour $n \geqslant N$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|f_n(B\Delta X)\| & = & \|f_n(B) + f_n(X) - 2f_n(B \cap X)\| \\ & \leqslant & \|f_n(B)\| + \|f_n(X)\| + 2\,\|f_n(B \cup X)\| \leqslant \|f_n(B)\| + 3\varepsilon\,. \end{array} \tag{4}$$

Par hypothèse, la suite $(f_n(B))$ tend vers 0. Il existe donc $N' \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\|f_n(B)\| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N'$, donc (4) entraîne que $\|f_n(B\Delta X)\| < 4\varepsilon$ pour $n \geqslant \max\{N, N'\}$ et $m(X) < \alpha$, ce qui exprime que (f_n) converge localement vers 0 au point B. □

Application III.2.6. (**Théorème de Vitali-Hahn-Saks**). Soient $(E, \mathscr{B}, m)$ un espace mesuré et (f_n) une suite d'applications additives continues de $\mathscr{B}$ dans un espace normé Y. Si la suite (f_n) converge simplement vers f, alors elle est additive et continue.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. La convergence simple entraîne de manière évidente que f est additive. Seule la continuité de f reste à établir.

L'espace $\mathscr{B}_0$ des parties mesurables de mesure finie, muni de l'écart δ, est un espace semi-métrique complet [21], donc un espace de Baire. Si la suite (f_n) converge simplement vers f, le corollaire **III.1.2** entraîne alors que (f_n) converge localement vers f en tout point d'un G_δ dense de $\mathscr{B}_0$, donc en tout point de $\mathscr{B}$ [Théorème **III.2.5**]. Les applications f_n étant continues, la convergence locale entraîne que f est continue [Corollaire **II.4.2**]. □

Exemple III.2.7. Soient $(E, \mathscr{B}, m)$ un espace mesuré, (φ_n) une suite de l'espace $L^1((E, \mathscr{B}, m); \mathbb{C})$ et (f_n) la suite des applications de $\mathscr{B}$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\forall B \in \mathscr{B},\ f_n(B) = \int_B \varphi_n(x)\, dm(x)\ .$$

Si la mesure m est bornée et si la suite (f_n) converge simplement vers f, il existe un élément φ de $L^1((E, \mathscr{B}, m); \mathbb{C})$ tel que

$$f(B) = \int_B \varphi(x)\, dm(x) \quad \text{pour tout } B \in \mathscr{B},$$

et la suite (φ_n) converge faiblement vers φ dans $L^1((E, \mathscr{B}, m); \mathbb{C})$.

Démonstration. Les applications f_n sont additives et $|f_n(B)|$ tend vers 0 lorsque $m(B)$ tend vers 0, donc les applications f_n sont continues sur $\mathscr{B}$. Il en résulte [Application **III.2.6**] que f est additive et continue sur $\mathscr{B}$, en particulier continue au point $\varnothing$.

La mesure m étant bornée, la continuité de f entraîne que cette application est σ-additive ; en effet, si (B_k) est une suite de parties mesurables disjointes deux à deux, la mesure (finie) de la réunion B de ces parties est égale à la somme de la série de terme général $m(B_k)$, donc la série reste

$$\sum_{k>N} m(B_k) = m\left(\bigcup_{k>N} B_k\right)$$

tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini ; la continuité de f entraîne alors que

$$f\left(\bigcup_{k>N} B_k\right) = f(B) - \sum_{k\leqslant N} f(B_k)$$

tend vers 0, donc que $f(B)$ est la somme de la série de terme général $f(B_k)$.
Le théorème de Radon-Nikodym entraîne alors l'existence de φ représentant f. □

(21) Un ensemble E est dit espace semi-métrique s'il existe une fonction

$$d\ :\ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^* \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

vérifiant

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x)$.

Puisque la démonstration du théorème de Baire pour un espace métrique complet n'utilise pas l'inégalité triangulaire, un espace semi-métrique complet est de Baire.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Polynômes de Bernstein

À toute application f, définie sur $[0,1]$, à valeurs dans un espace normé E dont la norme sera notée $\|.\|$, on associe la suite des fonctions polynômes $B_n f$ définies sur $[0,1]$ par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \, f(k/n) \, .$$

Bernstein [1912-13] a démontré (dans le cas où $E = \mathbb{R}$) que

> *« Si f est bornée, la suite $(B_n f)$ converge simplement vers f en tout point où f est continue et, si f est continue, alors la suite $(B_n f)$ converge uniformément vers f. »*

ce qui, pour une fonction continue, laisse sans explication le passage de la convergence simple sur $[0,1]$, résultant de la première partie du théorème, à la convergence uniforme sur $[0,1]$. La convergence locale donne cette explication manquante : la suite $(B_n f)$ converge localement en tout point où f est continue [Théorème **IV.1.1**] ; si f est continue, la suite $(B_n f)$ converge localement sur $[0,1]$, donc uniformément sur $[0,1]$ d'après le théorème **I.2.3**.

L'apport de la convergence locale à la théorie des polynômes de Bernstein ne se limite pas à cette mise au point du théorème de convergence. Sans prétendre épuiser le sujet, nous en proposons deux autres applications :

- La première [Paragraphe **4.2**] concerne la convergence de la suite $(B_n f_n)$ lorsque (f_n) est une suite de fonctions convergeant localement en un point. Les résultats obtenus sont illustrés
  - d'une part, par une adaptation des polynômes de Bernstein aux fonctions quelconques, non nécessairement bornées, qui donne des suites de polynômes ayant les mêmes propriétés de convergence que dans le cas borné [Application **IV.2.5**],
  - d'autre part, par la démonstration de la convergence locale de la suite des dérivées des polynômes de Bernstein de f en un point où f est strictement dérivable [Application **IV.2.7**], un raffinement d'un résultat classique pour les fonctions de classe C^1.
- La seconde [Paragraphe **4.3**] est consacrée aux changements de variables et à l'extension de la théorie de Bernstein aux fonctions définies sur un segment quelconque $[\alpha, \beta]$ ou sur une demi-droite $[\alpha, +\infty[$. On montre en particulier que, comme les polynômes de Bernstein, les polynômes de Chlodovsky convergent localement en tout point de continuité de f et qu'ils convergent donc uniformément sur tout compact de $[\alpha, +\infty[$ si la fonction est continue. [Théorème **IV.3.2**].

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

1. — Convergence des polynômes de Bernstein

La démonstration classique du théorème de Bernstein se décompose en trois étapes :

a) Un lemme technique (découlant de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev [22]) établissant que, pour $\delta > 0$ et $x \in [0,1]$, on a

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}\ .$$

b) Une réécriture de

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\,(f(x) - f(k/n))$$

sous la forme

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\,(f(x)-f(k/n)) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\,(f(x)-f(k/n))$$

entraînant que, si $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant M$, on a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\|f(x) - B_n f(x)\| \leqslant \frac{M}{2n\delta^2} + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\,\|f(x) - f(k/n)\|\ .$$

c) La remarque que, si f est continue au point a, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall k \in \mathbb{N} \mid \left|\frac{k}{n} - a\right| < \eta, \|f(k/n) - f(a)\| < \varepsilon\ ;$$

la majoration du **b)** appliquée au point a et à $\delta = \eta$, entraîne alors

$$\|f(a) - B_n f(a)\| \leqslant \frac{M}{2n\eta^2} + \varepsilon\ .$$

Pour n assez grand, on a donc $\|f(a) - B_n f(a)\| < 2\varepsilon$.

Dans cette démonstration, l'argument du **c)** ne tire pas tout le parti possible de la majoration établie au **b)**. Cette majoration permet en fait de démontrer le résultat suivant :

(22) X désignant une variable qui suit une loi binomiale de paramètres n et x, le terme de gauche représente la probabilité que la variable aléatoire $Y = X/n$, dont l'espérance m et la variance σ^2 sont respectivement x et $\frac{1}{n}x(1-x)$, vérifie $|Y - m| \geqslant \delta$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev indique que pour une variable aléatoire Y , on a

$$\forall \delta > 0;\ P(|Y - m| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\sigma^2}{\delta^2}.$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Théorème IV.1.1. *Si f est bornée, la suite $(B_n f)$ converge localement vers f en tout point où f est continue et, si f est continue sur $[0,1]$, la suite $(B_n f)$ converge uniformément vers f.*

Démonstration. **1)** Si f est continue en un point a, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel qu'on ait $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$ vérifiant $|x - a| < \eta$. Si on impose $|x - a| < \eta/2$ et $|k/n - a| < \eta/2$, on a $|k/n - a| < \eta$, donc

$$\|f(k/n) - f(x)\| \leqslant \|f(k/n) - f(a)\| + \|f(a) - f(x)\| < 2\varepsilon$$

et la majoration du **b**) appliquée à $\delta = \eta/2$ entraîne

$$\|f(x) - B_n f(x)\| \leqslant \frac{2M}{n\eta^2} + 2\varepsilon.$$

Il en résulte que, pour n assez grand, on a $\|f(x) - B_n f(x)\| \leqslant 3\varepsilon$ quel que soit x vérifiant $|x - a| < \eta/2$; la suite $(B_n f)$ converge donc localement vers f.

2) Si f est continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée. **1)** entraîne la convergence locale en tout point, donc la convergence uniforme sur le compact $[0,1]$ [Théorème **I.2.3**] □

Compte tenu du théorème **II.3.9**, la première partie du théorème **IV.1.1** peut être paraphrasée de la manière suivante :

Corollaire IV.1.2. *Si f est bornée et est continue au point a, alors, quelle que soit la suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(B_n f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Ce résultat est mentionné par Lorentz [1953, §1.2, remarque 2] :

> *« A slight alteration of the above proof shows that if a bounded function f is continuous at x, then $B_n f(c_n) \to f(x)$ for $c_n \to x$. »*,

mais il n'en fait, semble-t-il, aucun usage.

2. — Convergence des opérateurs B_n

Soit $B([0,1], E)$ (resp. $C([0,1], E)$) l'espace des applications bornées (resp. continues) de $[0,1]$ dans l'espace normé E, muni de la norme de la convergence uniforme.
Soit B_n l'endomorphisme de $B([0,1], E)$ qui à toute application bornée f associe la n-ième fonction polynôme de Bernstein $B_n f$. L'application B_n est évidemment linéaire et, pour tout $f \in B([0,1], E)$, on a

$$\|B_n f(x)\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \, \|f\|_\infty \;=\; \|f\|_\infty ,$$

ce qui entraîne que B_n est continu de norme inférieure ou égale à 1 : on a en fait exactement $\|B_n\| = 1$ puisque $\|B_n f\|_\infty = 1$ si f est l'application constante de valeur 1.

Au vu de ce résultat, il serait tentant de placer la théorie des polynômes de Bernstein dans le cadre de l'analyse fonctionnelle et de raisonner directement sur la suite des applications linéaires continues B_n, ou au moins sur la suite des endomorphismes $\tilde{B}_n$ de $C([0,1], E)$ induits par les B_n, puisque la deuxième partie du théorème de Bernstein entraîne que cette suite converge simplement

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

vers l'endomorphisme identité $\tilde{I}$ de $C([0,1],E)$. Une difficulté apparaît tout de suite : la suite $(\tilde{B}_n)$ ne converge pas en norme vers $\tilde{I}$. On a en effet :

Proposition IV.2.1. *Sur $C([0,1],E)$ muni de la norme de la convergence uniforme, la suite d'endomorphismes $(\tilde{B}_n)$ converge localement vers l'endomorphisme identité $\tilde{I}$ mais elle vérifie $\|\tilde{B}_n - \tilde{I}\| = 2$ quel que soit n.*

Démonstration. **1)** La suite $(\tilde{B}_n)$ convergeant simplement vers l'endomorphisme identité $\tilde{I}$, le théorème de Banach-Steinhaus [Application **III.2.4**] entraîne que cette suite converge localement sur $C([0,1],E)$ vers $\tilde{I}$.

2) Soit e un élément de norme 1, fixé dans E.

Pour tout a dans $]0,1/2[$, soit f_a la fonction continue, affine sur chaque intervalle $[0,a]$, $[a,2a]$, $[2a,1]$, et telle que

$$f_a(0) = e, \quad f_a(a) = -e, \quad f_a(2a) = 0, \quad f_a(1) = 0.$$

Si $2a \leqslant 1/n$, on a $f_a(k/n) = 0$ pour $k \geqslant 1$, donc $B_n f_a(x) = (1-x)^n e$. On a alors

$$B_n f_a(a) - f_a(a) = \left((1-a)^n + 1\right) e,$$

ce qui entraîne $\|\tilde{B}_n f_a - f_a\|_\infty \geqslant (1-a)^n + 1$.

La fonction f_a étant de norme 1, on obtient $\|\tilde{B}_n - \tilde{I}\| \geqslant (1-a)^n + 1$.

En faisant tendre a vers 0, il vient $\|\tilde{B}_n - \tilde{I}\| \geqslant 2$.

Comme on a par ailleurs $\|\tilde{B}_n - \tilde{I}\| \leqslant \|\tilde{B}_n\| + \|\tilde{I}\| \leqslant 2$, on obtient $\|\tilde{B}_n - \tilde{I}\| = 2$.

Remarque. Cette égalité est un cas particulier du théorème de Daugavet [Kamowitz] qui dit que, pour tout endomorphisme compact T de $C([0,1],\mathbb{R})$, on a [23] $\|\tilde{I} + T\| = 1 + \|T\|$. □

L'espace $C([0,1],E)$ étant métrique, la convergence locale de la suite $(\tilde{B}_n)$ vers $\tilde{I}$ est équivalente à la convergence uniforme de $(\tilde{B}_n)$ vers $\tilde{I}$ sur tout compact [Corollaire **I.2.7**]. La convergence locale n'est donc pas ici essentielle et elle pourrait, au prix d'une plus grande lourdeur technique des démonstrations, être remplacée par la convergence uniforme sur tout compact de $C([0,1],E)$.

Il en va tout autrement si, pensant à la première partie du théorème de Bernstein, on s'intéresse à la convergence des opérateurs B_n sur $B([0,1],E)$: il n'y a alors pas de propriété de convergence exprimable dans le langage des convergences classiques, mais nous allons montrer [Théorème **IV.2.2**] que, sous certaines hypothèses, la suite des opérateurs B_n respecte la convergence locale en un point. L'intérêt de ce résultat est illustré par ses applications :

- la convergence uniforme de la suite $(B_n f_n)$ associée à une suite (f_n) de fonctions (non nécessairement continues) convergeant uniformément vers une fonction continue [Application **IV.2.3**] ;
- la construction explicite d'une suite de fonctions polynômes convergeant localement en tout point de continuité d'une fonction non nécessairement bornée [Application **IV.2.5**] ;
- la convergence locale de la suite des dérivées des polynômes de Bernstein d'une fonction continue en un point où cette fonction est strictement dérivable [Application **IV.2.7**].

(23) *cf.* J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, Dunod 2010. (exercice VIII.10 p.199).

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Théorème IV.2.2. *Soit (f_n) une suite d'applications bornées de $[0,1]$ dans E, telle que $\|f_n\|_\infty = o(n)$. Si (f_n) converge localement vers f au point a et si f est continue au point a, alors la suite $(B_n f_n)$ converge localement vers f au point a.*

Démonstration. Pour tout $x \in [0,1]$, on obtient à partir de la majoration donnée dans **b)** [Paragraphe **4.1**]

$$\begin{aligned}\|B_n f_n(x) - f(a)\| &\leqslant \|B_n f_n(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f(a)\| \\ &\leqslant \frac{\|f_n\|_\infty}{2n\delta^2} + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\ \|f_n(k/n) - f(a)\| \\ &\qquad + \|f_n(x) - f(a)\|\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, la suite (f_n) converge localement au point a vers f et cette application est continue au point a, donc la condition nécessaire du corollaire **II.3.5** entraîne que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait

$$\|f_n(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{pour } |x-a| < \eta \text{ et } n \geqslant N.$$

En remarquant que $|k/n - a| \leqslant |k/n - x| + |x-a|$ et en faisant $\delta = \eta/2$ dans la première relation, il vient alors que l'on a

$$\|B_n f_n(x) - f(a)\| < \frac{2\,\|f_n\|_\infty}{n\eta^2} + 2\varepsilon \quad \text{pour } |x-a| < \eta/2 \text{ et } n \geqslant N\,.$$

Puisque $\|f_n\|_\infty = o(n)$, il en résulte que $\|B_n f_n(x) - f(a)\| < 3\varepsilon$ pour $|x-a| < \eta/2$ et n assez grand : la suite $(B_n f_n)$ converge donc localement vers f au point a d'après la condition suffisante du corollaire **II.3.5**. □

Application IV.2.3. Soit (f_n) une suite d'applications de $[0,1]$ dans E. Si (f_n) converge uniformément vers l'application continue f, alors la suite $(B_n f_n)$ converge uniformément vers f.

Démonstration. L'application f, continue sur le compact $[0,1]$, est bornée. Il en résulte que, pour n assez grand, la suite (f_n) est uniformément bornée : on a donc certainement $\|f_n\|_\infty = o(n)$. Le théorème **IV.2.2** entraîne alors que $(B_n f_n)$ converge localement vers f en tout point de $[0,1]$, donc uniformément sur le compact $[0,1]$ [Théorème **I.2.3**]. □

La proposition **IV.2.1** permet, grâce au théorème **II.3.9**, de démontrer ce même résultat, mais uniquement pour les suites (f_n) de fonctions continues. Le lien de subordination entre les deux énoncés est rendu plus évident par une reformulation de l'application **IV.2.3** :

Corollaire IV.2.4. *Si $B([0,1], E)$ est muni de la norme de la convergence uniforme, la suite (B_n) converge localement vers l'endomorphisme identité en tout point du sous espace $C([0,1], E)$.*

Démonstration. L'espace $B([0,1], E)$ étant métrique, pour démontrer la convergence locale de (B_n) au point $f \in C([0,1], E)$, il suffit en effet, d'après le théorème **II.3.9** de montrer que, pour toute suite (f_n) de $B([0,1], E)$ convergeant uniformément vers f, la suite $(B_n f_n)$ converge uniformément vers f : c'est le résultat démontré dans l'application **IV.2.3**. □

Application IV.2.5. Soit (M_n) une suite numérique tendant vers $+\infty$, vérifiant $M_n = o(n)$, et soit f une application de $[0,1]$ dans E. Pour tout entier n, on note f_n l'application définie par $f_n(x) = f(x)$ si $\|f(x)\| \leqslant M_n$ et $f_n(x) = 0$ sinon. La suite des fonctions polynômes $B_n f_n$ converge localement vers f en tout point où f est continue.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Si f est continue au point a, alors f est localement bornée en ce point. Il existe donc un voisinage V de a dans $[0,1]$ et un entier N tels que l'on ait $f(x) = f_n(x)$ pour tout x de V et tout $n \geqslant N$, ce qui entraîne que la suite (f_n) converge localement vers f au point a.
On a, par ailleurs, $\|f_n\|_\infty \leqslant M_n$, donc $\|f_n\|_\infty = o(n)$. Le théorème **IV.2.2** entraîne alors que $(B_n f_n)$ converge localement vers f au point a. □

Cette construction permet d'obtenir, sur le modèle des polynômes de Bernstein, une approximation polynomiale explicite de fonctions non nécessairement bornées :

Exemple IV.2.6. Soient $\gamma > 0$ et f_γ la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par $f_\gamma(0) = 0$ et $f_\gamma(x) = 1/x^\gamma$ pour $x \in]0,1]$. En prenant $M_n = (\ln n)^\gamma$, il vient que la suite des fonctions polynômes P_n^γ définies sur $[0,1]$, pour $n \geqslant 2$, par

$$P_n^\gamma(x) = \sum_{\frac{n}{\ln n} \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{n}{k}\right)^\gamma C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k},$$

converge localement en tout point de $]0,1]$, donc uniformément sur tout compact de $]0,1]$, vers la fonction puissance $1/x^\gamma$.

Remarque. Le choix particulier de $M_n = (\ln n)^\gamma$ dans cet exemple n'a pour but que de permettre une expression des fonctions polynômes P_n^γ par une somme faite sur un ensemble d'indices ne dépendant pas de γ ; un tout autre choix est bien sûr possible. Par exemple, si on a $0 < \gamma < 1$, on peut prendre $M_n = n^\gamma$, qui est alors $o(n)$, et la condition sur k devient $1 \leqslant k \leqslant n$. Pour $0 < \gamma < 1$, la suite des fonctions polynômes définies par

$$\tilde{P}_n^\gamma(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{n}{k}\right)^\gamma C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k}$$

converge donc uniformément sur tout compact de $]0,1]$ vers la fonction puissance $1/x^\gamma$. Les conditions sur les indices sont plus simples que celles données dans l'exemple **IV.2.6** mais elles ne valent que pour $0 < \gamma < 1$.

Application IV.2.7. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans E, strictement dérivable au point a. La suite des dérivées des fonctions polynômes $B_n f$ converge localement au point a vers la fonction constante de valeur $f'(a)$.

Démonstration. En dérivant l'expression de $B_{n+1} f$ et en ordonnant, il vient

$$(B_{n+1}f)'(x) = \sum_{k=0}^{n} (n+1)\, C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \left(f\Big(\frac{k+1}{n+1}\Big) - f\Big(\frac{k}{n+1}\Big)\right).$$

On reconnaît le n-ième polynôme de Bernstein associé à une fonction φ_n qui vérifierait

$$\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) = (n+1)\left(f\Big(\frac{k+1}{n+1}\Big) - f\Big(\frac{k}{n+1}\Big)\right)$$

pour tout entier k compris entre 0 et n, par exemple la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\varphi_n(x) = (n+1)\left(f\Big(\frac{nx+1}{n+1}\Big) - f\Big(\frac{nx}{n+1}\Big)\right).$$

On a donc $(B_{n+1}f)' = B_n \varphi_n$ et on applique le théorème **IV.2.2** à la suite (φ_n) qui en vérifie les hypothèses suivantes :

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

a) L'application f, étant continue sur le compact $[0,1]$, est uniformément continue donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $|x-y| < \eta$. En remarquant que

$$\left| \frac{nx+1}{n+1} - \frac{nx}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1},$$

il en résulte que, pourvu que n vérifie $n+1 > 1/\eta$, on a

$$\forall x \in [0,1]\,, |\varphi_n(x)| \leqslant (n+1)\varepsilon,$$

ce qui signifie que $\|\varphi_n\|_\infty = o(n)$.

b) L'application f étant strictement dérivable au point a, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait

$$\left\| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} - f'(a) \right\| < \varepsilon \quad \text{pour } |x-a| < \eta \text{ et } |t-a| < \eta\,.$$

En posant $s = \dfrac{nx+1}{n+1}$ et $t = \dfrac{nx}{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} |s-a| &= \left| \frac{n(x-a)+(1-a)}{n+1} \right| \leqslant |x-a| + \frac{1}{n+1} \\ \text{et} \quad |t-a| &= \left| \frac{n(x-a)-a}{n+1} \right| \leqslant |x-a| + \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

donc, pour $|x-a| < \eta/2$ et $n \geqslant 2/\eta$, on a $|s-a| < \eta$ et $|t-a| < \eta$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(x) - f'(a)\| &= \left\| (n+1)\left(f\Big(\frac{nx+1}{n+1}\Big) - f\Big(\frac{nx}{n+1}\Big)\right) - f'(a) \right\| \\ &= \left\| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} - f'(a) \right\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que la suite (φ_n) converge localement au point a vers $f'(a)$. □

Corollaire IV.2.8. *Si f est dérivable, la suite $((B_n f)')$ converge localement vers f' en tout point où f' est continue.*

Démonstration. La fonction f est continue puisqu'elle est dérivable. En un point a où f' est continue, f est strictement dérivable, donc $((B_n f)')$ converge localement au point a vers l'application constante de valeur $f'(a)$. Comme f' est continue au point a, on a $\lim\limits_{x\to a} \|f'(x) - f'(a)\| = 0$, donc [Proposition **I.1.7**] la suite $((B_n f)')$ converge localement au point a vers f'. □

Pour les fonctions de classe C^1, on retrouve un résultat classique :

Corollaire IV.2.9. *Si f est de classe C^1, la suite $((B_n f)')$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.*

Démonstration. On a en effet convergence locale en tout point de $[0,1]$, donc convergence uniforme sur ce compact [Théorème **I.2.3**]. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3. — Changements de variable

Il est facile de passer de l'approximation par les polynômes de Bernstein d'une application de $[0,1]$ dans l'espace normé E à une approximation polynomiale d'une application d'un segment $[\alpha,\beta]$ dans E grâce au changement de variable $\vartheta(x)=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$. On démontre ainsi une extension du théorème **IV.2.2** qui permet d'étendre les résultats du paragraphe **4.2** aux applications définies sur un intervalle compact quelconque :

Proposition IV.3.1. *Soit (f_n) une suite d'applications bornées de $[\alpha,\beta]$ dans E, telle que $\|f_n\|_\infty = o(n)$. Si (f_n) converge localement vers f au point a et si f est continue au point a, alors la suite des fonctions polynômes $B_n f_n$, définies sur $[\alpha,\beta]$ par*

$$B_n f_n(x) = \frac{1}{(\beta-\alpha)^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(x-\alpha)^k(\beta-x)^{n-k} f_n\left(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

converge localement vers f au point a.

Démonstration. Soit $\hat{f}_n$ (resp. $\hat{f}$) l'application bornée définie sur $[0,1]$ par $\hat{f}_n = f_n\circ\vartheta^{-1}$ (resp. $\hat{f}=f\circ\vartheta^{-1}$). On a $\left\|\hat{f}_n\right\|_\infty = o(n)$ et, si f est continue au point a, l'application $\hat{f}$ est continue au point $\vartheta(a)$. La suite des fonctions polynômes $B_n\hat{f}_n$ converge donc localement vers $\hat{f}$ en ce point [Théorème **IV.2.2**]. L'application ϑ étant continue, le corollaire **II.1.3** entraîne alors que la suite des fonctions polynômes $B_n\hat{f}_n\circ\vartheta$ converge localement vers $\hat{f}\circ\vartheta$ au point a. On vérifie enfin que $B_n\hat{f}_n\circ\vartheta = B_n f_n$. □

Il est moins évident de déduire du théorème de Bernstein une approximation d'une application définie sur un intervalle quelconque J. Si cet intervalle est borné, mais non fermé, l'exemple **IV.2.6** illustre une solution à ce problème : on prolonge l'application à la fermeture de l'intervalle en lui attribuant la valeur 0 là où elle n'est pas définie, on se ramène à $[0,1]$ par un changement de variable affine et on considère les polynômes de Bernstein des applications tronquées associées à une suite réelle (M_n) tendant vers $+\infty$ et vérifiant $M_n = o(n)$. La vraie difficulté concerne les intervalles non bornés : il n'y a pas de changement affine, ou polynomial, transformant un intervalle infini en une partie de $[0,1]$. Il faut donc faire un choix :

- ou bien on veut garder une approximation par une suite de polynômes, mais il faut alors faire appel à d'autres techniques que le changement de variable ;
- ou bien on veut garder la souplesse et la simplicité du changement de variable, mais il faut alors accepter une approximation par des fonctions autres que des polynômes.

Chlodovsky [1937] a suivi la première démarche pour une fonction f bornée définie sur $J=[\alpha,+\infty[$. Étant donné une suite strictement croissante (β_n) de réels tendant vers $+\infty$, il considère les fonctions polynômes définies sur J par les polynômes de Bernstein (au sens de la proposition **IV.3.1**) des restrictions de f aux intervalles $[\alpha,\beta_n]$:

$$\forall x\in[\alpha,\beta_n],\ B_{\beta_n}f(x)=\frac{1}{(\beta_n-\alpha)^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(x-\alpha)^k(\beta_n-x)^{n-k} f\left(\alpha+k\frac{\beta_n-\alpha}{n}\right),$$

et il montre que, si $\beta_n = o(n)$, la suite $\left(B_{\beta_n}f\right)$ converge simplement vers f en tout point où f est continue. Sa démonstration suit le schéma de celle du

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

théorème de Bernstein, mais utilise une version plus fine de la majoration **a)** :

a') Pour tout $\delta > 0$ et tout $x \in [0,1]$, on a (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{x(1-x)}{n\delta^2},$$

qui entraîne une version plus fine de la majoration **b)** :

b') Si $\hat{f}$ est définie sur $[0,1]$ et est majorée par M, on a

$$\left\|\hat{f}(x)-B_n\hat{f}_n(x)\right\| \leqslant \frac{2M}{n\delta^2}x(1-x)+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left\|\hat{f}(x)-\hat{f}(k/n)\right\| .$$

Comme pour le théorème de Bernstein, la démonstration de Chlodovsky ne tire pas tout le parti possible de cette majoration et on peut, en suivant le schéma de la démonstration du théorème **IV.1.1**, démontrer une version plus fine du théorème de Chlodovsky :

Théorème IV.3.2. *Soit f une application bornée de $J = [\alpha, +\infty[$ dans E. Si la suite strictement croissante (β_n) tend vers $+\infty$ en étant telle que $\beta_n = o(n)$, la suite $\left(B_{\beta_n} f\right)$ converge localement vers f en tout point où f est continue. Si, de plus, f est continue, $\left(B_{\beta_n} f\right)$ converge uniformément vers f sur tout compact de J.*

Démonstration. Soit f une application définie sur J, majorée en norme par M et continue en un point a. La suite (β_n) tendant vers l'infini en étant strictement croissante, il existe un entier N tel que l'on ait $\alpha < \beta_n$ pour $n \geqslant N$. Pour un tel n, on considère la restriction $\hat{f}_n$ de f au segment $[\alpha, \beta_n]$ et le polynôme $B_{\beta_n} f = B_n \hat{f}_n$. Par le changement de variable $\vartheta_n(x) = \dfrac{x-\alpha}{\beta_n-\alpha}$, la majoration **b')** entraîne que, pour tout $x \in [\alpha, \beta_n[$, on a

$$\begin{aligned}\left\|f(x)-B_{\beta_n}f_n(x)\right\| &= \left\|\hat{f}(x)-B_n\hat{f}_n(x)\right\| \\ &\leqslant \frac{2M}{n\delta^2}\,\frac{(x-\alpha)(\beta_n-x)}{(\beta_n-\alpha)^2} \\ &+ \sum_{\left|\frac{k}{n}-\frac{x-\alpha}{\beta_n-\alpha}\right|<\delta} C_n^k\,\frac{(x-\alpha)^k(\beta_n-x)^{n-k}}{(\beta_n-\alpha)^n}\left\|f(x)-f\left(\alpha+\frac{k}{n}(\beta_n-\alpha)\right)\right\| .\end{aligned}$$

L'application f étant continue au point a, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $\|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in J$ vérifiant $|x-a| < \eta$. Si $\left|\dfrac{k}{n}-\dfrac{x-\alpha}{\beta_n-\alpha}\right| < \delta$, on a $\left|\alpha+\dfrac{k}{n}(\beta_n-\alpha)-x\right| < \delta(\beta_n-\alpha)$; il en résulte que, si $|x-\alpha| < \eta/2$ et $\delta(\beta_n-\alpha) < \eta/2$, on a $\left|\alpha+\dfrac{k}{n}(\beta_n-\alpha)-a\right| < \eta$, donc

$$\left\|f(x)-f\left(\alpha+\frac{k}{n}(\beta_n-\alpha)\right)\right\| \leqslant \|f(x)-f(a)\| + \left\|f(a)-f\left(\alpha+\frac{k}{n}\beta_n-\alpha)\right)\right\| < 2\varepsilon.$$

Par ailleurs, $\beta_n - x$ est majoré par $\beta_n - \alpha$ et, en imposant à η d'être inférieur à 2, $x-\alpha$ est majoré par $A = a-\alpha+1$ si $|x-a| < \eta/2$. En prenant $\delta = \eta/2(\beta_n-\alpha)$, on obtient alors :

$$\left\|f(x)-B_{\beta_n}f(x)\right\| \leqslant \frac{8M}{n\eta^2}A(\beta_n-\alpha)+2\varepsilon \quad \text{si } |x-a| < \eta/2 .$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Si $\beta_n = o(n)$, le premier terme du majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; il existe donc un entier $N' \geqslant N$ tel que l'on ait $\left\| f(x) - B_{\beta_n} f(x) \right\| < 3\varepsilon$ pour $n \geqslant N'$ et x vérifiant $|x - a| < \eta/2$, ce qui démontre la convergence locale au point a de $\left(B_{\beta_n} f\right)$ vers f.

Si f est continue, la suite $\left(B_{\beta_n} f\right)$ converge localement vers f sur J, donc uniformément sur tout compact de J [Théorème **I.2.3**]. □

L'avantage de la méthode de Chlodovsky est de conserver le principe d'une approximation polynomiale. Mais, pour une fonction bornée, les approximations polynomiales sur un intervalle infini ne sont pas des fonctions bornées. La méthode de changement de variable permet d'éviter cet écueil, mais conduit à des approximations non polynomiales, par exemple des approximations par des fractions rationnelles [Application **IV.3.5**].

Théorème IV.3.3. *Soit J un intervallle de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite d'applications bornées de J dans E, telle que $\|f_n\|_\infty = o(n)$. Étant donné une application continue ϑ, strictement croissante, de J dans $[0,1]$, on note $f_{n,\vartheta}$ l'application de $[0,1]$ dans E définie par $f_{n,\vartheta}(x) = f_n\left(\vartheta^{-1}(x)\right)$ si $x \in \operatorname{Im}\vartheta$ et $f_{n,\vartheta}(x) = 0$ sinon.*
Si (f_n) converge localement vers f au point a et si f est continue au point a, alors la suite des applications $B_{n,\vartheta} f = B_n f_{n,\vartheta} \circ \vartheta$ converge localement vers f au point a, que ce point soit intérieur à J ou soit une borne de J transformée par ϑ en une borne de $[0,1]$.

Démonstration. Soit f_ϑ l'application de $[0,1]$ dans E définie par $f_\vartheta(x) = f\left(\vartheta^{-1}(x)\right)$ si $x \in \operatorname{Im}\vartheta$ et $f_\vartheta(x) = 0$ sinon.

– Si a est intérieur à J, l'application ϑ étant un homéomorphisme de J sur $\operatorname{Im}\vartheta$, le point $\vartheta(a)$ est intérieur à $\operatorname{Im}\vartheta$ et on a donc $f_{n,\vartheta} = f_n \circ \vartheta^{-1}$ sur un voisinage V de $\vartheta(a)$; il résulte alors du corollaire **II.1.3** que la suite $(f_{n,\vartheta})$ converge localement vers f_ϑ au point a.
On a $\|f_{n,\vartheta}\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty = o(n)$ et, si f est continue au point a, l'application f_ϑ est continue au point $\vartheta(a)$; la suite $(B_n f_{n,\vartheta})$ converge donc localement vers f_ϑ au point $\vartheta(a)$ [Théorème **IV.2.2**].
Enfin, l'application ϑ étant continue, la suite $(B_n f_{n,\vartheta} \circ \vartheta)$ converge localement vers $f_\vartheta \circ \vartheta = f$ au point a, d'après le corollaire **II.1.3**.

– Si a est une borne de J, alors $\vartheta(a)$ est une borne de $\operatorname{Im}\vartheta$: si ce point est aussi une borne de $[0,1]$, on a encore $f \circ \vartheta^{-1} = f_\vartheta$ au voisinage de $\vartheta(a)$ et, si f est continue au point a, le raisonnement précédent reste valide. □

Remarque. Pour $J = [\alpha, \beta]$ et $\vartheta(x) = \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$, on retrouve la proposition **IV.3.1**.

Corollaire IV.3.4. *Soit (M_n) une suite réelle vérifiant $M_n = o(n)$ en tendant vers $+\infty$ et soit f une application de J dans E. Pour tout entier n, on note f_n l'application définie par $f_n(x) = f(x)$ si $\|f_n(x)\| \leqslant M_n$ et $f_n(x) = 0$ sinon.*
La suite $(B_{n,\vartheta} f) = (B_n f_{n,\vartheta} \circ \vartheta)$ converge localement vers f en tout point de l'intérieur de J où f est continue ainsi qu'en toute borne de J où f est continue, pourvu que l'image par ϑ de cette borne soit une borne de $[0,1]$.

Démonstration. On a $\|f_n\|_\infty = o(n)$ et, si f est continue au point a, la suite (f_n) converge localement au point a. □

Application IV.3.5. Soit f une application de $J = [\alpha, +\infty[$ dans E et soit (f_n) la suite des applications tronquées associées à une suite réelle (M_n) tendant vers $+\infty$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

et vérifiant $M_n = o(n)$. La suite des fonctions fractions rationnelles définies sur J par

$$R_n f(x) = \frac{1}{(x-\alpha+1)^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \, (x-\alpha)^k \, f_n\left(\alpha + \frac{k}{n-k}\right)$$

converge localement vers f en tout point où f est continue et la suite converge uniformément sur tout compact de J si f est continue sur J.

Démonstration. On applique le corollaire **IV.3.4** avec la bijection croissante ϑ de J sur $[0,1[$ définie par $\vartheta(x) = \frac{x-\alpha}{x-\alpha+1}$. Pour tout $x \in J$, on a (la sommation s'arrêtant à $k = n-1$ car on a toujours $f_{n,\vartheta}(1) = 0$)

$$\begin{aligned} B_{n,\vartheta} f(x) &= B_n f_{n,\vartheta}(\vartheta(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \, (\vartheta(x))^k \, (1-\vartheta(x))^{n-k} \, f_{n,\vartheta}(k/n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \left(\frac{x-\alpha}{x-\alpha+1}\right)^k \left(1 - \frac{x-\alpha}{x-\alpha+1}\right)^{n-k} f_n(\theta^{-1}(k/n)) \\ &= \frac{1}{(x-\alpha+1)^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \, (x-\alpha)^k \, f_n\left(\alpha + \frac{k}{n-k}\right) = R_n f(x). \end{aligned}$$ □

Remarque. Pour une fonction f bornée par M, on a, pour tout $x \in J$,

$$|R_n f(x)| \leqslant \frac{M}{(x-\alpha+1)^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \, (x-\alpha)^k \leqslant M,$$

ce qui entraîne que, quel que soit n, $\|R_n f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Les polynômes de Chlodovsky associés à la même fonction ne sont évidemment pas bornés.

Pour une fonction f quelconque, on montre de même que l'on a $\|R_n f_n\|_\infty \leqslant M_n$. On a donc une suite d'approximations par des fonctions bornées avec un contrôle sur la croissance de la norme des approximations.

Exemple IV.3.6. Soit $J = [0,+\infty[$ et soit f la fonction puissance x^γ, avec $\gamma > 0$. En prenant $M_n = (\ln n)^\gamma$, il vient que la suite de fonctions fractions rationnelles R_n^γ définies sur $[0,+\infty[$ par

$$R_n^\gamma(x) = \frac{1}{(x+1)^n} \sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n \ln n}{1+\ln n}} C_n^k \, x^k \left(\frac{k}{n-k}\right)^\gamma$$

converge localement en tout point de $[0,+\infty[$, donc uniformément sur tout compact de $[0,+\infty[$, vers la fonction puissance x^γ.

Remarque. Comme dans l'exemple **IV.2.6**, le choix de $M_n = (\ln n)^\gamma$ a été fait ici pour obtenir une sommation sur un ensemble d'indices ne dépendant pas de γ. D'autres choix sont aussi possibles. Par exemple, si on a $0 < \gamma < 1$, on peut prendre $M_n = n^\gamma$, qui est alors $o(n)$, et la condition sur k devient $k \leqslant \frac{n^2}{n+1}$, c'est-à-dire $k \leqslant n-1$ (puisque l'on a toujours $n - 1 < \frac{n^2}{n+1} < n$). Pour $0 < \gamma < 1$, la suite des fonctions fractions rationnelles

$$\bar{R}_n^\gamma(x) = \frac{1}{(x+1)^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \, x^k \left(\frac{k}{n-k}\right)^\gamma$$

converge donc uniformément sur tout compact de $[0,+\infty[$ vers la fonction puissance x^γ. Les conditions sur les indices sont plus simples que celles données dans l'exemple **IV.3.6** mais elles ne valent que pour $0 < \gamma < 1$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Opérateurs linéaires et approximation

L'approximation des fonctions bornées par les polynômes de Bernstein [Chapitre **4**] est un exemple de l'approximation d'une fonction h par la suite des images de h par une suite d'endomorphismes (L_n) d'un espace de fonctions $H(X, \mathbb{R})$ [Paragraphe **4.2**].

Plus généralement, on peut approcher h par la suite des images de h par une suite d'*opérateurs* L_n *sur* $H(X, \mathbb{R})$, c'est-à-dire d'applications linéaires de $H(X, \mathbb{R})$ dans l'espace de toutes les fonctions numériques définies sur X. C'est par exemple le cas des *opérateurs de convolution* qui, à toute fonction $h \in H(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, associent la fonction $L_n(h)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$L_n(h) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, h(x-t)\, dt\ .$$

La fonction h doit être prise dans un espace $H(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ particulier pour assurer l'existence de l'intégrale, mais, en général, la fonction $L_n(h)$ n'appartient pas à cet espace.

Pour l'essentiel, les résultats de convergence établis pour les polynômes de Bernstein s'étendent [Korovkin, 1960] à l'approximation des fonctions bornées au moyen d'une suite d'opérateurs vérifiant deux types de conditions :

C1 L'existence dans $H(X, \mathbb{R})$ d'un ensemble $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de *fonctions tests* tel que, pour tout $\alpha \in A$, la suite $(L_n(h_\alpha))$ converge (en un sens à préciser) vers h_α.

C2 La *positivité* des opérateurs L_n, c'est-à-dire le fait que l'image par L_n d'une fonction positive [24] est positive.

Cette théorie souffre du même défaut que celle des polynômes de Bernstein : le hiatus entre un théorème de convergence simple en un point où h est continue et un théorème de convergence uniforme sur tout compact lorsque h est continue. Comme pour les polynômes de Bernstein, la convergence locale fait le lien entre les deux résultats : sous les hypothèses usuelles, on montre qu'il y a convergence locale de $(L_n(h))$ vers h en un point où h est continue ; la convergence uniforme sur tout compact lorsque h est continue en est une conséquence.

Même ainsi renforcée, la théorie de l'approximation par des suites d'opérateurs n'est pas entièrement satisfaisante. Si une condition du type **C1** est admissible, puisque, pour un choix correct des fonctions tests, elle exprime une condition nécessaire, il n'en va pas de même de la condition **C2**, qui n'est pas nécessaire. Par exemple, sur l'espace des fonctions périodiques de période 2π, à variation bornée sur tout compact, les *opérateurs de Dirichlet* D_n, qui à h associent la n-ième somme partielle de la série de Fourier de h, ne sont pas positifs alors que $(D_n(h))$ converge localement vers h en tout point où h est continue [Zygmund, 1952].

(24) Une fonction h sera dite positive sur un sous-ensemble X' de X si, pour tout $x \in X'$, on a $h(x) \geqslant 0$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

En localisant l'étude de la convergence de $(L_n(h))$ grâce à la convergence locale, on peut remplacer la condition de positivité par une condition nécessaire, la *semi-positivité en un point* [Définition **V.1.3**]. Avec une condition **C1** convenable [Définitions **V.1.8**], on obtient alors des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point où h est continue [Théorème **V.1.9**]. Une extension de ces résultats aux espaces de fonctions à valeurs vectorielles est donnée au paragraphe **5.3** et dans l'annexe **E**.

Étant donné un opérateur L sur un espace de fonctions $H(X,\mathbb{R})$, on note $L(h;x)$ la valeur au point x de la fonction $L(h)$, image de h par L.

On note $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles d'une variable réelle — mais pas des classes de fonctions — dont la valeur absolue est de puissance p-ième intégrable sur $\mathbb{R}$.

Sauf mention expresse du contraire, les espaces de fonctions considérés ne sont pas munis d'une topologie. En conséquence, aucune hypothèse de continuité n'est imposée aux opérateurs sur ces espaces : le mot « opérateur » est à prendre au sens purement algébrique.

1. — Approximation locale d'une fonction

Étant donné un espace $H(X,\mathbb{R})$ de fonctions réelles définies sur X et un sous-espace $H_0(X,\mathbb{R})$ de $H(X,\mathbb{R})$, on cherche des conditions pour qu'une suite (L_n) d'opérateurs linéaires sur $H(X,\mathbb{R})$ soit *approximante au point a sur* $H_0(X,\mathbb{R})$, *c'est-à-dire soit telle que, pour toute fonction* $h \in H_0(X,\mathbb{R})$, *la suite* $(L_n(h))$ *converge localement vers h au point a.*

Il est facile de voir sur un exemple simple que la positivité des opérateurs n'est pas une condition nécessaire pour qu'une suite d'opérateurs soit approximante en un point :

Exemple V.1.1. Soit $H(X,\mathbb{R}) = B(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions réelles bornées sur $\mathbb{R}$, et soit L_n l'opérateur défini sur $B(\mathbb{R})$ par

$$L_n(h;x) = h(x) - \frac{1}{n}h(x+1).$$

La suite (L_n) est approximante en tout point sur $H(X,\mathbb{R})$, mais, même restreint au sous-espace des fonctions continues, aucun opérateur L_n n'est positif.

Démonstration. **a)** Étant donné une fonction $h \in B(\mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |L_n(h;x) - h(x)| = \frac{1}{n}\,|h(x+1)| \leqslant \frac{1}{n}\,\|h\|_\infty\,,$$

la suite $(L_n(h))$ converge donc uniformément vers h sur $\mathbb{R}$ et, a fortiori, converge localement en tout point de $\mathbb{R}$ [Théorème **I.2.1**].

b) Soit h la fonction continue et bornée définie par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1\,. \end{cases}$$

h est positive et $L_n(h;0) = h(0) - \dfrac{1}{n}h(1) = -\dfrac{1}{n} < 0$, donc aucun opérateur L_n n'est positif. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

En explicitant la convergence locale vers h au point a de la suite $(L_n(h))$ des images d'une fonction positive, plus généralement d'une fonction positive au voisinage de a, on met en évidence une propriété différente :

Proposition V.1.2. *Soient $H(X,\mathbb{R})$ un espace de fonctions réelles définies sur X, $H_0(X,\mathbb{R})$ un sous-espace de $H(X,\mathbb{R})$ et (L_n) une suite d'opérateurs linéaires sur $H(X,\mathbb{R})$.*
Si (L_n) est approximante en un point a sur $H_0(X,\mathbb{R})$, pour toute fonction $h \in H_0(X,\mathbb{R})$ positive au voisinage du point a, la suite $(L_n(h))$ vérifie la propriété suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait $L_n(h;x) \geqslant -\varepsilon$ pour $x \in V$ et $n \geqslant N$.

Démonstration. Soit h une fonction appartenant à $H_0(X,\mathbb{R})$, positive sur un voisinage V' de a.

Si la suite (L_n) est approximante au point a sur $H_0(X,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe donc un voisinage V'' de a et un entier N tels que l'on ait $|L_n(h;x) - h(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in V''$ et $n \geqslant N$; la fonction h étant positive sur V', on a donc $L_n(h;x) \geqslant h(x) - \varepsilon \geqslant -\varepsilon$ pour $x \in V' \cap V''$ et $n \geqslant N$. □

La suite $(L_n(h))$ doit donc être « presque positive" au voisinage de a, au sens qui vient d'être indiqué. On retient cette propriété locale comme nouvelle condition **C2** :

Définition V.1.3. *Soit $H(X,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur un espace topologique X et $H_0(X,\mathbb{R})$ un sous-espace de $H(X,\mathbb{R})$. Étant donné un point a de X, une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$ est dite* semi-positive au point a sur $H_0(X,\mathbb{R})$ *si, pour toute fonction $h \in H_0(X,\mathbb{R})$ positive au voisinage du point a, la suite $(L_n(h))$ vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon,\ \exists V \in \mathscr{V}_X(a),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in \mathscr{V}_X(a),\ L_n(h;x) \geqslant -\varepsilon\,.$$

Exemple V.1.4. Soit $H(X,\mathbb{R}) = \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, avec $1 < p \leqslant +\infty$, et soit (g_n) une suite de fonctions essentiellement [25] positives, appartenant à $\mathscr{L}^q(\mathbb{R})$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\geqslant\alpha} g_n^q(t)\,dt = 0,$$

alors, quel que soit le point $a \in X$, la suite (L_n) des opérateurs définis sur $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ par

$$L_n(h;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,h(x-t)\,dt$$

est semi-positive au point a sur $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

(25) C'est-à-dire presque partout.
On dit que la fonction f *essentiellement positive* sur le sous-ensemble S *est essentiellement bornée* sur S s'il existe un nombre $M > 0$ tel que f soit presque partout majorée sur S par M. La borne inférieure de l'ensemble des nombres M possédant cette propriété est appelée *borne supérieure essentielle de f sur S* et est notée $\sup_{t\in S}\text{.ess.}\ |f(t)|$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Soit h une fonction appartenant à $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, positive au voisinage du point a. Soit $\alpha > 0$ tel que l'on ait $h(s) \geqslant 0$ pour $|s-a| \leqslant 2\alpha$.
Si $|x-a| \leqslant \alpha$ et $|t| \leqslant \alpha$, on a donc $h(x-t) \geqslant 0$; la fonction g_n étant essentiellement positive, on a

$$L_n(h;x) = \int_{|t|\leqslant\alpha} g_n(t)\ h(x-t)\ dt + \int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\ h(x-t)\ dt \geqslant \int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(x)\ h(x-t)\ dt$$

et l'inégalité de Hölder entraîne alors que

$$L_n(h;x) \geqslant -\left(\int_{|t|\geqslant\alpha} g_n^q(x)\ dt\right)^{\frac{1}{q}} \|h\|_p \quad \text{pour} \quad |x-a| < \alpha\ .$$

Par hypothèse, le minorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; il existe donc N tel que l'on ait $L_n(h;x) \geqslant -\varepsilon$ pour $|x-a| \leqslant \alpha$ et $n \geqslant N$. □

Remarque. On peut étendre ce résultat au cas $p = 1$ et $q = +\infty$ en remplaçant l'hypothèse faite sur les fonctions g_n par « pour tout α, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|t|\geqslant\alpha}.\text{ess.}\ |g_n(t)| = 0$".

Dans l'exemple précédent, la suite d'opérateurs (L_n) est à la fois positive et semi-positive en tout point. En général, ces notions sont étrangères l'une à l'autre : la positivité des opérateurs n'entraîne pas la semi-positivité de la suite [Exemple **V.1.5**] et la semi-positivité de la suite en tout point n'entraîne pas la positivité des opérateurs [Exemple **V.1.6**] :

Exemple V.1.5. Sur l'espace $C(\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$, la suite des opérateurs positifs définis par :

$$L_n(h;x) = h(x) + \frac{1}{n}h(x+n)$$

n'est semi-positive en aucun point a.

Démonstration. La fonction $h \in C(\mathbb{R})$, définie par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a+1 \\ a+1-t & \text{si} \quad t \geqslant a+1 \end{cases}$$

est positive au voisinage de a, mais on a :

$$L_n(h;a) = 0 + \frac{1}{n}(1-n) = -1 + \frac{1}{n}$$

qui, pour $\varepsilon \in]0,1[$, n'est pas supérieur à $-\varepsilon$ quand n tend vers l'infini. □

Exemple V.1.6. La suite d'opérateurs sur $B(\mathbb{R})$ de l'exemple **V.1.1** est semi-positive sur $B(\mathbb{R})$ en tout point mais on a montré qu'aucun de ces opérateurs n'était positif.

Démonstration. Si $h \in B(\mathbb{R})$ est positive sur un voisinage V de a, on a

$$\forall x \in V,\ L(h;x) = h(x) - \frac{1}{n}h(x+1) \geqslant -\frac{1}{n}\ h(x+1) \geqslant -\frac{1}{n}\ \|h\|_\infty\ .$$

Donc $L_n(h;x) \geqslant -\varepsilon$ pour $x \in V$ et $n \geqslant \|h\|_\infty / \varepsilon$. □

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

La semi-positivité a été exprimée en des termes la rendant aussi intuitive que possible. Ce n'est cependant pas sous cette forme qu'elle est utilisée dans les démonstrations, mais sous une forme dérivée qui lui est équivalente :

Lemme V.1.7. *Soit (L_n) une suite d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$, semi-positive au point a sur le sous-espace $H_0(X,\mathbb{R})$, et soient h et k deux fonctions appartenant à $H_0(X,\mathbb{R})$. Si $|h| \leqslant k$ au voisinage de a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait*

$$|L_n(h;x)| \leqslant L_n(k;x) + \varepsilon \quad \textit{pour } x \in V \textit{ et } n \geqslant N\,.$$

Démonstration. Si on a $|h| \leqslant k$ au voisinage de a, les fonctions $k-h$ et $k+h$ sont positives au voisinage de a. Elles appartiennent à $H_0(X,\mathbb{R})$ et (L_n) est semi-positive au point a sur $H_0(X,\mathbb{R})$: quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe donc un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait

$$L_n(k-h;x) \geqslant -\varepsilon \text{ et } L_n(k+h;x) \geqslant -\varepsilon \quad \text{pour } x \in V \text{ et } n \geqslant N.$$

Par linéarité de L_n, on a donc

$$L_n(h;x) \leqslant L_n(k;x) + \varepsilon \text{ et } -L_n(h;x) \leqslant L_n(k;x) + \varepsilon \quad \text{pour } x \in V \text{ et } n \geqslant N,$$

d'où le résultat. □

Définition V.1.8. *Soit $H(X,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur un espace topologique X. Un point a étant fixé, soit $H_a(X,\mathbb{R})$ le sous-espace de $H(X,\mathbb{R})$ des fonctions continues au point a.*

(1) *$H(X,\mathbb{R})$ est dit* localisable au point *a s'il existe $\varphi_a \in H_a(X,\mathbb{R})$ telle que $\varphi_a(a) = 1$.*

(2) *Si $H(X,\mathbb{R})$ est localisable au point a, une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$ est dite* localisante au point *a si la suite $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a.*

Théorème V.1.9. *Soit $H(X,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur un espace topologique X, soit a un point de X et soit $H_a(X,\mathbb{R})$ le sous-espace de $H(X,\mathbb{R})$ constitué des fonctions continues au point a.*
Si $H(X,\mathbb{R})$ est localisable au point a, étant donné une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *La suite (L_n) est semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et elle est localisante au point a.*

(ii) *La suite (L_n) est approximante au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii)
Soit h une fonction appartenant à $H_a(X,\mathbb{R})$. Les fonctions h et $h(a)\varphi_a$ sont localement équivalentes au point a puisque $h - h(a)\varphi_a$ est continue et nulle au point a [Définition **I.1.6**]. Pour montrer que $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a, il suffit donc de montrer que $(L_n(h))$ converge localement vers $h(a)\varphi_a$ au point a [Proposition **I.1.7**].
On a $L_n(h) = L_n\left(h - h(a)\varphi_a\right) + h(a)L_n(\varphi_a)$ et, la suite (L_n) étant localisante au point a, $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a ; pour montrer que $(L_n(h))$ converge localement vers $h(a)\varphi_a$, il suffit donc de montrer que $(L_n\left(h - h(a)\varphi_a\right))$ converge localement vers 0 au point a.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Soit $k = h - h(a)\varphi_a$; la fonction k/φ_a étant définie continue au voisinage de a et étant nulle en ce point, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un voisinage de a sur lequel $|k(x)| \leqslant \varepsilon\varphi_a(x)$ puisque $\varphi_a(a) > 0$. La suite (L_n) étant semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et les fonctions k et $\varepsilon\varphi_a$ appartenant à $H_a(X,\mathbb{R})$, le lemme **V.1.7** entraîne qu'il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait

$$|L_n(k;x)| \leqslant L_n(\varepsilon\varphi_a;x) + \varepsilon = \varepsilon\,(L_n(\varphi_a;x)+1) \quad \text{pour } x \in V \text{ et } n \geqslant N\,.$$

Par hypothèse, la suite $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a et la fonction φ_a est continue au point a. Le corollaire **II.3.5** entraîne alors qu'il existe un voisinage V' de a et un entier N' tels que, pour $x \in V'$ et $n \geqslant N'$, on ait

$$|L_n(\varphi_a;x) - 1| = |L_n(\varphi_a;x) - \varphi_a(a)| \leqslant 1, \qquad \text{donc } |L_n(\varphi_a;x)| \leqslant 2\,.$$

On obtient donc

$$|L_n(k;x)| \leqslant \varepsilon\,(L_n(\varphi_a;x)+1) \leqslant 3\varepsilon \quad \text{pour } x \in V \cap V' \text{ et } n \geqslant \max\{N,N'\}\,,$$

ce qui démontre que la suite $(L_n(k))$ converge localement vers 0 au point a.

(ii) ⇒ (i)

a) La semi-positivité au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ est une condition nécessaire pour que la suite (L_n) soit approximante au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ [Proposition **V.1.2**].
b) La fonction φ_a appartenant à $H_a(X,\mathbb{R})$, la proposition **(ii)** entraîne que $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a, donc que (L_n) est localisante au point a. □

Application V.1.10. Soient $H(X,\mathbb{R}) = \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, avec $1 < p \leqslant +\infty$ et (g_n) une suite de fonctions essentiellement positives appartenant à $\mathscr{L}^q(\mathbb{R})$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si, pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\geqslant\alpha} g_n^q(t)\,dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{|t|\leqslant\alpha} g_n(t)\,dt = 1,$$

la suite (L_n) d'opérateurs de convolution définis sur $\mathscr{L}^p(R)$ par

$$L_n(h;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,h(x-t)\,dt$$

est telle que, quelle que soit la fonction $h \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de continuité de h.

Démonstration. La suite (L_n), étant semi-positive sur $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ [Exemple **V.1.4**], est semi-positive au point a sur le sous-espace $\mathscr{L}^p_a(\mathbb{R})$ des fonctions continues au point a appartenant à $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.
L'espace $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ contient la fonction caractéristique φ_a de $[a-1,a+1]$, donc est localisable au point a. Il suffit de montrer que $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a et d'appliquer le théorème **V.1.9**. On a :

$$L_n(\varphi_a;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\varphi_a(x-t)\,dt = \int_{x-a-1}^{x-a+1} g_n(t)\,dt$$

et, pour $|x-a| \leqslant 1/2$, on a

$$-3/2 \leqslant x-a-1 \leqslant -1/2 \quad \text{et} \quad 1/2 \leqslant x-a+1 \leqslant 3/2.$$

Les fonctions g_n étant essentiellement positives, on a donc l'encadrement

$$\int_{-1/2}^{+1/2} g_n(t)\,dt \leqslant L_n(\varphi_a;x) \leqslant \int_{-3/2}^{+3/2} g_n(t)\,dt\,.$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

La suite des minorants et la suite des majorants tendant toutes les deux vers 1 et étant indépendantes de x, il en résulte que la suite $(L_n(\varphi_a))$ converge uniformément vers 1 sur le segment $[a-1/2, a+1/2]$, donc converge localement vers φ_a au point a [Théorème **I.2.1**]. □

Remarque 1. On peut étendre le résultat au cas $p = 1$ et $q = +\infty$ sous les hypothèses suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname*{sup.ess.}_{|t|\geqslant\alpha} |g_n(t)| = 0 \text{ pour tout } \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{|t|\leqslant 1} g_n(t)\, dt = 1\,.$$

Remarque 2. Par mesure de simplicité et souci de symétrie, les hypothèses faites sur les fonctions g_n sont redondantes. On montre facilement qu'elles pourraient être remplacées par

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\geqslant\alpha} g_n^q(t)\, dt = 0 \text{ pour tout } \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{|t|\leqslant 1} g_n(t)\, dt = 1$$

ou par

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\geqslant 1} g_n^q(t)\, dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{|t|\leqslant\alpha} g_n(t)\, dt = 1 \text{ pour tout } \alpha > 0\,.$$

Exemple V.1.11. Soit γ une fonction réelle continue, définie sur $I = [-1,1]$, vérifiant $\gamma(0) = 1$ et $0 \leqslant \gamma(t) < 1$ pour $t \neq 0$. Soit (L_n) la suite des opérateurs définis sur $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ par

$$L_n(h;x) = \frac{1}{c_n} \int_{-1}^{+1} \gamma^n(t)\, h(x-t)\, dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où c_n désigne la valeur de l'intégrale de γ^n sur I.
Quelle que soit la fonction $h \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de continuité de h ; si la fonction h est continue, il y a convergence locale en tout point, donc convergence uniforme sur tout compact [Théorème **I.2.3**].

Démonstration. Les opérateurs L_n sont les opérateurs de convolution associés aux fonctions positives $g_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ définies par

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \\ \dfrac{1}{c_n}\gamma^n(t) & \text{si} \quad |t| \leqslant 1 \end{cases}$$

Il suffit de vérifier que ces fonctions satisfont aux hypothèses de l'application **V.1.10** pour $q = 1$, qui sont évidentes pour $\alpha \geqslant 1$ et démontrées par le lemme suivant pour $\alpha \in]0,1[$: □

Lemme V.1.12. [Korovkin, 1960, Lemme 2]. *Soit γ une fonction réelle continue, définie sur $I = [-1,+1]$, telle que l'on ait*

$$\gamma(0) = 1 \quad \textit{et} \quad 0 \leqslant \gamma(t) < 1 \textit{ pour } t \neq 0\,.$$

Alors, quel que soit le réel α vérifiant $0 < \alpha < 1$, on a, si c_n désigne la valeur de l'intégrale sur I de γ^n,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} \int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant 1} \gamma^n(t)\, dt = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} \int_{|t|\leqslant\alpha} \gamma^n(t)\, dt = 1\,.$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. On fixe $\alpha \in]0,1[$.

a) Soit M le maximum de γ sur le compact $[-1,-\alpha]\cup[\alpha,1]$. On a

$$0 \leqslant \int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant 1} \gamma^n(t)\,dt \leqslant \int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant 1} M^n\,dt < 2M^n\,.$$

Le maximum M est atteint, donc est strictement inférieur à 1. Soit M' tel que l'on ait $M < M' < 1$; la fonction γ valant 1 au point 0 et étant continue, il existe $\beta > 0$ tel que l'on ait $\gamma(t) \geqslant M'$ si $|t| \leqslant \beta$. La fonction γ étant positive, on a donc

$$c_n = \int_{-1}^{+1} \gamma^n(t)\,dt \geqslant \int_{|t|\leqslant\beta} \gamma^n(t)\,dt \geqslant 2\beta M'^n\,.$$

Il en résulte que l'on a

$$0 \leqslant \int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\,dt = \frac{1}{c_n}\int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant 1} \gamma^n(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{M'}\right)^n,$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant 1} g_n(t)\,dt = 0$.

b) L'intégrale de g_n valant 1, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|t|\leqslant\alpha} g_n(t)\,dt = 1 - \lim_{n\to\infty}\int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant 1} g_n(t)\,dt = 1\,. \qquad \square$$

Exemple V.1.13. Soit (F_n) la suite des opérateurs de Fejér, définis sur $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ par

$$F_n(h;x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,h(x-t)\,dt\,.$$

Quelle que soit la fonction $h \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, la suite $(F_n(h))$ converge localement vers h en tout point de continuité de h.

Démonstration. Les fonctions positives g_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > \pi \\ \dfrac{1}{2n\pi}\dfrac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} & \text{si} \quad \pi \geqslant |t| > 0 \\ \dfrac{n}{2\pi} & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

appartiennent à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et $F_n(h)$ est le produit de convolution de g_n et de h. On vérifie que les fonctions g_n satisfont aux hypothèses de l'application **V.1.10** pour $q = 1$:

a) Pour $\alpha \geqslant \pi$, on a $\int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\,dt = 0$.

Pour $\alpha \in]0,\pi[$, on a

$$0 \leqslant \int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\,dt = \frac{1}{2n\pi}\int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,dt \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{\sin^2(\alpha/2)},$$

donc $\int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$0 \leqslant \int_{|t|\leqslant\alpha} g_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{+\pi} g_n(t)\,dt - \int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\,dt\,.$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Or, l'intégrale du noyau de Fejér est égale à 1. En effet, pour $n > 1$ et $|t| \in]0, \pi]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} &= \frac{1-\cos nt}{1-\cos t} = \frac{2-e^{\imath nt}-e^{-\imath nt}}{2-e^{\imath t}-e^{-\imath t}} = \frac{(1-e^{\imath nt})(1-e^{-\imath nt})}{(1-e^{\imath t})(1-e^{-\imath t})} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\imath kt}\right)\left(\sum_{h=0}^{n-1} e^{-\imath ht}\right) \\
&= n + \sum_{0\leqslant h<k\leqslant n-1} \left(e^{\imath(k-h)t} + e^{-\imath(k-h)t}\right), \\
\text{et donc } \int_{-\pi}^{+\pi} g_n(t)\,dt &= 1 + \frac{1}{n\pi} \sum_{0\leqslant h<k\leqslant n-1} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(k-h)t\,dt \\
&= 1 + \frac{1}{n\pi} \sum_{0\leqslant h<k\leqslant n-1} \frac{1}{k-h} \left[\sin(k-h)t\right]_{-\pi}^{+\pi} = 1\,.
\end{aligned}$$

a) entraîne alors que $\int_{|t|\leqslant\alpha} g_n(t)\,dt$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. □

Remarque. Si la fonction h est continue, la suite $(F_n(h))$ converge localement en tout point, donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ [Théorème **I.2.3**]. Si de plus la fonction h est périodique de période T les fonctions $F_n(h)$ sont périodiques de période T et convergent uniformément vers h sur tout intervalle de longueur T ; la suite $(F_n(h))$ converge donc uniformément vers h sur $\mathbb{R}$. Pour $T = 2\pi$, on retrouve le théorème de convergence des sommes de Fejér d'une fonction 2π-périodique continue [*cf.* Exemple **VI.2.6**].

2. — Observations critiques sur le théorème V.1.9

Si certaines hypothèses du théorème **V.1.9** sont incontournables, comme la semi-positivité de la suite (L_n), certaines autres peuvent paraître artificielles. Nous allons passer en revue certaines des questions qui peuvent se poser à propos de ces choix :

1) Pourquoi imposer à h d'être continue au point a ?

Dans la proposition **(i)** du théorème, l'hypothèse de semi-positivité de la suite (L_n) n'est formulée que pour les fonctions continues au point a, alors qu'elle pourrait l'être pour des fonctions plus générales. L'exemple suivant montre que ce n'est cependant pas cette restriction, en apparence arbitraire, qui impose de ne considérer que des fonctions continues au point a dans la proposition **(ii)** du théorème.

Exemple V.2.1. Soit $H(X, \mathbb{R}) = B(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions réelles bornées sur $\mathbb{R}$, et soit L_n l'opérateur défini sur $B(\mathbb{R})$ par

$$L_n(h; x) = h(x + 1/n) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

L'espace $B(\mathbb{R})$ est localisable en tout point, les opérateurs L_n sont positifs, la suite (L_n) est semi-positive sur $B(\mathbb{R})$ et localisante en tout point, mais, en général, $(L_n(h))$ ne converge pas simplement vers h, a fortiori ne converge pas localement vers h, en un point où h n'est pas continue.

© Spartacus-Idh 2025
www.spartacus-idh.com

Démonstration. a) L'espace $B(\mathbb{R})$ contient la fonction $1_{\mathbb{R}}$, constante de valeur 1, donc $B(\mathbb{R})$ est localisable en tout point.

b) La positivité de L_n sur $B(\mathbb{R})$ est évidente.

c) Si $h \in B(\mathbb{R})$ est positive au voisinage de a, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $h(x) \geqslant 0$ pour $|x-a| \leqslant 2\alpha$; on a alors $h(x+1/n) \geqslant 0$ pour $|x-a| \leqslant \alpha$ et $n \geqslant 1/\alpha$, donc la suite (L_n) est semi-positive au point a sur $B(\mathbb{R})$.

d) La suite de terme général $L_n(1_{\mathbb{R}}) = 1_{\mathbb{R}}$ converge localement vers $1_{\mathbb{R}}$, donc la suite (L_n) est localisante en tout point.

e) Soit h la fonction bornée définie par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

On a $L_n(h;0) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(h;0) = 1$, qui est différent de $h(0) = 0$. Comme il n'y a pas convergence simple au point a, il n'y a pas non plus convergence locale en ce point. □

2) Être une suite localisante ne semble pas être une propriété intrinsèque.

La définition d'une suite d'opérateurs localisante en un point a dépend du choix de la fonction φ_a. Rien, a priori, ne permet de supposer que, pour un autre choix de cette fonction, la suite d'opérateurs aurait la même propriété.

C'est cependant le cas si on ne considère que les suites d'opérateurs semi-positives au point a. En effet, dans ce cas, si (L_n) est localisante au point a pour un choix de la fonction φ_a, le théorème **V.1.9** entraîne que la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a pour toute fonction $h \in H_a(X,\mathbb{R})$, donc en particulier, pour un autre choix de la fonction φ_a : la suite (L_n) est donc localisante relativement à n'importe quel choix de la fonction test.

3) Pourquoi ne rien dire de la convergence des opérateurs L_n ?

Soit $H_*(X,\mathbb{R})$ un sous-espace constitué d'applications continues $h \in H(X,\mathbb{R})$. Si $H(X,\mathbb{R})$ est localisable en tout point de X et si une suite d'opérateurs (L_n) vérifie en tout point de X les conditions **(i)** du théorème **V.1.9**, quelle que soit $h \in H_*(X,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de X. Cette suite converge donc uniformément sur tout compact de X [Théorème **I.2.3**], ce qui signifie que la suite des restrictions à $H_*(X,\mathbb{R})$ des opérateurs L_n converge simplement vers l'injection canonique J de $H_*(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^X$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X.

On va montrer sur un exemple ($X = \mathbb{R}$) qu'on ne peut améliorer la nature de la convergence.
On prend pour $H_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le sous-espace $HB_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme ; c'est un espace métrique pour la distance définie par

$$\forall (h,k) \in HB_*(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times HB_*(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \delta_*(h,k) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x) - k(x)|\,.$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est métrisable grâce à la distance δ définie par

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \delta(h,k) = \sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{2^p} \min \left\{ 1, \sup_{x \in K_p} |h(x) - k(x)| \right\},$$

où le compact K_p est le segment $[-p,+p]$ [Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables*, p.149].
Si la suite des restrictions des opérateurs L_n convergeait vers l'application J uniformément sur tout compact de l'espace métrique $HB_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$, elle convergerait localement vers J sur $HB_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [Corollaire **I.2.7**]. Comme l'application J est continue de $HB_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il faudrait [Théorème **II.3.9**] que, pour toute suite (h_n) de $HB_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convergeant uniformément vers h, la suite $(L_n(h_n))$ converge uniformément sur tout compact vers $J(h) = h$. Ce n'est pas le cas en général :

Exemple V.2.2. Soit $H(\mathbb{R},\mathbb{R}) = Lip(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ et soit L_n l'opérateur défini sur $Lip(\mathbb{R})$ par

$$L_n(h;x) = h(x) + \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (h(x+\alpha_{i,n}) - h(x+\beta_{i,n})) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_{i,n} = 2i/n^2 \\ \beta_{i,n} = (2i+1)/n^2 \end{cases}.$$

L'espace $Lip(\mathbb{R})$ est localisable, pour tout $h \in Lip(\mathbb{R})$ la suite $(L_n(h))$ converge uniformément vers h, la suite (L_n) est semi-positive et localisante en tout point ; cependant il existe des suites (h_n) de fonctions bornées appartenant à $Lip(\mathbb{R})$ qui convergent uniformément et sont telles que les suites $(L_n(h_n))$ ne convergent même pas simplement.

Démonstration. a) $Lip(\mathbb{R})$ est localisable : on prend pour φ_a la fonction constante de valeur 1. On a, pour tout n, $L_n(\varphi_a) = \varphi_a$. La suite (L_n) est donc localisante.

b) Soit $h \in Lip(\mathbb{R})$ et soit λ sa constante de Lipschitz. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |L_n(h;x) - h(x)| &\leqslant \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |h(x+\alpha_{i,n}) - h(x+\beta_{i,n})| \\ &\leqslant \lambda \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_{i,n} - \beta_{i,n}| = \lambda \frac{n+1}{n^2}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

- $(L_n(h))$ converge uniformément vers h ;
- (L_n) est semi-positive au voisinage d'un point a ; en effet, si h est positive sur un voisinage V d'un point a, on a pour tout $x \in V$

$$L_n(h;x) \geqslant h(x) - \lambda\, \frac{n+1}{n^2} \geqslant -\lambda\, \frac{n+1}{n^2},$$

et $L_n(h;x) \geqslant -\varepsilon$ pour $x \in V$ et tout n tel que $\lambda\ (n+1)/n^2 < \varepsilon$. Il en résulte que la suite localisante (L_n) vérifie les conditions **(i)** du théorème **V.1.9**.

c) Soit h_n la fonction continue, affine sur les intervalles $[\alpha_{i,n}, \beta_{i,n}]$ et $[\beta_{i,n}, \alpha_{i+1,n}]$ avec $i \in \mathbb{Z}$, telle que $h_n(\alpha_{i,n}) = 1/n$ et $h_n(\beta_{i,n}) = -1/n$. Les fonctions h_n sont bornées et lipschitziennes de rapport $\lambda_n = 2n$; la suite (h_n) converge uniformément vers 0 puisque $\|h_n\|_\infty = 1/n$, mais

$$\lim_{n\to\infty} L_n(h_n;0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \frac{2}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n} \right) = 2. \qquad \square$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3. — Extension aux applications à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Une étude directe de la convergence des suites d'opérateurs sur un espace d'applications à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est possible [Annexe **E**] ; elle conduit à un résultat [Proposition **E.2.6**] analogue au théorème **V.1.9**, mais elle souffre des difficultés inhérentes à l'analyse dans les espaces vectoriels topologiques ordonnés.

Moyennant une hypothèse simplificatrice sur $H(X,\mathbb{R}^p)$, [Hypothèse **V.3.1**], on peut ramener cette étude à un simple corollaire du théorème **V.1.9**. C'est l'option retenue ici.

Hypothèse V.3.1. On suppose qu'une application appartient à $H(X,\mathbb{R}^p)$ si et seulement si ses composantes appartiennent à un même espace $H(X,\mathbb{R})$ de fonctions de X dans $\mathbb{R}$.

Sous cette hypothèse, l'espace $H(X,\mathbb{R}^p)$ s'identifie à l'espace produit $(H(X,\mathbb{R}))^p$. En identifiant $(\mathbb{R}^p)^X$ avec $\left(\mathbb{R}^X\right)^p$, un opérateur L sur $H(X,\mathbb{R}^p)$ peut être représenté par une matrice $\left[L^{ij}\right]$ d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$ de la manière suivante : si on note $h_1, h_2, \dots, h_p$ les composantes d'une application h appartenant à $H(X,\mathbb{R}^p)$ et $L^1(h), L^1(h), \dots, L^p(h)$ les composantes de l'application $L(h)$, on a

$$L^i(h) = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} L^{ij}(h^j)\ .$$

Définition V.3.2. *Soit $H(X,\mathbb{R})$ un espace d'applications de X dans $\mathbb{R}$, localisable au point a. Une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$ est dite* annulante au point *a si, avec les notations de la définition **V.1.8**, la suite $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers 0 au point a.*

Lemme V.3.3. *On désigne par X un espace topologique, par a un point de X et par $H(X,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur X.*
Si $H(X,\mathbb{R})$ est localisable au point a, pour toute suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *La suite (L_n) est semi-positive au point a sur le sous-espace $H_a(X,\mathbb{R})$ de $H(X,\mathbb{R})$ constitué des fonctions continues en a et elle est annulante au point a.*

(ii) *Quelle que soit la fonction h appartenant à $H_a(X,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers 0 au point a.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii)
Soit J l'injection canonique de $H(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^X$. La suite (L_n) étant semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et annulante au point a, la suite d'opérateurs $(J+L_n)$ est semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et localisante au point a. Le théorème **V.1.9** entraîne alors que, quelle que soit la fonction h appartenant à $H_a(X,\mathbb{R})$, la suite $(h+L_n(h))$ converge localement vers h au point a, donc que $(L_n(h))$ converge localement vers 0 au point a.

(ii) ⇒ (i)
La suite L_n est évidemment annulante. Elle est semi-positive sur $H_a(X,\mathbb{R})$ puisque, quelle que soit la fonction $h \in H_a(X,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ convergeant localement vers 0 au point a, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a dans X tel que l'on ait $|L_n(h;x)| \leqslant \varepsilon$, donc, en particulier $L_n(h;x) \geqslant -\varepsilon$ pour $x \in V$ et $n \geqslant N$. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Théorème V.3.4. *Soient X un espace topologique, a un point de X et $H(X,\mathbb{R}^p)$ un espace d'applications vérifiant l'hypothèse* **V.3.1**.

Si $H(X,\mathbb{R})$ est localisable au point a, étant donné une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R}^p)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *Pour tout i, la suite $\left(L_n^{ii}\right)$ est semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et elle est localisante au point a.*
Pour tout $i \neq j$, la suite $\left(L_n^{ij}\right)$ est semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et elle est annulante au point a.

(ii) *Quelle que soit la fonction h appartenant à $H_a(X,\mathbb{R}^p)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii)
La suite $\left(L_n^{ii}\right)$ étant semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et localisante au point a, le théorème **V.1.9** entraîne que, quelle que soit la fonction h appartenant à $H_a(X,\mathbb{R}^p)$, la suite $\left(L_n^{ii}(h^i)\right)$ converge localement vers h^i au point a.

Pour $i \neq j$, la suite (L_n^{ij}) étant semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et annulante au point a, le lemme **V.3.3** entraîne que, quelle que soit la fonction h appartenant à $H_a(X,\mathbb{R}^p)$, la suite $\left(L_n^{ij}(h^j)\right)$ converge vers 0 au point a.

Il en résulte que, pour tout indice i, la suite des i-ièmes composantes de $L_n(h)$,

$$L_n^i(h) = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} L_n^{ij}(h^j),$$

converge localement vers h^i au point a. La suite $(L_n(h))$ converge donc localement vers h au point a [Corollaire **II.1.7**].

(ii) ⇒ (i)
Soit j un indice fixé. Quelle que soit la fonction $\vartheta \in H_a(X,\mathbb{R})$, l'application ϑ_j de X dans $\mathbb{R}^p$, dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la j-ième qui est égale à ϑ, appartient à $H_a(X,\mathbb{R}^p)$ [Hypothèse **V.3.1**]. La suite $\left(L_n(\vartheta_j)\right)$ converge donc localement vers ϑ_j au point a. En passant aux composantes, il vient que

a) Si $i = j$, la suite $\left(L_n^j(\vartheta_j)\right)$ converge localement vers ϑ au point a. Or, on a

$$L_n^j(\vartheta_j) = \sum_{1\leqslant k\leqslant p} L_n^{jk}(\vartheta_j^k) = L_n^{jj}(\vartheta),$$

donc la suite $\left(L_n^{jj}(\vartheta)\right)$ converge localement vers ϑ au point a, quelle que soit la fonction $\vartheta \in H_a(X,\mathbb{R})$. Le théorème **V.1.9** entraîne alors que la suite $\left(L_n^{jj}\right)$ est semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et qu'elle est localisante en ce point.

b) Si $i \neq j$, la suite $\left(L_n^i(\vartheta_j)\right)$ converge localement vers 0 au point a. Or, on a

$$L_n^i(\vartheta_j) = \sum_{1\leqslant k\leqslant p} L_n^{ik}(\vartheta_j^k) = L_n^{ij}(\vartheta),$$

donc la suite $\left(L_n^{ij}(\vartheta)\right)$ converge localement vers 0 au point a, quelle que soit la fonction $\vartheta \in H_a(X,\mathbb{R})$. Le lemme **V.3.3** entraîne alors que la suite (L_n^{ij}) est semi-positive au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ et qu'elle est annulante en ce point. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Théorème V.3.5. *X étant un espace topologique, soit $H(X,\mathbb{C})$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de fonctions à valeurs complexes, stable par conjugaison. Soit $H(X,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions appartenant à $H(X,\mathbb{C})$ et ne prenant que des valeurs réelles.*

Si $H(X,\mathbb{R})$ est localisable au point a, une suite (Λ_n) d'opérateurs complexes sur $H(X,\mathbb{C})$ étant donnée, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) ***1)*** *La suite (Λ_n) est* semi-positive au point *a* sur *$H_a(X,\mathbb{R})$ au sens suivant : pour toute fonction h appartenant à $H_a(X,\mathbb{R})$, positive au voisinage de a, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait*

$$\forall x \in V,\ \forall n \geqslant N,\ \mathfrak{Re}\Lambda_n(h;x) \geqslant -\varepsilon \text{ et } \mathfrak{Im}\Lambda_n(h;x) \geqslant -\varepsilon\ .$$

2) *La suite (Λ_n) est* localisante au point *a* sur *$H_a(X,\mathbb{R})$ au sens suivant : la suite $(\Lambda_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a.*

(ii) *Quelle que soit la fonction h appartenant à $H_a(X,\mathbb{C})$, la suite $(\Lambda_n(h))$ converge localement vers h au point a.*

Démonstration. a) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H(X,\mathbb{C})$ étant stable par conjugaison, quelle que soit la fonction $h \in H(X,\mathbb{C})$, la partie réelle et la partie imaginaire de h sont des fonctions appartenant à $H(X,\mathbb{C})$, donc à $H(X,\mathbb{R})$, puisqu'on a

$$\mathfrak{Re}h = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\bar{h} \text{ et } \mathfrak{Im}h = \frac{1}{2\imath}h - \frac{1}{2\imath}\bar{h}\ .$$

Réciproquement, une fonction complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire appartiennent à $H(X,\mathbb{R})$ est un élément de $H(X,\mathbb{C})$, puisque $H(X,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On peut donc identifier

- $H(X,\mathbb{C})$ à l'espace $H(X,\mathbb{R}^2)$ des applications de X dans $\mathbb{R}^2$ dont les composantes appartiennent à $H(X,\mathbb{R})$,
- $H_a(X,\mathbb{C})$ à l'espace $H_a(X,\mathbb{R}^2)$,
- le $\mathbb{R}$-sous-espace $H(X,\mathbb{R})$ de $H(X,\mathbb{C})$ au sous-espace de $H(X,\mathbb{R}^2)$ constitué des applications dont la deuxième composante est nulle.

b) Dans cette identification, un $\mathbb{C}$-opérateur Λ sur $H(X,\mathbb{C})$ devient un $\mathbb{R}$-opérateur

$$\hat{\Lambda} : H(X,\mathbb{R}^2) \to \left(\mathbb{R}^2\right)^X \qquad (h_1,h_2) \mapsto \left(\Lambda^{11}(h_1) + \Lambda^{12}(h_2), \Lambda^{21}(h_1) + \Lambda^{22}(h_2)\right)\ .$$

En exprimant que Λ est $\mathbb{C}$-linéaire, il vient que $\Lambda^{11} = \Lambda^{22}$ et $\Lambda^{21} = -\Lambda^{12}$. L'opérateur $\hat{\Lambda}$ est donc de la forme

$$\hat{\Lambda} : H(X,\mathbb{R}^2) \to \left(\mathbb{R}^2\right)^X \qquad (h_1,h_2) \mapsto (L(h_1) - M(h_2), M(h_1) + L(h_2))\ ,$$

où L et M sont des $\mathbb{R}$-opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$.

Une suite (Λ_n) de $\mathbb{C}$-opérateurs sur $H(X,\mathbb{C})$ étant donnée, on notera (L_n) et (M_n) les suites de $\mathbb{R}$-opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$ qui lui sont associées.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

a) La semi-positivité de (Λ_n) au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$ se traduit ainsi : pour toute fonction h, positive au voisinage de a et appartenant à $H_a(X,\mathbb{R})$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait, pour $x \in V$ et $n \geqslant N$,

$$L_n(h;x) = \mathfrak{Re}\Lambda_n(h;x) \geqslant -\varepsilon \text{ et } M_n(h;x) = \mathfrak{Im}\Lambda_n(h;x) \geqslant -\varepsilon\ .$$

La semi-positivité de (Λ_n) au point a sur $H_a(X;\mathbb{R})$ entraîne donc la semi-positivité de (L_n) et de (M_n) au point a sur $H_a(X,\mathbb{R})$.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2025

b) La convergence locale au point a de $(\Lambda_n(\varphi_a))$ vers φ_a se traduit par la convergence locale au point a de $(L_n(\varphi_a), M_n(\varphi_a))$ vers $(\varphi_a, 0)$, c'est-à-dire la convergence locale au point a de $(L_n(\varphi_a))$ vers φ_a et celle de $(M_n(\varphi_a))$ vers 0 [Corollaire **II.1.7**].
La suite (L_n) est donc localisante au point a et la suite (M_n) est annulante au point a.

c) Le théorème **V.3.4** entraîne alors que, pour tout élément (h_1, h_2) de $H_a(X, \mathbb{R}^2)$, la suite $\left(\hat{\Lambda}_n(h_1, h_2)\right)$ converge localement au point a vers (h_1, h_2), c'est-à-dire que, pour toute fonction $h \in H_a(X, \mathbb{C})$, la suite $(\Lambda_n(h))$ converge localement au point a vers h.

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Si, pour toute fonction $h \in H_a(X, \mathbb{C})$, la suite $(\Lambda_n(h))$ converge localement au point a vers h, alors, pour toute fonction $\vartheta \in H_a(X, \mathbb{R})$, les suites $(L_n(\vartheta))$ et $(M_n(\vartheta))$ convergent localement au point a respectivement vers les fonctions ϑ et 0. On en déduit par le théorème **V.1.9** que (L_n) est semi-positive et localisante au point a sur $H_a(X, \mathbb{R})$ et par le lemme **V.3.3** que (M_n) est semi-positive et annulante au point a sur $H_a(X, \mathbb{R})$.
Les conditions **1)** et **2)** de **(i)** en résultent immédiatement. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Approximation par des opérateurs positifs

Le théorème **V.1.9** ne peut rendre directement compte des résultats classiques de convergence établis pour les suites d'opérateurs positifs : ainsi qu'il en a été fait la remarque au paragraphe **5.1**, la positivité des opérateurs et la semi-positivité de la suite des opérateurs sont des notions étrangères l'une à l'autre. En particulier, la positivité des opérateurs n'entraîne pas la semi-positivité de la suite d'opérateurs, qui est l'une des hypothèses du théorème **V.1.9**.

On pourrait montrer, dans chaque cas particulier, comment se ramener au théorème **V.1.9**. Il a semblé plus économique d'établir une proposition intermédiaire entre les deux types de résultats [Théorème **VI.1.4**] : ses hypothèses entraînent les hypothèses du théorème **V.1.9** et elles sont moins fortes que celles des théorèmes classiques sur les suites d'opérateurs positifs. Le théorème **VI.1.4** est donc un corollaire du théorème **V.1.9** et les théorèmes classiques en sont des applications immédiates [Théorèmes **VI.2.1**, **VI.2.4** et **VI.2.7**].

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

1. — Localisation forte

La condition de semi-positivité au point a sur $H_0(X,\mathbb{R})$ est nécessaire pour qu'une suite d'opérateurs (L_n) soit approximante en ce point sur $H_0(X,\mathbb{R})$ [Proposition **V.1.2**]. Si on veut démontrer qu'une suite (L_n) d'opérateurs positifs est approximante, sans faire l'hypothèse de la semi-positivité, il est donc nécessaire d'avoir des hypothèses complémentaires permettant d'établir la condition de semi-positivité, c'est-à-dire permettant de déterminer le comportement des suites $(L_n(h))$ pour les fonctions h positives au voisinage d'un point a en ne connaissant que le comportement de ces suites pour les fonctions partout positives.

En se restreignant aux fonctions bornées [*cf.* Paragraphe **6.3**], cela est possible [Lemme **VI.1.2**] en renforçant la condition de localisation :

Définition VI.1.1. *Soit $H(X,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur un espace topologique X. Au point a de X, on associe le sous-espace $HB_a(X,\mathbb{R})$ des fonctions bornées, continues au point a et appartenant à $H(X,\mathbb{R})$.*

1) *On dit que $H(X,\mathbb{R})$ est* fortement localisable au point *a si :*

- ***a)*** *il existe une fonction $\varphi_a \in HB_a(X,\mathbb{R})$ telle que $\varphi_a(a) = 1$;*
- ***b)*** *il existe une base $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de voisinages du point a et, pour tout indice $\alpha \in A$, une fonction positive $\vartheta_{a,\alpha} \in HB_a(X,\mathbb{R})$ telle que*

$$\vartheta_{a,\alpha}(a) = 0 \text{ et } \vartheta_{a,\alpha}(x) \geqslant 1 \text{ pour tout } x \in X\setminus V_\alpha \ .$$

2) *Si $H(X,\mathbb{R})$ est fortement localisable au point a, on dit qu'une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$ est* fortement localisante au point *a si :*

- ***a)*** *la suite $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_α au point a ;*
- ***b)*** *pour tout $\alpha \in A$, la suite $(L_n(\vartheta_{a,\alpha}))$ converge localement vers $\vartheta_{a,\alpha}$ au point a.*

Lemme VI.1.2. *Un espace fortement localisable au point a est localisable au point a ; une suite d'opérateurs fortement localisante au point a est localisante en ce point.*

Démonstration. Évident. □

Lemme VI.1.3. *Soit (L_n) une suite d'opérateurs sur l'espace $H(X,\mathbb{R})$, positifs sur $HB_a(X,\mathbb{R})$.*
Si $H(X,\mathbb{R})$ est fortement localisable au point a et si (L_n) est fortement localisante au point a, alors (L_n) est semi-positive au point a sur $HB_a(X,\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour toute fonction $h \in HB_a(X,\mathbb{R})$, positive au voisinage du point a, il existe $\alpha \in A$ tel que h soit positive sur V_α. La fonction $h_\alpha = h + \|h\|_\infty \vartheta_{a,\alpha}$ est alors positive sur X (en vertu de la condition **1) b)**) et appartient à $HB_a(X,\mathbb{R})$.
Les opérateurs L_n étant positifs sur $HB_a(X,\mathbb{R})$, quel que soit $\in X$, on a

$$L_n(h;x) + \|h\|_\infty L_n(\vartheta_{a,\alpha};x) = L_n(h_\alpha;x) \geqslant 0 \quad \text{pour } x \in X \text{ et } n \in N. \qquad (1)$$

Par hypothèse, $(L_n(\vartheta_{a,\alpha}))$ converge localement vers $\vartheta_{a,\alpha}$ au point a ; la fonction $\vartheta_{a,\alpha}$ étant continue au point a, il y a donc convergence continue [Théorème **I.3.3**] : il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait

$$|L_n(\vartheta_{a,\alpha};x)| = |L_n(\vartheta_{a,\alpha};x) - \vartheta_{a,\alpha}(a)| < \varepsilon \quad \text{pour } x \in X \text{ et } n \in N. \qquad (2)$$

Il résulte de (1) et (2) que

$$L_n(h;x) \geqslant -\|h\|_\infty L_n(\vartheta_{a,\alpha};x) \geqslant -\varepsilon \|h\|_\infty \quad \text{pour } x \in X \text{ et } n \geqslant N.$$

Cette propriété étant vérifiée pour toute fonction $h \in HB_a(X,\mathbb{R})$ positive au voisinage du point a, la suite (L_n) est semi-positive au point a sur $HB_a(X,\mathbb{R})$. □

Théorème VI.1.4. *Soit $H(X,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur un espace topologique X, soit a un point de X et soit $HB_a(X,\mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions bornées, continues au point a et appartenant à $H(X,\mathbb{R})$.*
Si $H(X,\mathbb{R})$ est fortement localisable au point a, pour toute suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$, positifs sur $HB_a(X,\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *La suite (L_n) est fortement localisante au point a.*

(ii) *Quelle que soit la fonction h appartenant à $HB_a(X,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.*

Démonstration. On note $\hat{L}_n$ la restriction de L_n au sous-espace $HB(X,\mathbb{R})$ des fonctions bornées appartenant à $H(X,\mathbb{R})$. L'espace $H(X,\mathbb{R})$ étant fortement localisable au point a, il existe une fonction $\varphi_a \in HB_a(X,\mathbb{R})$ telle que $\varphi_a(a) = 1$, donc $HB(X,\mathbb{R})$ est localisable au point a.

(i) ⇒ (ii)
Si les opérateurs L_n sont positifs sur $HB_a(X,\mathbb{R})$ et si la suite (L_n) est fortement localisante au point a, alors la suite (L_n) est semi-positive au point a sur $HB_a(X,\mathbb{R})$ [Lemme **VI.1.3**] et elle est localisante au point a [Lemme **VI.1.2**]. La suite $(\hat{L}_n)$ vérifie donc la condition **(i)** du théorème **V.1.9** ; il en résulte que pour toute fonction $h \in HB_a(X,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h)) = (\hat{L}_n(h))$ converge localement vers h au point a.

(ii) ⇒ (i)
Si la suite (L_n) est approximante au point a sur $HB_a(X,\mathbb{R})$, elle est fortement localisante puisque toutes les fonctions tests appartiennent à $HB_a(X,\mathbb{R})$. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

2. — Application aux théorèmes de Korovkin

Théorème VI.2.1. *Soit $H(I,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur un segment I de $\mathbb{R}$, contenant les fonctions monômes définies par $h_0(x)=1$, $h_1(x)=x$ et $h_2(x)=x^2$, et soit (L_n) une suite d'opérateurs sur $H(I,\mathbb{R})$.*
Si les opérateurs L_n sont positifs sur le sous-espace $HB_a(I,\mathbb{R})$ des fonctions bornées, continues au point a et appartenant à $H(I,\mathbb{R})$, et si les suites $(L_n(h_0))$, $(L_n(h_1))$ et $(L_n(h_2))$ convergent localement au point a respectivement vers h_0, h_1 et h_2, alors, pour toute fonction $h\in HB_a(I,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.

Démonstration. $H(I,\mathbb{R})$ est fortement localisable en tout point a : on peut prendre

- pour φ_a la fonction h_0,
- pour base de voisinages de a la famille des intervalles $V_\alpha=[a-\alpha,a+\alpha]\cap I$ avec $\alpha>0$,
- pour $\vartheta_{a,\alpha}$ la fonction définie sur I par $\vartheta_{a,\alpha}(x)=\dfrac{1}{\alpha^2}(x-a)^2$, qui est combinaison linéaire des fonctions monômes h_0, h_1 et h_2.

Les hypothèses faites sur (L_n), compte tenu des expressions de φ_a et $\vartheta_{a,\alpha}$, assurent que la suite (L_n) est fortement localisante au point a. On applique le théorème **VI.1.4**. □

Corollaire VI.2.2. [Korovkin, 1960, Théorème 3] *Si les opérateurs L_n sont positifs sur $H(I,\mathbb{R})$ et si les suites $(L_n(h_0))$, $(L_n(h_1))$ et $(L_n(h_2))$ convergent uniformément respectivement vers h_0, h_1 et h_2, alors, pour toute fonction continue $h\in H(I,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge uniformément vers h.*

Démonstration. Quel que soit $a\in I$, les opérateurs L_n sont positifs sur $HB_a(I,\mathbb{R})$ (puisqu'ils sont positifs sur $H(I,\mathbb{R})$) et les suites $(L_n(h_0))$, $(L_n(h_1))$ et $(L_n(h_2))$ convergent localement respectivement vers h_0, h_1 et h_2 au point a (puisqu'elles convergent uniformément respectivement vers h_0, h_1 et h_2 [Théorème **I.2.3**]).
Pour une fonction continue $h\in H(I,\mathbb{R})$, on a $h\in HB_a(I,\mathbb{R})$ pour tout $a\in I$, donc la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de I, donc converge uniformément sur I vers h [Théorème **I.2.3**]. □

Exemple VI.2.3. [autre démonstration du théorème **IV.1.1**] Pour toute fonction réelle bornée h définie sur le segment $I=[0,1]$, la suite des fonctions polynômes de Bernstein définies par

$$B_n(h;x)=\sum_{0\leqslant i\leqslant n} C_n^i\, x^i(1-x)^{n-i}\, h(i/n) \qquad \text{[Théorème \textbf{I.2.3}]}$$

converge localement vers h en tout point où h est continue. Si la fonction h est continue, la suite $(B_n(h))$ converge uniformément vers h.

Démonstration. Soit $B(I)$ l'espace des fonctions réelles bornées définies sur I et soit B_n l'opérateur sur $B(I)$ qui à h associe la fonction polynôme $B_n(h)$. La suite d'opérateurs (B_n) vérifie les hypothèses du théorème **VI.2.1** :

1) L'espace $B(I)$ contient les fonctions polynômes, donc en particulier les fonctions monômes h_0, h_1 et h_2.

2) Pour tout n, l'opérateur B_n est positif sur l'espace $B(I)$, donc, quel que soit $a\in I$, sur le sous-espace $B_a(I)$ des fonctions continues au point a et appartenant à $B(I)$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3) Un calcul direct (exercice classique sur les polynômes de Bernstein) donne

$$\begin{aligned} B_n(h_0;x) &= 1 \\ B_n(h_1;x) &= x \\ B_n(h_2;x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}, \end{aligned}$$

donc $B_n(h_0)$ (resp. $B_n(h_1)$; resp. $B_n(h_2)$) converge uniformément sur I, donc localement en tout point de I, vers h_0 (resp. h_1 ; resp. h_2).

Il résulte du théorème **VI.2.1** que, pour toute fonction $h \in B(I)$, la suite $(L_n(h)) = (B_n(h))$ converge localement vers h en tout point où h est continue. Si h est continue sur I, il y a convergence locale en tout point, donc convergence uniforme sur le compact I [Théorème **I.2.3**]. □

Remarque. Ce résultat est un exemple des avantages que peut présenter le théorème **VI.1.4** pour une suite d'opérateurs positifs lorsque la définition de ceux-ci permet des calculs explicites : d'une part, la positivité des opérateurs est souvent évidente, d'autre part, la possibilité de choisir de manière adaptée les fonctions tests ramène la vérification de la localisation à des calculs élémentaires.

Théorème VI.2.4. *Soit $P(\mathbb{R};2\pi)$ un espace vectoriel de fonctions réelles, périodiques de période 2π, contenant la fonction constante $1_{\mathbb{R}}$ de valeur 1 et les fonctions* sin *et* cos, *et soit (L_n) une suite d'opérateurs sur $P(\mathbb{R};2\pi)$.*
Si les opérateurs L_n sont positifs sur le sous-espace $PB_a(\mathbb{R};2\pi)$ des fonctions bornées, continues au point a et appartenant à $P(\mathbb{R};2\pi)$, et si les suites $(L_n(1_{\mathbb{R}}))$, $(L_n(\sin))$ et $(L_n(\cos))$ convergent localement au point a respectivement vers $1_{\mathbb{R}}$, sin *et* cos, *alors, pour toute fonction $h \in PB_a(\mathbb{R};2\pi)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.*

Remarque. On ne peut pas appliquer directement le théorème **VI.1.4** à ce problème car l'espace $P(\mathbb{R};2\pi)$ n'est jamais fortement localisable. En effet, il n'existe pas de fonction périodique vérifiant les conditions imposées aux fonctions $\vartheta_{a,\alpha}$: être nulle en un point et minorée par 1 à l'extérieur d'un voisinage de ce point.

Cet obstacle pourrait être surmonté par un artifice classique : identifier $P(\mathbb{R};2\pi)$ avec un espace $H(S,\mathbb{R})$ de fonctions définies sur le cercle unité S. Sous les hypothèses du théorème, cet espace est fortement localisable en tout point mais, les fonctions $L_n(h)$, n'étant pas nécessairement périodiques, ne définissent pas de manière naturelle des fonctions sur S. On ne peut donc pas, en général, se ramener à l'étude d'une suite d'opérateurs sur $H(S,\mathbb{R})$.

La solution retenue ici consiste, un point a étant fixé, à éliminer la clause de périodicité en travaillant sur un intervalle de période centré au point a :

Démonstration. Soit I_a l'intervalle $[a-\pi, a+\pi[$ et soit $H(I_a,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des restrictions à I_a des fonctions éléments de $P(\mathbb{R};2\pi)$. Ces fonctions étant périodiques de période 2π, il est évident que l'application de restriction ρ de $P(\mathbb{R};2\pi)$ sur $H(I_a,\mathbb{R})$ est un isomorphisme linéaire.
Soit r l'application de restriction de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{I_a}$. On définit une suite d'opérateurs sur $H(I_a,\mathbb{R})$ en posant $\Lambda_n = r \circ L_n \circ \rho^{-1}$. Pour tout $x \in I_a$, on a

$$(\rho(h))(x) = h(x) \quad \text{et} \quad \Lambda_n(\rho(h);x) = (r \circ L_n(h))(x) = L_n(h;x).$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

La convergence locale étant une propriété locale et I_a étant un voisinage de a, pour montrer que, pour tout $h \in PB_a(\mathbb{R}; 2\pi)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a, il suffit de montrer que la suite d'opérateurs (Λ_n) est approximante au point a sur $HB_a(I_a, \mathbb{R})$ puisque, quelle que soit la fonction $h \in PB_a(\mathbb{R}; 2\pi)$, on a $\rho(h) \in HB_a(I_a, \mathbb{R})$. Pour cela, on va établir que la suite (Λ_n) vérifie la condition **(i)** du théorème **VI.1.4**.

1) $H(I_a, \mathbb{R})$ est fortement localisable au point a. En effet :

a) L'espace $H(I_a, \mathbb{R})$ contient la fonction constante de valeur 1 ; soit $\varphi_a = 1_{I_a}$.

b) La fonction Θ_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Theta_a(t) = \sin^2 \frac{t-a}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos a \ \cos t - \frac{1}{2}\sin a \ \sin t$$

appartient à $P(\mathbb{R}; 2\pi)$ puisque les fonctions $1_{\mathbb{R}}$, sinus et cosinus appartiennent à cet espace. Par linéarité, $(L_n(\Theta_a))$ converge localement vers Θ_a au point a puisque $(L_n(1_{\mathbb{R}}))$, $(L_n(\sin))$ et $(L_n(\cos))$ convergent localement au point a respectivement vers $1_{\mathbb{R}}$, sin et cos.
Soit $\vartheta_a = \rho(\Theta_a)$ la restriction de Θ_a à I_a. Cette fonction appartient à $HB_a(I_a, \mathbb{R})$ et vérifie

$$\vartheta_a(t) \geqslant \frac{(t-a)^2}{\pi^2} \quad \text{pour} \ \ t \in I_a,$$

puisqu'on a $\sin x \geqslant 2x/\pi$ pour $x \in [0, \pi/2]$.
Pour tout entier $p \geqslant 1$, soit V_p le voisinage de a défini par

$$V_p = \{t \in I_a \mid |t-a| \leqslant \pi/p\}$$

et soit $\vartheta_{a,p} = p^2 \ \vartheta_a$. Les voisinages V_p forment un système fondamental de voisinages de a ; on vérifie que la fonction $\vartheta_{a,p}$, qui appartient à $HB_a(I_a, \mathbb{R})$ est positive, nulle au point a et que l'on a $\vartheta_{a,p}(s) \geqslant 1$ pour $s \in I_a \setminus V_p$.

2) Les opérateurs Λ_n sont positifs sur $HB_a(I_a, \mathbb{R})$.
En effet, soit ξ une fonction positive appartenant à $HB_a(I_a, \mathbb{R})$. Cette fonction est l'image par ρ d'une fonction $h \in PB_a(\mathbb{R}; 2\pi)$; par périodicité cette fonction est positive. Par hypothèse, l'opérateur L_n est positif sur $PB_a(\mathbb{R}; 2\pi)$, donc la fonction

$$\Lambda_n(\xi) = \Lambda_n\left(\rho(h)\right) = r\left(L_n(h)\right)$$

est positive.

3) La suite (Λ_n) est fortement localisante ; en effet :

a) On a $\Lambda_n(\varphi_a) = \Lambda_n\left(\rho(1_{\mathbb{R}})\right) = r\left(L_n(1_{\mathbb{R}})\right)$ et $(L_n(1_{\mathbb{R}}))$ converge localement vers $1_{\mathbb{R}}$ au point a, donc $(\Lambda_n(\varphi_a))$ converge localement vers $r(1_{\mathbb{R}}) = \rho(1_{\mathbb{R}}) = \varphi_a$ au point a.

b) On a $\Lambda_n(\vartheta_a) = \Lambda_n\left(\rho(\Theta_a)\right) = r\left(L_n(\Theta_a)\right)$ et $(L_n(\Theta_a))$ converge localement vers Θ_a au point a, donc $(\Lambda_n(\vartheta_a))$ converge localement vers $r(\Theta_a) = \rho(\Theta_a) = \vartheta_a$. Il en résulte que $\Lambda_n(\vartheta_{a,p}) = p^2 \ \Lambda_n(\vartheta_a)$ converge localement vers $\vartheta_{a,p} = p^2 \ \vartheta_a$ au point a. □

Corollaire VI.2.5. [Korovkin, 1960, Théorème 4] *Si les opérateurs L_n sont positifs sur $P(\mathbb{R}; 2\pi)$ et si les suites $(L_n(I_{\mathbb{R}}))$, $(L_n(\sin))$ et $(L_n(\cos))$ convergent uniformément respectivement vers $I_{\mathbb{R}}$, sin et cos, alors, quelle que soit la fonction continue $h \in P(\mathbb{R}; 2\pi)$, la suite $(L_n(h))$ converge uniformément vers h.*

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, les opérateurs L_n sont positifs sur $PB_a(\mathbb{R};2\pi)$ puisqu'ils sont positifs sur $PB(\mathbb{R};2\pi)$; les suites $(L_n(1_{\mathbb{R}}))$, $(L_n(\sin))$, $(L_n(\cos))$ convergent localement au point a respectivement vers $I_{\mathbb{R}}$, sin et cos puisqu'elles convergent uniformément respectivement vers $1_{\mathbb{R}}$, sin et cos.

Pour une fonction continue $h \in P(\mathbb{R};2\pi)$, on a $h \in PB_a(\mathbb{R};2\pi)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de $\mathbb{R}$, donc converge uniformément vers h sur tout compact, en particulier sur tout intervalle de période, donc enfin sur $\mathbb{R}$. □

Exemple VI.2.6. (**autre démonstration de l'exemple V.1.13**). Pour toute fonction réelle h, périodique de période 2π et appartenant à $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, la suite $(F_n(h))$ des sommes de Fejér définies par :

$$F_n(h;x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\, h(x-t)\, dt$$

converge localement vers h en tout point où h est continue. Si la fonction h est continue, cette suite converge uniformément vers h.

Démonstration. Soit $P^\infty(\mathbb{R};2\pi)$ l'espace des fonctions réelles, périodiques de période 2π appartenant à $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, et soit F_n l'opérateur sur $P^\infty(\mathbb{R};2\pi)$ qui à h associe la somme de Fejér $F_n(h)$. La suite d'opérateurs (F_n) vérifie les hypothèses du théorème **VI.2.4** :

1) L'espace $P^\infty(\mathbb{R};2\pi)$ contient les fonctions constantes et les fonctions sin et cos.

2) Pour tout n, l'opérateur F_n est positif sur l'espace $P^\infty(\mathbb{R};2\pi)$, donc sur chaque sous-espace $P_a^\infty(\mathbb{R};2\pi)$ constitué des fonctions appartenant à $P^\infty(\mathbb{R};2\pi)$ et continues au point a.

3) Un calcul direct (exercice classique sur les sommes de Fejér) donne

$$\begin{aligned} F_n(1_{\mathbb{R}};x) &= 1 \\ F_n(\sin;x) &= \frac{n-1}{n}\sin x, \\ F_n(\cos;x) &= \frac{n-1}{n}\cos x, \end{aligned}$$

donc les suites $(F_n(1_{\mathbb{R}}))$, $(F_n(\sin))$ et $(F_n(\cos))$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}$, donc localement en tout point de $\mathbb{R}$, vers respectivement $1_{\mathbb{R}}$, sin et cos.

Il en résulte [Théorème **VI.2.4**] que, pour toute fonction $h \in P^\infty(\mathbb{R};2\pi)$, la suite $(F_n(h))$ converge localement vers h en tout point où h est continue. Si la fonction h est continue, il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ [Corollaire **VI.2.5**]. □

Théorème VI.2.7. *Soit $H(X,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur un espace topologique X, contenant les fonctions constantes et les fonctions caractéristiques $\chi_{a,\alpha}$ des voisinages d'un système fondamental de voisinages $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ d'un point a, et soit (L_n) une suite d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$.*
Si les opérateurs L_n sont positifs sur le sous-espace $HB_a(X,\mathbb{R})$ des fonctions bornées, continues au point a et appartenant à $H(X,\mathbb{R})$, et si les suites $(L_n(1_X))$ et $(L_n(\chi_{a,\alpha}))$ convergent localement au point a respectivement vers 1_X et $\chi_{a,\alpha}$, alors, pour toute fonction $h \in HB_a(X,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. $H(X,\mathbb{R})$ est fortement localisable au point a : on prend pour φ_a la fonction 1_X et pour $\vartheta_{a,\alpha}$ la fonction $1_X - \chi_{a,\alpha}$. Les hypothèses faites sur (L_n) assurent alors que la suite (L_n) est fortement localisante au point a. On applique le théorème **VI.1.4**. □

Exemple VI.2.8. (**autre démonstration de l'exemple V.1.11**). Soit γ une fonction réelle continue, définie sur $I = [-1,1]$, vérifiant $\gamma(0) = 1$ et $0 \leqslant \gamma(t) < 1$ pour $t \neq 0$. Soit (L_n) la suite des opérateurs définis sur $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ par

$$L_n(h;x) = \frac{1}{c_n}\int_{-1}^{+1} \gamma^n(t)\, h(x-t)\, dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où c_n désigne la valeur de l'intégrale de γ^n sur I.
Quelle que soit la fonction $h \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de continuité de h ; si la fonction h est continue, il y a convergence locale en tout point, donc convergence uniforme sur tout compact.

Démonstration. Korovkin démontre ce résultat pour les fonctions continues sur un segment [1960, Théorème 5] en prenant pour fonctions tests les fonctions monômes 1, x, x^2. Un élément clé de sa démonstration est le lemme technique **VI.1.12**. Il semble plus naturel de prendre pour fonctions tests les fonctions caractéristiques des segments.

La suite des opérateurs L_n vérifie les hypothèses du théorème **VI.2.7** ; en effet

1) L'espace $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ contient les fonctions constantes et, quel que soit le point a, les fonctions caractéristiques des segments $V_\alpha = [a-\alpha, a+\alpha]$, avec $\alpha > 0$, qui forment un système fondamental de voisinages du point a.

2) Les opérateurs L_n sont positifs sur $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, donc, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, sur le sous-espace $\mathscr{L}^\infty_a(\mathbb{R})$ des fonctions continues au point a et appartenant à $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$.

3) a) Il est évident que $L_n(1_\mathbb{R}) = 1_\mathbb{R}$ converge localement vers $1_\mathbb{R}$ en tout point.

b) Pour $|x-a| \leqslant \alpha/2$ et $|t| > 3\alpha/2$, on a

$$x - t < a + \alpha/2 - 3\alpha/2 = a - \alpha \quad \text{ou} \quad x - t > a - \alpha/2 + 3\alpha/2 = a + \alpha,$$

donc, pour $|x-a| \leqslant \alpha/2$, on a $\chi_{a,\alpha)}(x-t) = 0$ si $|t| > 3\alpha/2$, ce qui entraîne

$$L_n(\chi_{a,\alpha};x) = \frac{1}{c_n}\int_{|t|\leqslant 3\alpha/2} \gamma^n(t)\, \chi_{a,\alpha}(x-t)\, dt \leqslant \frac{1}{c_n}\int_{|t|\leqslant 3\alpha/2} \gamma^n(t)\, dt\,. \qquad (1)$$

De même, pour $|x-a| \leqslant \alpha/2$ et $|t| \leqslant \alpha/2$, on a

$$x - t < (a + \alpha/2) + \alpha/2 = a + \alpha \quad \text{et} \quad x - t \geqslant (a - \alpha/2) - \alpha/2 = a - \alpha,$$

ce qui entraîne, pour $|x-a| \leqslant \alpha/2$,

$$\begin{aligned} L_n(\chi_{a,\alpha};x) &= \frac{1}{c_n}\int_{-1}^{+1} \gamma^n(t)\, \chi_{a,\alpha}(x-t)\, dt \\ &\geqslant \frac{1}{c_n}\int_{|t|\leqslant\alpha/2} \gamma^n(t)\, \chi_{a,\alpha}(x-t)\, dt = \frac{1}{c_n}\int_{|t|\leqslant\alpha/2} \gamma^n(t)\, dt. \end{aligned} \qquad (2)$$

Le lemme **VI.1.12** et l'encadrement fourni par (1) et (2) entraînent que la suite $(L_n(\chi_{a,\alpha}))$ converge uniformément vers $\chi_{a,\alpha}$ sur le segment $[a-\alpha/2, a+\alpha/2]$, donc converge localement vers $\chi_{a,\alpha}$ au point a.
Il en résulte [Théorème **VI.2.7**] que, pour toute fonction $h \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point où h est continue ; si h est continue, il y a convergence locale en tout point, donc convergence uniforme sur tout compact [Théorème **I.2.3**]. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3. — Observations critiques sur le théorème VI.1.4

1) Pourquoi imposer à h d'être bornée ?

Le théorème **VI.1.4** ne s'applique qu'aux espaces de fonctions bornées. A priori, cette restriction est introduite sur une base purement technique : c'est un argument de la démonstration du lemme **VI.1.3** : L'exemple suivant montre cependant que, pour un espace fortement localisable, cette restriction est incontournable :

Exemple VI.3.1. Soit $H(X,\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues définies sur $\mathbb{R}$ et soit L_n l'opérateur défini sur $C(\mathbb{R})$ par

$$L_n(h;x) = h(x) + \frac{1}{n}h(x+n).$$

L'espace $C(\mathbb{R})$ est fortement localisable en tout point, les opérateurs L_n sont positifs et, si $h \in C(\mathbb{R})$ est bornée, la suite $(L_n(h))$ converge uniformément vers h. Cependant, pour la fonction monôme $h_1(t) = t$, la suite $(L_n(h_1))$ converge localement en tout point vers $h_1 + 1$ et, pour la fonction monôme $h_2(t) = t^2$, la suite $(L_n(h_2;x))$ ne converge en aucun point de $\mathbb{R}$.

Démonstration. a) L'espace $C(\mathbb{R})$ est fortement localisable en tout point a : on prend

- pour φ_a la fonction constante de valeur 1,
- comme base de voisinages de a les intervalles $[a-\alpha, a+\alpha]$ avec $\alpha > 0$,
- pour $\vartheta_{a,\alpha}$ la fonction définie par $\vartheta_{a,\alpha}(t) = \inf\{1, |t-a|\}$.

b) La positivité de L_n est évidente et, pour $h \in C(\mathbb{R})$ bornée, on a

$$|L_n(h;x) - h(x)| = \frac{1}{n}|h(x+n)| \leqslant \frac{1}{n}\|h\|_\infty,$$

donc $(L_n(h))$ converge uniformément vers h.

c) Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} L_n(h_1;x) &= x(1+1/n)+1 \\ L_n(h_2;x) &= x^2(1+1/n)+2x+n. \end{aligned}$$

La suite $(L_n(h_1))$ converge uniformément sur tout compact, donc localement en tout point, vers h_1+1 et non vers h_1, et la suite $(L_n(h_2;x))$ tend vers $+\infty$ quel que soit x. □

2) La condition de localisation forte peut-elle être assouplie ?

La limitation aux fonctions bornées n'est pas une condition intrinsèque des problèmes d'approximation, ainsi que le montre le théorème **V.1.9** : elle résulte ici de la condition de localisation forte. Cette condition ayant été formulée spécifiquement pour rendre compte des résultats classiques qui portent sur des fonctions bornées, elle a été conçue de manière ad hoc pour pouvoir démontrer dans ce cadre particulier le lemme **VI.1.3**.

D'autres formulations étendent la classe des espaces admissibles. Les plus simples se déduisent du théorème **VI.1.4** par un automorphisme de $\mathbb{R}^X$, de la manière suivante :

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Proposition VI.3.2. *Soit (L_n) une suite d'opérateurs sur un espace $H(X,\mathbb{R})$, soit a un point de X et soit u un automorphisme de $\mathbb{R}^X$*, compatible avec la convergence locale au point *a en ce sens que, si la suite (h_n) converge localement vers h au point a, alors la suite $((u(h_n))$ converge localement vers $u(h)$ au point a.*
Si $\hat{H}(X,\mathbb{R}) = u^{-1}(H(X,\mathbb{R}))$ est fortement localisable au point a et si la suite des opérateurs sur $\hat{H}(X,\mathbb{R})$ définis par $\hat{L}_n = u^{-1}\circ L_n \circ u$ vérifie les hypothèses du théorème **VI.1.4** *au point a, alors, pour toute fonction $h \in H(X,\mathbb{R})$ telle que $u^{-1}(h)$ soit bornée et soit continue au point a, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.*

Démonstration. Pour une telle fonction h, on a $u^{-1}(h) \in \hat{H}B_a(X,\mathbb{R})$. Le théorème **VI.1.4** entraîne alors que la suite $\left(\hat{L}_n\left(u^{-1}(h)\right)\right)$ converge localement vers $u^{-1}(h)$, donc que la suite de terme général $L_n(h) = u\left(\hat{L}_n\left(u^{-1}(h)\right)\right)$ converge localement vers $h = u\left(u^{-1}(h)\right)$ au point a, puisque u est compatible avec la convergence locale au point a. □

Application VI.3.3. Soit $H(X,\mathbb{R})$ un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur un espace topologique X, soit a un point de X et soit δ une fonction réelle définie sur X, strictement positive sur X et continue au point a ; on note $HB_a^\delta(X,\mathbb{R})$ le sous-espace de $H(X,\mathbb{R})$ constitué des fonctions h continues au point a et telles que la fonction h/δ soit bornée. On suppose que

1) Il existe une fonction $\varphi_a \in HB_a^\delta(X,\mathbb{R})$ telle que $\varphi_a(a) = 1$;

2) il existe une base $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de voisinages du point a et des fonctions positives $\vartheta_{a,\alpha} \in HB_a^\delta(X,\mathbb{R})$ telles que :

$$\vartheta_{a,\alpha}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \vartheta_{a,\alpha}(x) \geqslant \delta(x) \ \text{ si } x \in X\backslash V_\alpha\ .$$

Soit (L_n) une suite d'opérateurs sur $H(X,\mathbb{R})$, positifs sur $HB_a^\delta(X,\mathbb{R})$, vérifiant :

3) la suite $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a ;

4) pour tout $\alpha \in A$, la suite $(L_n(\vartheta_{a,\alpha}))$ converge localement vers $\vartheta_{a,\alpha}$ au point a.

Alors, quelle que soit la fonction h appartenant à $HB_a^\delta(X,\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.

Démonstration. On vérifie les hypothèses de la proposition **VI.3.2** :

a) Soit u l'automorphisme de $\mathbb{R}^X$ qui, à une fonction h, associe la fonction produit δh. Cette application est compatible avec la convergence locale au point a d'après **II.2.13.(i)** appliqué au produit dans $\mathbb{R}$, qui est bilinéaire continu, et à la fonction δ qui, étant continue, est $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale au point a [Proposition **II.2.11**].
On montrerait de même que u^{-1}, qui, à $h \in \mathbb{R}^X$ associe la fonction quotient h/δ, est compatible avec la convergence locale au point a [ce résultat ne fait pas partie des hypothèses de la proposition **VI.3.2** mais sera utile dans **d**)].

b) L'espace $\hat{H}(X,\mathbb{R}) = u^{-1}(H(X,\mathbb{R}))$ est fortement localisable au point a. On a en effet $\hat{H}B_a(X,\mathbb{R}) = u^{-1}\left(HB_a^\delta(X,\mathbb{R})\right)$ et cet espace contient les fonctions $\hat{\varphi}_a = \delta(a)\ \varphi_a/\delta$ et $\hat{\vartheta}_{a,\alpha} = \vartheta_{a,\alpha}/\delta$ qui vérifient

$$\hat{\varphi}_a(a) = 1\ ; \quad \hat{\vartheta}_{a,\alpha}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\vartheta}_{a,\alpha}(x) \geqslant 1 \ \text{ si } x \in V\backslash V_\alpha\ .$$

c) Les opérateurs $\hat{L}_n = u^{-1}\circ L_n \circ u$ sont positifs sur $\hat{H}B_a(X,\mathbb{R})$ puisque L_n est positif sur $\hat{H}B_a^\delta(X,\mathbb{R}) = u\left(\hat{H}B_a(X,\mathbb{R})\right)$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

d) La suite $(\hat{L}_n)$ est fortement localisante au point a. En effet
– d'une part la suite de terme général

$$\hat{L}_n(\hat{\varphi}_a) = u^{-1}\left(L_n(\delta\ \hat{\varphi}_a)\right) = \delta(a)\ u^{-1}\left(L_n(\varphi_a)\right)$$

converge localement vers $\hat{\varphi}_a = \delta(a)u^{-1}(\varphi_a)$ au point a puisque la suite de terme général $L_n(\varphi_a)$ converge localement vers φ_a au point a et que u^{-1} est compatible avec la convergence locale au point a ;
– d'autre part la suite de terme général

$$\hat{L}_n(\hat{\vartheta}_{a,\alpha}) = u^{-1}\left(L_n(\delta\ \hat{\vartheta}_{a,\alpha})\right) = u^{-1}\left(L_n(\vartheta_{a,\alpha})\right)$$

converge localement vers $u^{-1}(\vartheta_{a,\alpha}) = \hat{\vartheta}_{a,\alpha}$ au point a puisque la suite de terme général $L_n(\vartheta_{a,\alpha})$ converge localement vers $\vartheta_{a,\alpha}$ au point a et que u^{-1} est compatible avec la convergence locale au point a. □

Exemple VI.3.4. Soit $E(\mathbb{R}_+)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$, bornées sur tout compact et à croissance au plus exponentielle à l'infini. Soit (L_n) la suite d'opérateurs définie sur $E(\mathbb{R}_+)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ L_n(h;x) = e^{-nx}\sum_{i=0}^{\infty} h(i/n)\ \frac{n^i}{i!}\ x^i.$$

Alors, quelle que soit la fonction $h \in E(\mathbb{R}_+)$, la suite (L_n) converge localement vers h en tout point de continuité de h.

Remarque. Les opérateurs L_n sont bien définis. En effet, si h est bornée sur tout compact et à croissance exponentielle, il existe $M > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait $|h(x)| \leqslant M\ e^{px}$ pour tout x, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|h(i/n)\ \frac{n^i}{i!}\ x^i\right| \leqslant M\ e^{pi/n}\ \frac{n^i}{i!}\ x^i = M\frac{\left(e^{p/n}nx\right)^i}{i!}\ ;$$

la série définissant $L_n(h;x)$ est donc absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. On note e_k la fonction définie sur $x \in \mathbb{R}_+$ par $e_k(x) = e^{kx}$.
Il suffit de démontrer le résultat de convergence pour les fonctions $O(e_p)$ à l'infini, où p est un entier pair quelconque.
Un tel entier étant fixé, on pose $\delta = e_p$. Quel que soit le point $a \in \mathbb{R}_+$, le sous-espace $EB_a^{\delta}(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $E(\mathbb{R}_+)$, continues au point a et $O(e_p)$ à l'infini. On vérifie que les hypothèses de l'application **VI.3.3** sont satisfaites en tout point a :

1) Soit $\varphi_a = 1_{\mathbb{R}_+}$. Cette fonction appartient à $EB_a^{\delta}(\mathbb{R}_+)$ et elle vérifie $\varphi_a(a) = 1$.

2) Soit $V_\alpha = \mathbb{R}_+ \cap\ ]a-\alpha, a+\alpha[$, avec $\alpha > 0$ et soit $\vartheta_{a,\alpha}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\vartheta_{a,\alpha}(x) = \lambda_{a,\alpha}\ (e^x - e^a)^p \quad \text{avec} \quad \lambda_{a,\alpha} = \sup_{|x-a|\geqslant\alpha}\left(\frac{e^x}{e^x - e^a}\right)^p = \left(\frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}\right)^p.$$

Cette fonction

- est positive, puisque p est pair ;
- appartient à $EB_a^{\delta}(\mathbb{R}_+)$, puisqu'elle est continue, donc bornée sur tout compact, et que $\vartheta_{a,\alpha}(x) = \lambda_{a,\alpha}\ (e^x - e^a)^p = O(e^{px})$ à l'infini ;

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2025

- s'annule au point a et vérifie $\vartheta_{a,\alpha}(x) \geqslant \delta(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus V_\alpha$, puisque

$$\frac{\vartheta_{a,\alpha}(x)}{\delta(x)} = \lambda_{a,\alpha}\left(\frac{e^x - e^a}{e^x}\right)^p \geqslant \lambda_{a,\alpha} \inf_{(x-a)\geqslant\alpha}\left(\frac{e^x - e^a}{e^x}\right)^p = 1.$$

3) On a $L_n(1_{\mathbb{R}+}) = 1_{\mathbb{R}+}$, donc $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a.

4) La fonction $\vartheta_{a,\alpha}$, étant une combinaison linéaire de fonctions e_k, pour montrer que la suite $\left(L_n(\vartheta_{a,\alpha})\right)$ converge localement vers $\vartheta_{a,\alpha}$ au point a, il suffit de montrer que, quel que soit k, la suite $(L_n(e_k))$ converge localement vers e_k au point a. On a

$$L_n(e_k; x) = e^{-nx}\sum_{i=0}^{\infty} e^{ki/n}\,\frac{n^i}{n!}\,x^i = e^{-nx}\,e^{ne^{k/n}x} = e^{n(e^{k/n}-1)x}$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{k/n}-1\right) = k$, et alors la suite $(L_n(e_k))$ converge vers e_k uniformément sur tout compact, donc localement en tout point [Corollaire **I.2.7**].

L'application **VI.3.3** entraîne qu'en tout point de continuité d'une fonction $h \in E(\mathbb{R}_+)$, la suite $(L_n(h))$ tend localement vers h au point a. □

Remarque. Cette suite d'opérateurs, attribuée à C.M. Mirakyan, est proposée en problème par Korovkin [*loc. cit.*, p. 53] dans le cas des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$ et continues sur un segment $[0, \alpha]$. Cet exemple montre, comme le faisait déjà l'exemple **VI.2.3**, l'intérêt d'utiliser le théorème **VI.1.4** et les résultats dérivés (ici l'application **VI.3.3**) pour des opérateurs positifs, quand ceux-ci permettent des calculs explicites.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

APPROXIMATION PAR DES OPÉRATEURS DE CONVOLUTION

Étant donné un espace $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de fonctions réelles d'une variable réelle, on cherche des conditions pour qu'une suite (L_n) d'opérateurs de convolution sur $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définis par

$$\forall h \in H(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_n(h,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ h(x-t)\ dt,$$

soit approximante en un point a, c'est-à-dire soit telle que la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en un point où h est continue. Compte tenu du théorème **V.1.9**, le problème est donc de trouver des conditions pour que la suite (L_n) soit localisante et semi-positive au point a.

Une solution de ce problème a déjà été donnée dans le cas où les fonctions g_n appartiennent à $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et sont positives [Application **V.1.10**].
Si on abandonne l'hypothèse de positivité, des exemples classiques, comme celui de la suite des opérateurs de Dirichlet sur l'espace des fonctions intégrables bornées de période 2π, montrent que des hypothèses fortes sur les espaces de fonctions sont nécessaires sauf à devoir faire des hypothèses très restrictives sur les suites d'opérateurs considérées.
Par ailleurs, d'un point de vue technique, les arguments de majoration et d'encadrement des intégrales utilisés dans l'application **V.1.10** ne sont valides que si les fonctions g_n sont positives ; pour des fonctions g_n de signe quelconque, on peut remplacer ces arguments par le deuxième théorème de la moyenne, mais cela suppose que les fonctions h soient monotones ou soient une somme de fonctions monotones, c'est-à-dire des fonctions à variation bornée sur tout compact.

Pour ces raisons, nous avons restreint l'étude des suites d'opérateurs de convolution au cas de l'espace $VB(\mathbb{R})$ des fonctions dont la variation totale est bornée sur $\mathbb{R}$, puis au cas de l'espace $VB_{loc}(\mathbb{R})$ des fonctions à variation bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$.

On note $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions localement intégrables. Dans tous les cas, nous supposerons que les fonctions g_n appartiennent au sous-espace $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$ de $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ des fonctions dont l'intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ est convergente [26], condition qui est suffisante pour que les opérateurs de convolution soient définis sur l'espace $VB(\mathbb{R})$. On a en effet :

Lemme VII.0.1. *Quelles que soient les fonctions $g \in \mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$ et $h \in VB(\mathbb{R})$, le produit gh appartient à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Une fonction à variation bornée étant somme de deux fonctions monotones bornées, il suffit de démontrer le lemme pour ces fonctions.

(26) Plus généralement, on pourra prendre pour g_n des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ au sens de Kurzweil et Henstock.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Soit h une fonction monotone bornée. Cette fonction appartenant à $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, le produit gh est localement intégrable. Pour montrer que

$$I(x) = \int_0^x g(t)\, h(t)\, dt$$

a une limite quand x tend vers $+\infty$, nous allons montrer que cette fonction vérifie la condition de Cauchy à l'infini. Quels que soient x et y, avec $0 < x < y$, la deuxième formule de la moyenne entraîne qu'il existe $\xi \in [x, y]$ tel que

$$I(y) - I(x) = \int_x^y g(t)\, h(t)\, dt = h^+(x) \int_x^\xi g(t)\, dt + h^-(y) \int_\xi^y g(t)\, dt\ .$$

La fonction h étant bornée, on a donc

$$|I(y) - I(x)| \leqslant \|h\|_\infty \left| \int_x^\xi g(t)\, dt \right| + \|h\|_\infty \left| \int_\xi^y g(t)\, dt \right|\ .$$

Par ailleurs, l'intégrale généralisée de g étant convergente, on a la condition de Cauchy suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$\left| \int_X^Y g(t)\, h(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad X \geqslant A \text{ et } Y \geqslant A\ .$$

I vérifie donc la condition de Cauchy à l'infini :

$$|I(y) - I(x)| \leqslant 2\varepsilon\, \|h\|_\infty \quad \text{pour} \quad x \geqslant A \text{ et } y \geqslant A\ .$$

On démontre de même la convergence de l'intégrale de gh sur $]-\infty, 0]$. □

1. — Approximation de l'unité

Définition VII.1.1. *On dit qu'une suite (g_n) de fonctions appartenant à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$ est une* approximation de l'unité *si la suite des fonctions G_n définies sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$G_n(x, y) = \int_x^y g_n(t)\, dt$$

vérifie les propriétés suivantes :

(i) *La suite (G_n) est uniformément bornée sur un voisinage de $(0, 0)$, c'est-à-dire :*

$$\exists \alpha > 0, \exists A > 0, \forall (x, y) \in [-\alpha, \alpha]^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |G_n(x, y)| \leqslant A\ .$$

(ii) *Pour tout $\alpha > 0$, la suite (G_n) converge uniformément vers 1 sur $]-\infty, -\alpha] \times [\alpha, +\infty[$.*

Lemme VII.1.2. *Si (g_n) est une approximation de l'unité, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, dt = 1\ .$$

Démonstration. Quel que soit n, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, dt = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to+\infty}} \int_x^y g_n(t)\, dt = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to+\infty}} G_n(x, y).$$

La convergence uniforme de (G_n) sur $]-\infty, -1] \times [1, +\infty[$ permet de commuter les limites :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to+\infty}} G_n(x, y) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to+\infty}} \lim_{n\to\infty} G_n(x, y) = 1. \quad \square$$

Lemme VII.1.3. *Si (g_n) est une approximation de l'unité, quel que soit $\alpha > 0$, la suite des approximations G_n converge uniformément vers 0 sur $[\alpha, +\infty[^2$ et sur $]-\infty, -\alpha]^2$.*

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Pour tout $(x,y)\in[\alpha,+\infty[^2$, on a

$$G_n(x,y) = G_n(-\alpha,y) - G_n(-\alpha,x).$$

La convergence de (G_n) vers 1, uniformément sur $]-\infty,-\alpha]\times[\alpha,+\infty[$, entraîne donc la convergence uniforme de (G_n) vers 0 sur $[\alpha,+\infty[^2$.
De même, pour tout $(x,y)\in]-\infty,-\alpha]^2$, la relation

$$G_n(x,y) = G_n(x,\alpha) - G_n(y,\alpha)$$

entraîne que (G_n) tend uniformément vers 0 sur $]-\infty,-\alpha]^2$. □

Exemple VII.1.4. Une suite (g_n) de fonctions (essentiellement) positives appartenant à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$ est une approximation de l'unité si et seulement si :

(iii) La suite des intégrales des fonctions g_n tend vers 1 ;

(iv) Quel que soit $\alpha>0$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\,dt = 0.$$

Démonstration. Conditions nécessaires. On suppose que (g_n) est une approximation de l'unité, c'est -à-dire vérifie les conditions **(i)** et **(ii)**.
(iii) C'est le lemme **VII.1.2**.
(iv) Quel que soit $\alpha>0$, on a

$$\int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt - G_n(-\alpha,+\alpha),$$

qui, d'après le lemme **VII.1.2** et la condition **(ii)**, tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Conditions suffisantes. On suppose que (g_n) vérifie **(iii)** et **(iv)**.
(i) Les fonctions g_n étant essentiellement positives, quels que soient x et y vérifiant $-1\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$, on a

$$0\leqslant G_n(x,y)=\int_x^y g_n(t)\,dt\leqslant\int_{-1}^{+1} g_n(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt-\int_{|t|\geqslant 1} g_n(t)\,dt=M_n\,.$$

Les conditions **(iii)** et **(iv)** entraînent que le majorant M_n est le terme général d'une suite réelle convergente, donc bornée. Comme on a $G_n(x,y)=-G_n(y,x)$, il en résulte que la suite (G_n) est uniformément bornée sur le voisinage $[-1,+1]^2$ de $(0,0)$.
(ii) Les fonctions g_n étant essentiellement positives, quels que soient x et y vérifiant $x\leqslant-\alpha$ et $y\geqslant+\alpha$, on a

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt-\int_x^y g_n(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt - G_n(x,y)\\ &= \int_{-\infty}^{x} g_n(t)\,dt+\int_y^{+\infty} g_n(t)\,dt\leqslant\int_{|t|\geqslant\alpha} g_n(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

La condition **(iv)** entraîne que la suite des fonctions

$$(x,y)\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt - G_n(x,y)$$

converge uniformément vers 0 sur $]-\infty,-\alpha]\times[\alpha,+\infty[$ et, la condition **(iii)** assurant que l'intégrale de G_n tend vers 1, il en résulte que la suite (G_n) converge uniformément vers 1 sur $]-\infty,-\alpha]\times[\alpha,+\infty[$. □

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

2. — Approximation par des opérateurs de convolution sur $VB(\mathbb{R})$

Théorème VII.2.1. *Soit (g_n) une approximation de l'unité et (L_n) la suite des opérateurs de convolution sur $VB(\mathbb{R})$ définis par*

$$L_n(h;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ h(x-t)\ dt\ .$$

Quelle que soit la fonction $h \in VB(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de continuité de h.

Démonstration. Il suffit [Théorème **V.1.9**] de démontrer que, quel que soit le point a,

- l'espace $VB(\mathbb{R})$ est localisable au point a et la suite (L_n) est localisante au point a,
- (L_n) est semi-positive au point a sur le sous-espace $VB_a(\mathbb{R})$ des fonctions appartenant à $VB(\mathbb{R})$ et continues au point a.

1) L'espace $VB(\mathbb{R})$ contient la fonction $1_{\mathbb{R}}$, donc est localisable en tout point. La fonction $L_n(1_{\mathbb{R}})$ est constante de valeur l'intégrale de g_n sur $\mathbb{R}$ et la suite de ces intégrales tend vers 1 [Lemme **VII.1.2**], donc la suite $(L_n(1_{\mathbb{R}}))$ converge uniformément vers $1_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$, a fortiori localement en tout point, ce qui exprime que la suite (L_n) est localisante au point a.

2) Pour établir la semi-positivité de la suite (L_n) au point a, on étudie $L_n(h)$ d'abord pour une fonction monotone bornée h, continue au point a, sans condition de positivité, ensuite pour une fonction appartenant à $VB_a(\mathbb{R})$, positive au voisinage de a.
La suite (G_n) étant, par hypothèse, uniformément bornée au voisinage de $(0,0)$, il existe des réels $\alpha_0 > 0$ et $A > 0$ tels que, quel que soit n, on ait

$$|G_n(x,y)| \leqslant A \quad \text{pour } |x| \leqslant \alpha_0 \text{ et } |y| \leqslant \alpha_0\ . \tag{0}$$

2.1) Soit h une fonction monotone, bornée, continue au point a. L'hypothèse de continuité entraîne que, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait

$$\left|h^-(s) - h^+(t)\right| < \varepsilon \quad \text{pour } |s-a| \leqslant 2\alpha \text{ et } |t-a| \leqslant 2\alpha\ . \tag{1}$$

Pour β fixé vérifiant $0 < \beta \leqslant \min\{\alpha_0, \alpha\}$, on considère alors la décomposition

$$L_n(h;x) = \int_{-\infty}^{-\beta} g_n(t)\ h(x-t)\ dt + \int_{-\beta}^{\beta} g_n(t)\ h(x-t)\ dt + \int_{\beta}^{+\infty} g_n(t)\ h(x-t)\ dt.$$

2.1.a) Comme la fonction g_n est intégrable sur tout compact et la fonction $t \mapsto h(x-t)$ est monotone, quel que soit $\gamma > \beta$, la deuxième formule de la moyenne entraîne qu'il existe $\eta \in [\beta, \gamma]$, dépendant de n, de γ et de x, tel que

$$\begin{aligned}\int_{\beta}^{\gamma} g_n(t)\ h(x-t)\ dt &= h^-(x-\beta) \int_{\beta}^{\eta} g_n(t)\ dt + h^+(x-\gamma) \int_{\eta}^{\gamma} g_n(t)\ dt \\ &= h^-(x-\beta)\ G_n(\beta,\eta) + h^+(x-\gamma)\ G_n(\eta,\gamma)\ .\end{aligned}$$

La suite (G_n) convergeant uniformément vers 0 sur $[\beta, +\infty[^2$ [Lemme **VII.1.3**], il existe un entier N_1 tel que l'on ait, quels que soient γ et η vérifiant $\gamma \geqslant \eta \geqslant \beta$,

$$|G_n(\beta,\eta)| < \varepsilon \text{ et } |G_n(\eta,\gamma)| < \varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant N_1\ .$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

La fonction h étant bornée sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\int_\beta^\gamma g_n(t)\ h(x-t)\ dt \geqslant -2\,\|h\|_\infty\,\varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant N_1, \gamma > \beta \text{ et } x \in \mathbb{R}\,;$$

en faisant tendre γ vers l'infini, il en résulte que

$$\int_\beta^{+\infty} g_n(t)\ h(x-t)\ dt \geqslant -2\,\|h\|_\infty\,\varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant N_1 \text{ et } x \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

2.1.b) On démontre de même qu'il existe un entier N_2 tel que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{-\beta} g_n(t)\ h(x-t)\ dt \geqslant -2\,\|h\|_\infty\,\varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant N_2 \text{ et } x \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

2.1.c) Comme la fonction g_n est intégrable sur tout compact et la fonction $t \mapsto h(x-t)$ est monotone, la deuxième formule de la moyenne entraîne qu'il existe $\xi \in [-\beta, \beta]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_{-\beta}^{\beta} g_n(t)\ h(x-t)\ dt &= h^-(x+\beta)\int_{-\beta}^{\xi} g_n(t)\ dt + h^+(x-\beta)\int_{\xi}^{\beta} g_n(t)\ dt \\ &= \big(h^-(x+\beta) - h^+(x-\beta)\big)\ G_n(-\beta,\xi) \\ &\qquad + h^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta).\end{aligned}$$

D'après (0), on a $|G_n(-\beta,\xi)| \leqslant A$, puisqu'on a choisi $\beta \leqslant \alpha_0$ et que $|\xi| \leqslant \beta$.
D'après (1), on a $|h^-(x+\beta) - h^+(x-\beta)| < \varepsilon$ pour $|x-a| < \beta$, puisqu'on a choisi $\beta \leqslant \alpha$ et qu'on a donc $|(x \pm \beta) - a| = |(x - a \pm \beta)| \leqslant |x-a| + \beta \leqslant 2\alpha$.
Il en résulte que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $|x-a| < \beta$,

$$\int_{-\beta}^{\beta} g_n(t)\ h(x-t)\ dt \geqslant -A\varepsilon + h^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta)\,. \tag{4}$$

2.1.d) En posant $N = \max\{N_1, N_2\}$, les minorations (2), (3) et (4) donnent enfin, pour $n \geqslant N$ et $|x-a| < \beta$,

$$L_n(h;x) \geqslant -4\,\|h\|_\infty\,\varepsilon - A\varepsilon + h^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta). \tag{5}$$

2.2) Soit h une fonction à variation bornée, continue au point a et positive sur un voisinage $[a - 2\beta_0, a + 2\beta_0]$ de a.
La fonction h étant à variation bornée, elle est (de plusieurs manières) la somme de deux fonctions monotones bornées, h_c croissante et h_d décroissante ; h étant continue au point a, on peut choisir h_c et h_d continues au point a. On fixe une telle expression.
On peut appliquer à chacune des fonctions h_c et h_d de cette décomposition le résultat (5) de **2.1)**, en prenant un même $\beta \leqslant \beta_0$ pour le même ε, puisque, dans chaque cas, il suffit que β soit plus petit qu'une quantité strictement positive donnée, $\min\{\alpha_0, \alpha_c\}$ et $\min\{\alpha_0, \alpha_d\}$ ne dépendant que de la suite (G_n) et des fonctions h_c et h_d. On a ainsi, pour $n \geqslant N'$ et $|x-a| < \beta$,

$$L_n(h_c;x) \geqslant -4\,\|h_c\|_\infty\,\varepsilon - A\varepsilon + h_c^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta)$$

et, pour $n \geqslant N''$ et $|x-a| < \beta$,

$$L_n(h_d;x) \geqslant -4\,\|h_d\|_\infty\,\varepsilon - A\varepsilon + h_d^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta).$$

En posant $B = \|h_c\|_\infty + \|h_d\|_\infty$, L_n étant linéaire, on a, pour $n \geqslant \max\{N', N''\}$ et $|x-a| < \beta$,

$$L_n(h;x) \geqslant -4B\varepsilon - 2A\varepsilon + h^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta). \tag{6}$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

La condition $\beta \leqslant \beta_0$ assurant que $h^+(x-\beta) \geqslant 0$ pour $|x-a| < \beta$ et la suite $(G_n(-\beta,\beta))$ convergeant vers 1, il existe un entier N''' tel que l'on ait

$$h^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta) \geqslant 0 \quad \text{pour } n \geqslant N''' \text{ et } |x-a| < \beta,$$

ce qui, joint à (6), en posant $N = \max\{N', N'', N'''\}$, entraîne

$$L_n(h;x) \geqslant -4B\varepsilon - 2A\varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant N \text{ et } |x-a| > \beta.$$

La constante A ne dépendant que de la définition de la suite (L_n) et la constante B ne dépendant que de la fonction h et de sa décomposition $h = h_c + h_d$, la suite (L_n) est donc semi-positive sur le sous-espace des fonctions à variation bornée continues au point a. □

Corollaire VII.2.2. *Soit (g_n) une approximation de l'unité et soit (L_n) la suite des opérateurs de convolution sur $VB(\mathbb{R})$ qui lui est associée.*
Quelle que soit la fonction $h \in VB(\mathbb{R})$, en un point a où h est essentiellement continue, *c'est-à-dire vérifie $h^-(a) = h^+(a)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers l'application $\tilde{h}_a$ définie par*

$$\tilde{h}_a(x) = \begin{cases} h(x) & si \quad x \neq a \\ h^-(a) & si \quad x = a\ . \end{cases}$$

Démonstration. La fonction $\tilde{h}_a$ est continue au point a et elle appartient à $VB(\mathbb{R})$. La suite $(L_n(\tilde{h}_a))$ converge donc localement vers $\tilde{h}_a$ au point a d'après le théorème **VII.2.1**. Les fonctions h et $\tilde{h}_a$ différant en au plus un point, on a $L_n(h) = L_n(\tilde{h}_a)$ pour tout n, donc la suite $(L_n(h))$ converge localement vers $\tilde{h}_a$ au point a. □

Remarque. Une fonction continue en un point est, de manière évidente, essentiellement continue en ce point et on a alors $\tilde{h}_a = h$; dans ce cas, le corollaire **VII.2.2** se réduit au résultat démontré au théorème **VII.2.1**.

La convergence locale de la suite $(L_n(h))$ en tout point où h est essentiellement continue [Corollaire **VII.2.2**] entraîne la convergence simple de $(L_n(h))$ en ces points mais n'entraîne pas, en général, la convergence simple de $(L_n(h))$ en d'autres points [Proposition **I.1.3**].

Une propriété remarquable des opérateurs définis par convolution avec une approximation de l'unité est qu'il n'y a que deux cas possibles :

- ou bien, pour tout $h \in VB(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ ne converge simplement qu'en les points où h est essentiellement continue,
- ou bien, pour tout $h \in VB(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

On a en effet le

Théorème VII.2.3. *Soit (g_n) une approximation de l'unité et soit (L_n) la suite des opérateurs de convolution sur $VB(\mathbb{R})$ qui lui est associée.*
Pour toute fonction h, élément de $VB(\mathbb{R})$, une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(L_n(h))$ converge simplement en un point a où h n'est pas essentiellement continue est que la suite $(G_n(0,1))$ ait une limite λ. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} L_n(h;a) = \lambda\ h^-(a) + (1-\lambda)\ h^+(a).$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Un point a de $\mathbb{R}$ étant fixé et les fonctions $L_n(h)$ ne dépendant que de la classe de h dans $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$, on peut supposer que $h(a) = h^-(a)$. On considère alors la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a = h + \big(h^+(a) - h^-(a)\big)\,\chi_a$, où χ_a est la fonction caractéristique du segment $[a-1, a]$. Cette fonction est à variation bornée et elle est continue au point a puisque l'on a

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t\to a\\ t<a}} h_a(t) &= h^-(a) + \big(h^+(a) - h^-(a)\big) \times 1 = h^+(a) = h_a(a),\\ \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} h_a(t) &= h^+(a) + \big(h^+(a) - h^-(a)\big) \times 0 = h^+(a) = h_a(a).\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème **VII.2.1** : $L_n(h_a)$ converge localement vers h_a au point a, donc $L_n(h_a; a)$ tend vers $h_a(a) = h^+(a)$. Par linéarité, on a

$$L_n(h_a; a) = L_n(h; a) + \big(h^+(a) - h^-(a)\big)\ L_n(\chi_a; a)$$

et un calcul immédiat donne $L_n(\chi_a; a) = G_n(0,1)$. Si la fonction h n'est pas essentiellement continue au point a, on a $h^+(a) - h^-(a) \neq 0$, donc

$$L_n(h; a) = L_n(h_a; a) - \big(h^+(a) - h^-(a)\big)\ G_n(0,1)$$

a une limite si et seulement si $G_n(0,1)$ a une limite λ et on a alors

$$\lim_{n\to\infty} L_n(h; a) = h^+(a) - \big(h^+(a) - h^-(a)\big)\ \lambda = \lambda\, h^-(a) + (1-\lambda)\, h^+(a). \qquad \square$$

Remarque. Si (g_n) est une approximation de l'unité et si la suite $(G_n(0,1))$ a une limite λ, alors la suite $(G_n(0,c))$ tend vers λ quel que soit $c > 0$, et réciproquement. En effet, on a

$$G_n(0,c) - G_n(0,1) = G_n(1,c)$$

qui tend vers 0 quel que soit $c > 0$ [Lemme **VII.1.3**]. La condition « la suite $(G_n(0,1))$ a une limite λ" peut donc être remplacée dans le théorème par « la suite $(G_n(0,c))$ a une limite λ".

Corollaire VII.2.4. *Soit (g_n) une approximation de l'unité telle que la suite $(G_n(0,1))$ ait une limite λ et soit (L_n) la suite des opérateurs de convolution sur $VB(\mathbb{R})$ associée à (g_n). Quelle que soit la fonction $h \in VB(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge simplement vers $\lambda\ h^- + (1-\lambda)\ h^+$ et cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue.*

Démonstration. a) En un point a où h n'est pas essentiellement continue, le théorème **VII.2.3** établit que la suite $(L_n(h; a))$ converge vers $\lambda\ h^-(a) + (1-\lambda)\ h^+(a)$.

b) En un point où h est essentiellement continue, le corollaire **VII.2.2** établit que la suite $(L_n(h))$ converge localement au point a vers l'application $\tilde{h}_a$ qui coïncide avec h sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ et qui prend la valeur $h^-(a)$ au point a. Il en résulte que la suite $(L_n(h; a))$ converge vers $\tilde{h}_a(a) = h^-(a)$, c'est-à-dire vers $\lambda\ h^-(a) + (1-\lambda)\ h^+(a)$, puisque $h^-(a) = h^+(a)$.
Les fonctions $\tilde{h}_a$ et $\lambda\ h^- + (1-\lambda)\ h^+$ prennent la même valeur au point a et, les fonctions h^+ et h^- ayant mêmes limites à droite et à gauche que la fonction h, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t\to a\\ t<a}} \big(\tilde{h}_a(t) - \big(\lambda\, h^-(t) + (1-\lambda)\, h^+(t)\big)\big) &= h^-(a) - \big(\lambda\, h^-(a) + (1-\lambda)\, h^-(a)\big)\\ &= 0,\\ \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \big(\tilde{h}_a(t) - \big(\lambda\, h^-(t) + (1-\lambda)\, h^+(t)\big)\big) &= h^+(a) - \big(\lambda\, h^+(a) + (1-\lambda)\, h^+(a)\big)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Les fonctions $\tilde{h}_a$ et $\lambda\ h^- + (1-\lambda)\ h^+$ sont donc localement équivalentes au point a [Définition **I.1.6**] et, d'après la proposition **I.1.7**, la convergence locale de $(L_n(h))$ vers $\tilde{h}_a$ au point a entraîne la convergence locale de $(L_n(h))$ vers $\lambda\ h^- + (1-\lambda)\ h^+$ au point a. □

Exemple VII.2.5. Soit g une fonction appartenant à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$ et soit c (resp. c_+, resp. c_-) la valeur de son intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}_+$, resp. $\mathbb{R}_-$). Si $c \neq 0$, on considère l'opérateur L_n défini sur $VB(\mathbb{R})$ par

$$L_n(h;x) = \frac{n}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} g(nt)\ h(x-t)\ dt\ .$$

Pour toute fonction $h \in VB(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge simplement vers la fonction $\dfrac{1}{c}\left(c^+\ h^- + c^-\ h^+\right)$ et cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue.

Démonstration. Soit γ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\gamma(x) = \int_0^x g(t)\ dt\ .$$

Cette fonction est bornée puisqu'elle est continue et qu'elle a une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$.

Soit g_n la fonction définie par $g_n(t) = \dfrac{1}{c}\ g(nt)$. Par changement de variable, on a

$$G_n(x,y) = \int_x^y g_n(t)\ dt = \frac{n}{c}\int_x^y g(nt)\ dt = \frac{1}{c}\int_{nx}^{ny} g(s)\ ds = \frac{1}{c}\left(\gamma(ny) - \gamma(nx)\right).$$

Il en résulte que

a) Quel que soit n, $G_n(x,y)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $-\infty$ et y tend vers $+\infty$. Les fonctions g_n appartiennent donc à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$.

b) Quels que soient x et y, on a

$$|G_n(x,y)| = \frac{1}{|c|}\,|\gamma(ny) - \gamma(nx)| \leqslant \frac{2}{|c|}\,\|\gamma\|_\infty\,,$$

donc les fonctions G_n sont uniformément bornées.

c) Par hypothèse $\gamma(Y) - \gamma(X)$ tend vers c quand X et Y tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $A > 0$ tel que

$$|\gamma(Y) - \gamma(X) - c| < \varepsilon \quad \text{pour } X \leqslant -A \text{ et } Y \geqslant A.$$

Il en résulte que, quel que soit $\alpha > 0$, on a

$$|G_n(x,y) - 1| = \frac{1}{|c|}\,|\gamma(ny) - \gamma(nx) - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \text{pour } x \leqslant -\alpha, y \geqslant \alpha \text{ et } n \geqslant \frac{A}{\alpha}.$$

Les fonctions G_n convergent donc uniformément vers 1 sur $]-\infty,-\alpha] \times [+\alpha,+\infty[$.

Les propriétés démontrées en **a)**, **b)** et **c)** expriment que (g_n) est une approximation de l'unité et que

$$G_n(0,1) = \frac{1}{c}\left(\gamma(n) - \gamma(0)\right)$$

tend vers $\lambda = c_+/c$ lorsque n tend vers l'infini.

Le corollaire **VII.2.4** entraîne alors que $(L_n(h))$ converge simplement vers la fonction $\lambda\ h^- + (1-\lambda)\ h^+$, avec $\lambda = c_+/c$ et $1-\lambda = c_-/c$, et que cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3. — Approximation par des opérateurs de convolution sur $VB_{loc}(\mathbb{R})$

Les résultats précédents ne s'étendent pas directement à l'espace $VB_{loc}(\mathbb{R})$ des fonctions à variation bornée sur tout compact. La démonstration du théorème **VII.2.1**, utilise la décomposition de tout élément h de $VB(\mathbb{R})$ en la somme de deux fonctions monotones appartenant à $VB(\mathbb{R})$, ce qui est impossible à faire si h appartient à $VB_{loc}(\mathbb{R})\setminus VB(\mathbb{R})$. Cet obstacle est essentiel et ne tient pas à un mauvais choix de démonstration, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Exemple VII.3.1. Pour $n \geqslant 1$, soit g_n la fonction définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad x \in [0, 1/n[\\ 1/n & \text{si} \quad x \in]2p-1, 2p[\quad \text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n \\ -1/n & \text{si} \quad x \in]2p, 2p+1[\quad \text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit h la fonction paire définie par

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]2p-1, 2p[\quad \text{pour } 1 \leqslant p \\ -1 & \text{si} \quad x \in]2p, 2p+1[\quad \text{pour } 1 \leqslant p \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\cup \mathbb{N} \end{cases}$$

La suite (g_n) est une approximation de l'unité.
La fonction h est bornée, continue au point 0, et est à variation bornée sur tout compact, mais la suite $(L_n(h;0))$ converge vers 2, qui est différent de $h(0) = 0$.

Démonstration. **a)** Les fonctions g_n appartiennent à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, donc à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$.
b) Quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|G_n(x,y)| = \left| \int_x^y g_n(t)\, dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(t)|\, dt = 1 + 2n \times 1/n = 3,$$

donc (G_n) est uniformément bornée, a fortiori uniformément bornée au voisinage de $(0,0)$.
c) Pour $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on a $G_n(x,y) = G_n(0,y)$.
Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $y \mapsto G_n(0,y)$ est continue et est affine sur les intervalles $[0,1/n]$, $[1/n,1]$ et $[q,q+1]$ avec $1 \leqslant q \leqslant 2n+1$; elle prend les valeurs suivantes aux bornes de ces segments

$$\begin{array}{lll} G_n(0,0) = 0 & & \\ G_n(0,1/n) = 1 & & \\ G_n(0,2p-1) = 1 & \text{pour} & 1 \leqslant p \leqslant n+1 \\ G_n(0,2p) = 1 + 1/n & \text{pour} & 1 \leqslant p \leqslant n \end{array}$$

et elle est constante de valeur 1 sur $[2n+1, +\infty[$. Pour $\alpha > 0$ et $1/n \leqslant \alpha$, c'est-à-dire $n \geqslant 1/\alpha$, on a donc $|G_n(0,y) - 1| \leqslant 1/n$ pour tout $y \geqslant \alpha$.
Sur $]-\infty, -\alpha] \times [\alpha, +\infty[$, on a alors

$$|G_n(x,y) - 1| = |G_n(0,y) - 1| \leqslant 1/n \ \text{ pour tout } n \geqslant 1/\alpha,$$

ce qui signifie que la suite (G_n) converge uniformément vers 1 sur cet ensemble.

Les propriétés établies en **a)**, **b)** et **c)** entraînent que (g_n) est une approximation de l'unité. La fonction h est bornée par 1, elle est continue au point 0 et, pour tout

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

entier $N \geqslant 1$, sa variation sur $[-N,+N]$ est finie, égale à $4(N-1)$, donc h appartient à $VB_{loc}(\mathbb{R})$, mais on a

$$L_n(h;0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ h(-t)\ dt = \int_0^{+\infty} g_n(t)\ h(t)\ dt = 2n \times 1/n = 2,$$

donc $(L_n(h))$ ne converge pas simplement vers h au point 0. □

Un autre obstacle à l'extension de la théorie à $VB_{loc}(\mathbb{R})$ est qu'une fonction à variation bornée sur tout compact est intégrable sur tout compact, mais n'est pas nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$. Le produit de convolution d'une telle fonction avec $g_n \in \mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$ n'est donc pas toujours défini. Une extension du théorème **VII.2.1** à l'espace $VB_{loc}(\mathbb{R})$ n'est donc pas en général possible, mais, une approximation de l'unité $g_* = (g_n)$ étant fixée, on peut envisager cette extension à un sous-espace adapté de $VB_{loc}(\mathbb{R})$.

Notation VII.3.2. *Soit $g_* = (g_n)$ une approximation de l'unité. On note $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$ le sous-espace des fonctions h à variation bornée sur tout compact qui vérifient*

1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g_n(t)\ h(a-t)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$;*

2) *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a, un réel $A > |a|$ et un entier N tels que, h_A désignant la fonction égale à h sur $[-A,A]$ et nulle à l'extérieur de ce segment, on ait*

$$|L_n(h-h_A;x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } x \in V \text{ et } n \geqslant N\ .$$

La condition **1)** assure que les fonctions $L_n(h)$ sont définies pour toute fonction $h \in VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$. La fonction h_A appartenant à $VB(\mathbb{R})$, les fonctions $L_n(h-h_A)$ sont alors aussi définies, ce qui assure que la condition **2)** a bien un sens.

Remarque VII.3.3. Une condition suffisante pour que **2)** soit vérifié est qu'il existe un réel $A > |a|$ tel que la suite $(L_n(h-h_A))$ converge localement au point a.

Proposition VII.3.4. *Pour toute approximation de l'unité g_*, on a*

$$VB(\mathbb{R}) \subset VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)\ .$$

Démonstration. Si $h \in VB(\mathbb{R})$, l'application $t \mapsto g_n(t)\ h(a-t)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$ d'après le lemme **VII.0.1** et, quel que soit $A > |a|$, la suite $(L_n(h-h_A))$ converge localement vers 0 au point a d'après le théorème **VII.2.1**, puisque $h-h_A$ est à variation bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue et nulle au point a. □

Le théorème suivant est donc une extension du théorème **VII.2.1**.

Théorème VII.3.5. *Soit $g_* = (g_n)$une approximation de l'unité et soit (L_n) la suite des opérateurs de convolution sur $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$ qui lui est associée.*
Pour toute fonction h appartenant à $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$, on a :

(i) *La suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point où h est continue.*

(ii) *Si la suite $(G_n(0,1))$ a une limite λ, la suite $(L_n(h))$ converge simplement vers $\lambda h^- + (1-\lambda)h^+$ et cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue.*

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Soit h une fonction appartenant à $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$. Un point a et un réel $\varepsilon>0$ étant fixés, il existe un voisinage V de a, un réel $A>0$ et un entier N tels que l'on ait

$$|L_n(h-h_A;x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{pour } x\in V \text{ et } n\geqslant N\,.$$

La fonction h étant à variation bornée sur le compact $[-A,+A]$, la fonction h_A appartient à $VB(\mathbb{R})$. Par ailleurs, h_A coïncidant avec h au voisinage de a, cette fonction est continue au point a si et seulement si h est continue au point a et on a toujours $h_A^-=h^-$ et $h_A^+=h^+$ sur $]-A,+A[$.

(i) Si h est continue au point a, la suite $(L_n(h_A))$ converge localement vers h_A, donc vers h au point a [Théorème **VII.2.1**]. Il existe donc un voisinage V' de a et un entier N' tels que l'on ait

$$|L_n(h_A;x)-h(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{pour } x\in V' \text{ et } n\geqslant N'\,.$$

Si $x\in V\cap V'$ et $n\geqslant\max\{N,N'\}$, on a donc

$$|L_n(h;x)-h(x)|\leqslant|L_n(h-h_A);x|+|L_n(h_A;x)-h(x)|\leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui démontre la convergence locale de $(L_n(h))$ vers h au point a.

(ii) Si $(G_n(0,1))$ tend vers λ, la suite $(L_n(h_A))$ converge simplement vers la fonction $\lambda h_A^-+(1-\lambda)h_A^+$ donc simplement vers $\lambda h^-+(1-\lambda)h^+$ sur $]-A,+A[$, et cette convergence est locale au point a si h_A est essentiellement continue en ce point [Corollaire **VII.2.4**].

a) La convergence simple entraîne qu'il existe un entier N' tel que l'on ait

$$\big|L_n(h_A;a)-\big(\lambda h^-(a)+(1-\lambda)h^+(a)\big)\big|\leqslant\varepsilon \quad \text{pour } n\geqslant N\,.$$

Si $n\geqslant\max\{N,N'\}$, on a donc

$$\begin{aligned}\big|L_n(h;a)-\big(\lambda h^-(a)+(1-\lambda)h^+(a)\big)\big|&\\ \leqslant|L_n(h-h_A;a)|+\big|L_n(h_A;a)-\big(\lambda h^-(a)+(1-\lambda)h^+(a)\big)\big|&\leqslant 2\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui démontre la convergence simple de $(L_n(h))$ vers $\lambda h^-+(1-\lambda)h^+$ au point a, donc en tout point puisque a est arbitraire.

b) Si h, donc aussi h_A, est essentiellement continue au point a, il existe un voisinage V' de a et un entier N' tels que l'on ait

$$\big|L_n(h_A;x)-\big(\lambda h^-(x)+(1-\lambda)h^+(x)\big)\big|\leqslant\varepsilon \quad \text{pour } x\in V' \text{ et } n\geqslant N'\,.$$

Si $x\in V\cap V'$ et $n\geqslant\max\{N,N'\}$, on a donc

$$\begin{aligned}\big|L_n(h;x)-\big(\lambda h^-(x)+(1-\lambda)h^+(x)\big)\big|&\\ \leqslant|L_n(h-h_A;x)|+\big|L_n(h_A;x)-\big(\lambda h^-(x)+(1-\lambda)h^+(x)\big)\big|&\leqslant 2\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui démontre la convergence locale de $(L_n(h))$ vers $\lambda h^-+(1-\lambda)h^+$ au point a. □

Remarque. Le théorème **VII.3.5** permet d'établir une réciproque à la remarque **VII.3.3** qui signale que la convergence locale de la suite $(L_n(h-h_A))$ vers 0 au point a entraîne la condition **2)** de la définition de $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$ [Notation **VII.3.2**]. En effet, pour toute fonction $h\in VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$ et tout réel $A>|a|$, la fonction h_A, appartenant à $VB(\mathbb{R})$, appartient à $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$ [Proposition **VII.3.4**]. La fonction $h-h_A$ appartient donc à $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$; comme cette fonction est continue au point a et nulle en ce point, le théorème **VII.3.5** entraîne que la suite $(L_n(h-h_A))$ converge localement vers 0 au point a.

La condition **2)** a été cependant conservée sous sa forme initiale car elle peut être techniquement plus facile à vérifier [*cf.* Proposition **VII.3.9**].

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Le théorème **VII.3.5** suppose que l'on sache déterminer l'espace $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$. Cet espace dépendant de g_*, une détermination explicite n'est a priori possible que cas par cas. Moyennant certaines hypothèses simplificatrices sur g_*, on peut cependant déterminer $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$ ou au moins en identifier des sous-espaces importants :

Proposition VII.3.6. *Si $g_* = (g_n)$ est une approximation de l'unité* à support compact (*c'est-à-dire telle que toutes les fonctions g_n sont nulles en dehors d'un segment $[-\alpha,+\alpha]$*), *on a alors $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*) = VB_{loc}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Puisque, par définition, $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)$ est un sous-espace de $VB_{loc}(\mathbb{R})$, il reste à montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire que tout élément h de $VB_{loc}(\mathbb{R})$ vérifie les conditions de la notation **VII.3.2**.

1)Quel que soit a, les restrictions à $[-\alpha,+\alpha]$ des fonctions

$$t \mapsto g_n(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto h(a-t)$$

appartiennent respectivement à $\mathscr{L}^1([-\alpha,+\alpha])$ et $\mathscr{L}^\infty([-\alpha,+\alpha])$, donc la restriction de la fonction $t \mapsto g_n(t)\ h(a-t)$ à $[-\alpha,+\alpha]$ appartient à $\mathscr{L}^1([-\alpha,+\alpha])$. Comme cette fonction est nulle en dehors de $[-\alpha,+\alpha]$, elle appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

2)Étant donné un point a, on pose $A = 2\alpha + |a|$. La fonction $h - h_A$ étant nulle sur $[-A,+A]$, on a

$$L_n(h-h_A);x) = \int_{-\infty}^{x-A} g_n(t)\ h(x-t)\ dt + \int_{x+A}^{+\infty} g_n(t)\ h(x-t)\ dt\ .$$

Si $|x-a| \leqslant \alpha$, on a : $x - A \leqslant -\alpha$ et $x + A \geqslant \alpha$, donc les fonctions $L_n(h-h_A)$ sont nulles sur $[a-\alpha, a+\alpha]$ et elles tendent donc localement vers 0 au point a. □

Corollaire VII.3.7. *Soit $g_* = (g_n)$ une approximation de l'unité à support compact. Les opérateurs de convolution L_n sont définis sur $VB_{loc}(\mathbb{R})$ et, pour toute fonction $h \in VB_{loc}(\mathbb{R})$, on a :*

(i) *La suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point où h est continue.*

(ii *Si la suite $(G_n(0,1))$ a une limite λ, la suite $(L_n(h))$ converge simplement vers $\lambda h^- + (1-\lambda)h^+$ et cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue.*

Démonstration. On a $VB_{loc}(\mathbb{R};g_*) = VB_{loc}(\mathbb{R})$ d'après la proposition **VII.3.6**; on applique le théorème **VII.3.5**. □

Remarque. Il ne suffit pas que chaque fonction g_n soit à support compact. Par exemple, pour l'approximation de l'unité de l'exemple **VII.3.1**, le support de g_n est compact pour tout n (contenu dans $[0,2n+1]$) mais, bien que la fonction h de l'exemple soit bornée et à variation bornée sur tout compact, la suite $(L_n(h))$ ne converge pas localement vers h au point 0.

Application VII.3.8. Soit (D_n) la suite des opérateurs de Dirichlet définis sur $VB_{loc}(\mathbb{R})$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(h;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\ h(x-t)\ dt\ .$$

Quelle que soit la fonction $h \in VB_{loc}(\mathbb{R})$, la suite $(D_n(h))$ converge simplement vers $\frac{1}{2}(h^+ + h^-)$ sur $\mathbb{R}$ et elle converge localement vers h en tout point où h est essentiellement continue. Si h est continue et périodique, quelle que soit sa période, la suite $(D_n(h))$ converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. **a)** Les fonctions g_n, définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > \pi \\ \dfrac{2n+1}{2\pi} & \text{si} \quad t = 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2} = \dfrac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=0}^{n}\cos kt\right) & \text{si} \quad 0 < |t| \leqslant \pi \end{cases}$$

appartiennent à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, sont à support compact et $D_n(h)$ est le produit de convolution de g_n et de h. On vérifie les hypothèses du corollaire **VII.3.7** :

b) Pour $t \in [-\pi, +\pi]\backslash\{0\}$, on a

$$\begin{aligned} 2\pi\, g_n(t) &= \frac{\sin nt\ \cos t/2 + \cos nt\ \sin t/2}{\sin t/2} \\ &= \sin nt\ \operatorname{cotan} t/2 + \cos nt = \left(\frac{2}{t} + r(t)\right)\sin nt + \cos nt \end{aligned}$$

où r est une fonction définie et continue sur $[-\pi, +\pi]$. Pour $(x, y) \in [-\pi, +\pi]^2$, on a donc

$$2\pi\, G_n(x, y) = 2\int_x^y \frac{\sin nt}{t}\, dt + \int_x^y (r(t)\sin nt + \cos nt)\, dt\ .$$

La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

est continue et a une limite finie à l'infini. Cette fonction est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\left|\int_x^y \frac{\sin nt}{t}\, dt\right| = \left|\int_{nx}^{ny} \frac{\sin s}{s}\, dt\right| = |\varphi(ny) - \varphi(nx)| \leqslant 2\,\|\varphi\|_\infty\ .$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} 2\pi\,|G_n(x, y)| &\leqslant 2\left|\int_x^y \frac{\sin nt}{t}\, dt\right| + \left|\int_x^y (r(t)\sin nt + \cos nt)\, dt\right| \\ &\leqslant 4\,\|\varphi\|_\infty + \int_{-\pi} +\pi\,(|r(t)| + 1)\ dt, \end{aligned}$$

ce qui démontre que la suite (G_n) est uniformément bornée sur $[-\pi, +\pi]^2$.

c) Les fonctions g_n étant paires, on a

$$\begin{aligned} G_n(x, y) &= G_n(-\pi, \pi) - G_n(-\pi, x) - G_n(y, \pi) \\ &= G_n(-\pi, \pi) - G_n(-x, \pi) - G_n(y, \pi) \end{aligned}$$

Comme $G_n(-\pi, +\pi) = 1$, pour montrer que la suite (G_n) tend uniformément vers 1 sur $]-\infty, -\alpha] \times [+\alpha, +\infty[$, il suffit donc de démontrer que la suite $(G_n(z, \pi))$ tend uniformément vers 0 sur $[+\alpha, +\infty[$.
Si $z \in]0, \pi]$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} G_n(z, \pi) &= \frac{1}{2\pi}\int_z^{+\pi} \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2}{2n+1}\,\frac{\cos(2n+1)t/2}{\sin t/2}\right]_z^{\pi} \\ &\qquad -\frac{1}{2\pi}\int_z^{+\pi} \frac{2}{2n+1}\,\frac{\cos t/2}{2\sin^2 t/2}\cos(2n+1)t/2\, dt \\ &= \frac{1}{(2n+1)\pi}\left(\frac{1}{\sin z/2} - \int_z^{\pi} \frac{\cos t/2}{2\sin^2 t/2}\cos(2n+1)t/2\, dt\right), \end{aligned}$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

d'où

$$|G_n(z,\pi)| \leqslant \frac{1}{(2n+1)\pi}\left(\frac{1}{\sin z/2}+\int_z^\pi \frac{\cos t/2}{2\sin^2 t/2}\,dt\right) = \frac{1}{(2n+1)\pi}\left(\frac{2}{\sin z/2}-1\right).$$

Il en résulte que la suite $(G_n(z,\pi))$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de $]0,\pi]$, et donc qu'elle converge uniformément vers 0 sur $[\alpha,+\infty[$ pour tout $\alpha>0$, puisque $G_n(z,\pi)=0$ si $z\geqslant\pi$.

Les propriétés démontrées en **a)**, **b)** et **c)** entraînent que (g_n) est une approximation de l'unité. Elle est à support compact et, les fonctions g_n étant paires, on a $G_n(-1,1) = 2G_n(0,1)$, donc $\lim G_n(0,1) = 1/2$. Le corollaire **VII.3.7** entraîne alors que, pour toute fonction $h \in VB_{loc}(\mathbb{R})$, la suite $(D_n(h))$ converge simplement vers $\frac{1}{2}(h^- + h^+)$ sur $\mathbb{R}$ et que cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue.

Si h est continue, la suite $(D_n(h))$ converge vers h uniformément sur tout compact puisque la convergence locale en tout point entraîne la convergence uniforme sur tout compact [Théorème **I.2.3**]. Si, de plus, h est périodique de période T, les fonctions $D_n(h)$ sont périodiques de période T et la suite $(D_n(h))$, qui converge uniformément vers h sur un intervalle de période converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$. □

Remarque. Pour $T = 2\pi$, on retrouve les théorèmes classiques sur la convergence des séries de Fourier [Zygmund, 1952].

On peut étendre les résultats précédents à des approximations de l'unité qui ne sont pas à support compact mais qui, en un certain sens, sont négligeables en dehors d'un compact :

Proposition VII.3.9. *Soit $g_* = (g_n)$ une approximation de l'unité* presque à support compact, *c'est-à-dire telle que les fonctions g_n soient bornées à l'extérieur d'un segment $[-\alpha_0,+\alpha_0]$ et que, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $\alpha\geqslant\alpha_0$ et un entier N tels que l'on ait $\sup_{|t|\geqslant\alpha}|g_n(t)|\leqslant\varepsilon$ pour $n\geqslant N$. On a alors*

$$VB_{loc}(\mathbb{R})\cap\mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \subset VB_{loc}(\mathbb{R};g_*)\ .$$

Démonstration. Soit h une fonction appartenant à $VB_{loc}(\mathbb{R})\cap\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. On fixe un point a.

1) Soit $A_0 = \max\{\alpha_0,|a|\}$.

a) La restriction de g_n à $\mathbb{R}\backslash[-A_0,+A_0]$ appartient à $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}\backslash[-A_0,+A_0])$, puisque $g_n\in\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ et que $A_0\geqslant\alpha_0$; la restriction de la fonction $t\mapsto h(a-t)$ à $\mathbb{R}\backslash[-A_0,+A_0]$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}\backslash[-A_0,+A_0])$, puisque $h\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. La restriction de la fonction $t\mapsto g_n(t)\ h(a-x)$ à $\mathbb{R}\backslash[-A_0,+A_0]$ appartient donc à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}\backslash[-A_0,+A_0])$.

b) La restriction de g_n à $[-A_0,+A_0]$ appartient à $\mathscr{L}^1([-A_0,+A_0])$, puisque $g_n\in\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$; la restriction de la fonction $t\mapsto h(a-t)$ à $[-A_0,+A_0]$ appartient à $\mathscr{L}^\infty([-A_0,+A_0])$ puisque h est à variation bornée sur tout compact. La restriction de $t\mapsto g_n(t)\ h(a-t)$ à $[-A_0,+A_0]$ appartient donc à $\mathscr{L}^1([-A_0,+A_0])$.

Il résulte de **a)** et **b)** que la fonction $t\mapsto g_n(t)\ h(a-t)$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, donc à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$.

www.spartacus-idh.com © Spartacus-Idh 2025

2) Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit $\alpha \geqslant \alpha_0$ et N tels que $\sup_{|t|\geqslant\alpha} |g_n(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$; on pose $A = 2\alpha + |a|$. La fonction $h - h_A$ étant nulle sur $[-A, +A]$, on a

$$L_n(h - h_A; x) = \int_{-\infty}^{x-A} g_n(t)\, h(x-t)\, dt + \int_{x+A}^{+\infty} g_n(t)\, h(x-t)\, dt.$$

Si $|x - a| \leqslant \alpha$, on a $x - A \leqslant -\alpha$ et $x + A \geqslant \alpha$. On a donc

$$|L_n(h - h_A; x)| \leqslant \sup_{|t|\geqslant\alpha} |g_n(t)|\ \|h\|_1 \leqslant \varepsilon \|h\|_1 \quad \text{pour } |x-a| \leqslant \alpha \text{ et } n \geqslant N\ .$$

La quantité $\|h\|_1$ ne dépendant que de la donnée de h, cette fonction vérifie la condition **2)** de la caractérisation des éléments de $VB_{loc}(\mathbb{R}; g_*)$ □

Corollaire VII.3.10. *Soit $g_* = (g_n)$ une approximation de l'unité presque à support compact. Les opérateurs de convolution L_n qui lui sont associés sont définis sur $VB_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et, étant donné $h \in VB_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, on a :*

(i) *La suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point où h est continue.*

(ii) *Si la suite $(G_n(0,1))$ a une limite λ, la suite $(L_n(h))$ converge simplement vers $\lambda h^- + (1-\lambda)h^+$ et cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue.*

Démonstration. On a $VB_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \subset VB_{loc}(\mathbb{R}; g_*)$ d'après la proposition **VII.3.9** ; on applique le théorème **VII.3.5**. □

Application VII.3.11. On considère, comme dans l'exemple **VII.2.5**, une fonction g appartenant à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$, on note c (resp. c_+, resp. c_-) la valeur de son intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^*_+$, resp. $\mathbb{R}^*_-$).
Si $c \neq 0$, et si la fonction g est $O(|t|^{-1})$ à l'infini, on définit sur $VB_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ les opérateurs de convolution L_n par

$$L_n(h; x) = \frac{n}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} g(nt)\, h(x-t)\, dt\ .$$

Pour toute fonction $h \in VB_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, la suite $(L_n(h))$ converge simplement vers $\frac{1}{c}(c_+h^- + c_-h^+)$; cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue.

Démonstration. **a)** Les notations étant celles de l'exemple **VII.2.5**, si g est $O(|t|^{-1})$ à l'infini, c'est-à-dire s'il existe $\alpha_0 > 0$ et $M > 0$ tels que $|g(t)| \leqslant M\,|t|^{-1}$ pour $|t| \geqslant \alpha_0$, les applications g_n définies par $g_n(t) = \frac{n}{c} g(nt)$ sont bornées à l'extérieur de $[-\alpha_0, \alpha_0]$ puisque

$$|g_n(t)| = \frac{n}{c}\,|g(nt)| \leqslant \frac{n}{c}\frac{M}{n\,|t|} \leqslant \frac{M}{c\,\alpha_0} \quad \text{pour } |t| \geqslant \alpha_0\ .$$

b) On montre de même que, quel que soit $\alpha \geqslant \alpha_0$, on a $\sup_{|t|\geqslant\alpha} |g_n(t)| \leqslant \frac{M}{c\,\alpha}$, ce qui entraîne $\sup_{|t|\geqslant\alpha} |g_n(t)| \leqslant \varepsilon$ si $\alpha = \frac{M}{c\,\varepsilon}$, sans condition sur n.

Les propriétés établies en **a)** et **b)** montrent que l'approximation de l'unité (g_n) est presque à support compact, et on a

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} G_n(0,1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{c} \int_0^1 g(nt)\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c} \int_0^n g(s)\, ds = \frac{c_+}{c}\ .$$

On applique le corollaire **VII.3.10**. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Un exemple d'utilisation de ce résultat est la démonstration d'une version locale de la formule de réciprocité de Fourier pour les fonctions intégrables à variation bornée sur tout compact :

Proposition VII.3.12. *Pour toute fonction h intégrable sur $\mathbb{R}$ et à variation bornée sur tout compact, la suite $(F_n(h))$ des fonctions définies par*

$$F_n(h;x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} e^{\imath xt}\, \hat{h}(t)\, dt,$$

où $\hat{h}$ est la transformée de Fourier de h définie par

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath ts} h(s)\, ds,$$

converge simplement vers $\frac{1}{2}(h^- + h^+)$ et cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue.

Démonstration. La fonction h appartenant à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $\hat{h}$ est la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$h_p \;:\; t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{+p} e^{-\imath ts}\, h(s)\, ds,$$

puisqu'on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left|\hat{h}(t) - h_p(t)\right| \leqslant \left| \int_{|s|\geqslant p} e^{-\imath ts}\, h(s)\, ds \right| \leqslant \int_{|s|\geqslant p} |h(s)|\, ds\ .$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} F_n(h;x) &= \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{\imath xt} \left(\int_{-p}^{+p} e^{-\imath ts}\, h(s)\, ds \right) dt \\ &= \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{+p} \left(\int_{-n}^{+n} e^{\imath(x-s)t}\, dt \right) h(s)\, ds \\ &= \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-p}^{+p} \frac{\sin n(x-s)}{(x-s)} h(s)\, ds = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n(x-s)}{n(x-s)} h(s)\, ds\ . \end{aligned}$$

On reconnaît, dans cette expression des opérateurs F_n, les opérateurs de convolution associés [Application **VII.3.11**] à la fonction g définie par

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

Cette fonction appartient à $\mathscr{L}^1_{gén}(\mathbb{R})$ et elle est $O(|t|^{-1})$ à l'infini. La suite $(F_n(h))$ converge donc simplement vers $\frac{1}{2}(h^- + h^+)$ et cette convergence est locale en tout point où h est essentiellement continue. □

Corollaire VII.3.13. *Pour toute fonction h intégrable sur $\mathbb{R}$ et à variation bornée sur tout compact, si la transformée de Fourier $\hat{h}$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath xt}\, \hat{h}(t)\, dt = \frac{1}{2}\left(h^-(x) + h^+(x)\right)\ .$$

Démonstration. C'est évident en remarquant que la fonction $t \mapsto e^{\imath xt}\hat{h}$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Remarque. Ce dernier résultat ne doit pas faire illusion : il est rare que $\hat{h}$ appartienne à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Par exemple, pour une fonction aussi simple que la fonction caractéristique du segment $[-1,+1]$, la transformée de Fourier est la fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin t}{t}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Autres applications possibles. La notion d'approximation de l'unité *presque à support compact* [Proposition **VII.3.9**] a été retenue parce qu'elle est une extension naturelle de la notion d'approximation de l'unité à support compact; les complémentaires des segments formant un système fondamental de voisinages du point à l'infini, on a :
– la suite (g_n) est à support compact si les fonctions g_n sont nulles sur un voisinage de l'infini,
– la suite (g_n) est presque à support compact si les fonctions g_n tendent localement vers 0 à l'infini.

D'autres extensions de la notion d'approximation de l'unité à support compact sont cependant envisageables. Par exemple, en reconnaissant dans la condition « $\sup_{|t|\geqslant\alpha} |g_n(t)| \leqslant \varepsilon$" une propriété de la norme dans $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}\setminus[-\alpha,+\alpha])$, on peut suivre une démarche analogue en utilisant les espaces $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}\setminus[-\alpha,+\alpha])$ en disant qu'une approximation de l'unité $g_* = (g_n)$ est *presque à support compact dans* $\mathscr{L}^q(\mathbb{R})$ si les restrictions des fonctions g_n au complémentaire d'un segment $[-\alpha_0,+\alpha_0]$ appartiennent à $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}\setminus[-\alpha_0,+\alpha_0])$ et si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \geqslant \alpha_0$ et un entier N tels que l'on ait

$$\int_{|t|\geqslant\alpha} |g_n(t)|^q \, dt \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant N.$$

On démontre alors qu'on a

$$VB_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \subset VB_{loc}(\mathbb{R}; g_*) \quad \text{si } 1/p + 1/q = 1,$$

d'où un théorème de convergence des opérateurs de convolution sur l'espace $VB_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

À titre d'exemple, les approximations de l'unité étudiées dans l'application **VII.3.11**, lorsque g est $O(|t|^{-1})$ à l'infini, sont presque à support compact dans l'espace $\mathscr{L}^q(\mathbb{R})$ quel que soit q vérifiant $1 < q \leqslant +\infty$; il en résulte que, pour les suites d'opérateurs de convolution associés, pour toute fonction h dans l'espace $VB_{loc}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, avec $1 \leqslant p < +\infty$, la suite $(L_n(h))$ converge simplement vers la fonction $\frac{1}{c}(c_+h^- + c_-h^+)$ et que cette convergence est locale en tout point où h essentiellement continue.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Chapitre VIII

Équivariance et théorème d'Ascoli

Le théorème d'Ascoli, sous sa forme classique, concerne la compacité, pour la topologie de la convergence uniforme, d'une famille équicontinue d'applications définies sur un espace compact. Deux types d'extensions de ce théorème sont envisageables :

- Quelle(s) condition(s) pour la compacité d'une famille d'applications continues sur un espace non compact ?
- Quelle(s) condition(s) pour la compacité d'une famille d'applications non nécessairement continues sur un espace compact ou non compact ?

Seul le premier problème semble avoir été traité de manière systématique. La réponse est évidente pour les familles équicontinues sur un espace localement compact, la topologie de la convergence uniforme sur tout compact remplaçant la topologie de la convergence uniforme. L'extension aux familles équicontinues de fonctions définies sur un espace topologique quelconque — plus généralement un espace quasi-topologique quelconque — est due à Cook & Fischer [1965], la convergence uniforme étant alors remplacée par la convergence continue.

Ce dernier résultat semble exclure a priori toute autre extension du théorème d'Ascoli, puisque, à la condition d'équicontinuité, il ajoute l'obstacle d'un mode de convergence n'ayant de sens que pour les espaces de fonctions continues [Corollaire **I.3.6**]. La substitution de la convergence locale à la convergence continue lève cet obstacle, sans perte de généralité [Théorème **I.3.4**]. Une éventuelle extension du théorème d'Ascoli à des familles de fonctions non nécessairement continues ne tient donc qu'au remplacement de la condition d'équicontinuité par une condition ad hoc, ne faisant pas référence à la continuité.

Notations VIII.0.1. Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique Y. Pour tout élément k de H, on note $\mathscr{V}_H^s(k)$ le filtre des voisinages de k pour la topologie de la convergence simple ; une base de ce filtre est formé des voisinages élémentaires

$$W_{\varepsilon;A}[k] = \{h \in H \mid \forall a \in A, d(h(a), k(a)) < \varepsilon\}$$

où ε est un réel strictement positif et A un ensemble fini de points de X.

1. — Parties compactes pour la convergence locale

Dans la définition de la convergence locale (qui n'est pas forcément associée à une topologie, *cf.* Paragraphe **1.4**) n'interviennent que des filtres. Si l'on veut définir la compacité pour la convergence locale, il est donc naturel de faire appel aux ultrafiltres qui, dans le cas d'un espace topologique, donnent une

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

caractérisation (« tout ultrafiltre est convergent ») équivalente à l'axiome de Borel-Lebesgue [Bourbaki, *Topologie générale*, chap. I, § 10, N° 1].

Définition VIII.1.1. *On dit qu'un ensemble H d'applications d'un espace topologique X dans un espace topologique séparé Y est* compact pour la convergence locale *si et seulement si tout ultrafiltre sur H converge localement vers un élément de H.*

Remarque. Si la convergence locale est définie par une topologie, on retrouve la notion usuelle de compacité. Par exemple, si X est localement compact, la proposition **I.2.5** entraîne que les compacts pour la convergence locale sont les compacts pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Proposition VIII.1.2. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. Si H est compact pour la convergence locale, alors H est compact pour la topologie de la convergence simple.*

Démonstration. Par hypothèse, tout ultrafiltre sur H converge localement dans H. La convergence locale étant plus fine que la convergence simple [Proposition **I.1.3**], tout ultrafiltre sur H converge simplement dans H, donc H est compact pour la topologie de la convergence simple. □

Théorème VIII.1.3. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique Y. Pour que H soit compact pour la convergence locale, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout $x \in X$, la partie $H(x) = \{h(x) \mid h \in H\}$ est un compact de Y.*

(ii) *H est fermé dans Y^X pour la topologie de la convergence simple.*

(iii) *Tout filtre simplement convergent sur H converge localement.*

Démonstration. Condition nécessaire. On suppose que H est compact pour la convergence locale.
H est alors compact pour la topologie de la convergence simple [Proposition **VIII.1.2**] définie sur Y^X, ce qui entraîne que
– H est fermé dans l'espace Y^X (qui est séparé),
– pour tout x, les parties $H(x)$, images de H par l'application continue ev_x de Y^X dans Y, sont compactes dans Y.
Soit Φ un filtre sur H convergeant simplement vers $f \in H$, alors tout ultrafiltre plus fin que Φ converge simplement vers f. H étant compact pour la convergence locale, cet ultrafiltre converge localement vers un élément de H qui ne peut être que f [Corollaire **I.1.5**]. Le filtre Φ converge donc localement vers f puisque tout ultrafiltre plus fin que lui converge localement vers f [Théorème **I.4.4**].

Condition suffisante. On suppose que H vérifie **i**), **ii**) et **iii**).
On a $H \subset \prod_{x\in X} H(x)$; le produit $\prod_{x\in X} H(x)$ étant compact comme produit des compacts $H(x)$, le sous ensemble fermé H est compact dans l'espace séparé Y^X muni de la topologie de la convergence simple, ce qui signifie [Bourbaki] que tout ultrafiltre sur H converge simplement. La condition (**iii**) entraîne alors que tout ultrafiltre sur H converge localement, ce qui signifie que H est compact pour la convergence locale. □

Les filtres convergeant simplement vers f dans H sont les filtres plus fins que le filtre $\mathscr{V}_H^s(f)$ des voisinages de f pour la topologie de la convergence simple. La condition (**iii**) du théorème peut donc être reformulée [Proposition **VIII.1.5**] uniquement en fonction de ce filtre à l'aide de la

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Définition VIII.1.4. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique. On dit que H est* équivariant au point *a si, pour toute application $f \in H$, le filtre $\mathscr{V}_H^s(f)$ converge localement vers f au point a, c'est-à-dire*

$$\forall f \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists W \in \mathscr{V}_H^s(f), \forall x \in V, \forall h \in W,\ d(h(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On dit que l'ensemble H est équivariant *s'il est équivariant en tout point de X.*

Remarque. La signification de cette condition est plus intuitive si on se restreint à prendre W dans la base constituée des voisinages élémentaires de f. L'équivariance de H au point a s'exprime alors de la manière suivante :
Pour toute application $f \in H$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a, un $\varepsilon' > 0$ et une partie finie A' de X tels que, pour que $h \in H$ soit « ε-voisine » de f en tout point de V, il suffit que h soit « ε'-voisine » de f en tout point de l'ensemble fini A', c'est-à-dire, plus formellement

$$\forall h \in H, \left[\forall a' \in A', d(h(a'), f(a')) < \varepsilon'\right] \Rightarrow \left[\forall x \in V, d(h(x), f(x)) < \varepsilon\right].$$

Proposition VIII.1.5. *Tout filtre simplement convergent sur H converge localement au point a si et seulement si H est équivariant en ce point.*

Démonstration. Condition nécessaire. Si tout filtre convergeant simplement sur H converge localement au point a, alors, en particulier, quelle que soit l'application $f \in H$, le filtre $\mathscr{V}_H^s(f)$, qui converge simplement vers f, converge localement vers f au point a, donc H est équivariant au point a.

Condition suffisante. Si H est équivariant au point a, le filtre $\mathscr{V}_H^s(f)$ des voisinages de f converge localement vers f au point a.
Soit Φ un filtre sur H convergeant simplement vers f. Φ, qui est alors plus fin que le filtre $\mathscr{V}_H^s(f)$, converge localement vers f au point a [Proposition **I.4.3**]. □

La condition (**iii**) du théorème **VIII.1.3** est donc équivalente à l'équivariance de H en tout point de X et le théorème **VIII.1.3** peut être reformulé sous la forme suivante :

Théorème VIII.1.6. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. Pour que H soit compact pour la convergence locale, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout $x \in X$, la partie $H(x) = \{h(x) \mid h \in H\}$ est un compact de Y.*

(ii) *H est fermé dans Y^X pour la topologie de la convergence simple.*

(ev) *H est équivariant.*

Exemple VIII.1.7. Soit (h_n) une suite d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique. Si (h_n) converge localement vers h_∞, en notant $\overline{\mathbb{N}}$ l'ensemble $\mathbb{N} \coprod \{\infty\}$, l'ensemble $H = \{h_n \mid n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ est compact pour la convergence locale.

Démonstration. La convergence locale étant plus fine que la convergence simple, la suite (h_n) converge simplement vers h_∞, donc H est compact pour la topologie de la convergence simple et vérifie alors (**i**) et (**ii**). Il reste à montrer que H est équivariant en tout point $a \in X$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Soit $\varepsilon > 0$. La suite (h_n) convergeant localement vers h_∞, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait

$$d(h_n(x), h_\infty(x)) < \varepsilon/4 \quad \text{pour } x \in V \text{ et } n \geqslant N \qquad (1),$$

et ce résultat, établi pour $n \in \mathbb{N}$, reste vrai pour $n = \infty$. La partie

$$\boldsymbol{I} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in V, d(h_n(x), h_\infty(x)) \geqslant \varepsilon/2\}$$

est finie puisque l'on a $n < N$ pour tout $n \in \boldsymbol{I}$. On pose $\boldsymbol{I} = \{n_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

À tout indice i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, on associe un point a_i de V tel que $d(h_{n_i}(a_i), h_\infty(a_i)) \geqslant \varepsilon/2$; on note A l'ensemble de ces points.

Si $h_n \in W_{\varepsilon/2;A}[h_\infty]$, c'est -à-dire si $d(h_n(a_i), h_\infty(a_i)) < \varepsilon/2$ pour tout i, alors n n'appartient pas à I et on a donc

$$\forall n \in \overline{\mathbb{N}}, \Big[h_n \in W_{\varepsilon/2;A}[h_\infty]\Big] \Rightarrow \Big[\forall x \in V, d(h_n(x), h_\infty(x)) < \varepsilon/2\Big]. \qquad (2)$$

L'équivariance au point a doit être établie relativement à chaque application h_m appartenant à H : pour $\varepsilon > 0$ fixé, il faut montrer que, pour chaque application h_m appartenant à H, il existe un voisinage V_m de a et un voisinage W_m de h_m pour la convergence simple tels que, si h_n appartient à W_m, h_n est ε-voisin de h_m sur V_m.

1) Pour $m = \infty$, ce résultat est évident : on pose $V_\infty = V$ et $W_\infty = W_{\varepsilon/2;A}[h_\infty]$; la relation (2) entraîne que l'on a

$$d(h_n(x), h_\infty(x)) < \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \text{pour } x \in V_\infty \text{ et } h_n \in W_\infty.$$

2) Pour $m \in \mathbb{N}$, on distingue deux cas.

2 a) Premier cas : $h_n \in W_{\varepsilon/4;A}[h_\infty]$, c'est-à-dire

$$d(h_n(a_i), h_\infty(a_i)) < \varepsilon/4 \text{ pour tout } a_i \in A. \qquad (3)$$

Comme $W_{\varepsilon/4;A}[h_\infty] \subset W_{\varepsilon/2;A}[h_\infty]$, (2) entraîne que

$$\forall n \in \overline{\mathbb{N}}, \Big[h_n \in W_{\varepsilon/4;A}[h_\infty]\Big] \Rightarrow \Big[\forall x \in V, d(h_n(x), h_\infty(x)) < \varepsilon/2\Big]. \qquad (4)$$

Si on suppose de plus que h_n appartient au voisinage $W_{\varepsilon/4;A}[h_m]$ de h_m, on a

$$d(h_m(a_i), h_n(a_i)) = d(h_n(a_i), h_m(a_i)) < \varepsilon/4 \text{ pour tout } a_i \in A, \qquad (5)$$

(3) et (5) entraînent que $d(h_m(a_i), h_\infty(a_i)) < \varepsilon/2$ pour tout $a_i \in A$, c'est-à-dire que $h_m \in W_{\varepsilon/2;A}[h_\infty]$. D'après (2), on a donc

$$d(h_\infty(x), h_m(x)) = d(h_m(x), h_\infty(x)) < \varepsilon/2 \text{ pour tout } x \in V, \qquad (6)$$

(4) et (6) entraînent alors que $d(h_n(x), h_m(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$. On a ainsi montré que

$$\forall h_n \in W_{\varepsilon/4;A}[h_\infty], \Big[h_n \in W_{\varepsilon/4;A}[h_m]\Big] \Rightarrow \Big[\forall x \in V, d(h_n(x), h_m(x)) < \varepsilon\Big]. \qquad (7)$$

2 b) Deuxième cas : $h_n \notin W_{\varepsilon/4;A}[h_\infty]$, c'est-à-dire qu'il existe a_i tel que

$$d(h_n(a_i), h_\infty(a_i) \geqslant \varepsilon/4.$$

Ce cas ne se présente que si $n \in \boldsymbol{I}$; pour un tel indice n_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, deux cas se présentent :

- ou bien h_{n_i} coïncide avec h_m sur V et on a alors $d(h_{n_i}(x), h_m(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$, sans condition supplémentaire ;

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

– ou bien il existe $b_i \in V$ tel que $h_{n_i}(b_i) \neq h_m(b_i)$; il existe alors $\varepsilon_i > 0$ tel que $h_{n_i} \notin W_{\varepsilon_i;\{b_i\}}[h_m]$. On note alors $W_*[h_m]$ le voisinage de h_m intersection (finie) de tous les voisinages $W_{\varepsilon_i;\{b_i\}}[h_m]$.

Les seules applications $h_n \notin W_{\varepsilon/4;A}[h_\infty]$ qui vérifient $h_n \in W_*[h_m]$ sont donc celles qui coïncident avec h_m sur V, ce qui entraîne que :

$$\forall h_n \notin W_{\varepsilon/4;A}[h_\infty], \Big[h_n \in W_*[h_m]\Big] \Rightarrow \Big[\forall x \in V, d(h_n(x), h_m(x)) < \varepsilon\Big]. \qquad (8)$$

2 c) Les relations (7) et (8) permettent de conclure :

$$h_n \in W_{\varepsilon/4;A}[h_m] \cap W_*[h_m] \Rightarrow d(h_n(x), h_m(x)) < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in V;$$

on pose $V_m = V$ et $W_m = W_{\varepsilon/4;A}[h_m] \cap W_*[h_m]$. □

Sur un espace localement compact, la convergence locale coïncide avec la convergence sur tout compact [Proposition **I.2.5**]. Si H est un ensemble d'applications continues définies sur un tel espace, le théorème **VIII.1.6**, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de compacité pour H, est donc équivalent au

Théorème d'Ascoli. *Soit H un ensemble d'applications continues d'un espace topologique localement compact X dans un espace métrique Y. Pour que H soit compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, il faut et il suffit que les trois conditions soient vérifiées :*

(i) *Pour tout $x \in X$, la partie $H(x) = \{h(x) \mid h \in H\}$ est un compact de Y.*

(ii) *H est fermé dans Y^X pour la topologie de la convergence simple.*

(ec) *H est équicontinu.*

Cette équivalence pose le problème du rapport entre les conditions d'équivariance et d'équicontinuité. Les conditions **(i)** et **(ii)** étant communes aux deux théorèmes, on pourrait penser que l'équicontinuité ne serait qu'un avatar de l'équivariance. Il n'en est rien :

Proposition VIII.1.8. *Si H est un ensemble d'applications continues au point a, l'équicontinuité de H au point a entraîne l'équivariance de H au point a. La réciproque est en général fausse, même en supposant H équivariant en tout point.*

Démonstration. 1) Soit $\varepsilon > 0$. Si la partie H est équicontinue au point a, il existe un voisinage V de a tel que l'on ait $d(k(x), k(a)) < \varepsilon/3$ pour tout $x \in V$ et tout $k \in H$.

À toute application $f \in H$ et à $\varepsilon > 0$, on associe le voisinage élémentaire $W = W_{\varepsilon/3;\{a\}}[f]$. On a alors :

– $d(h(a), f(a)) < \varepsilon/3$ quelle que soit $h \in W$,

– par équicontinuité, quels que soient $x \in V$ et $h \in W$,

$$d(h(x), h(a)) < \varepsilon/3 \text{ et } d(f(x), f(a)) < \varepsilon/3,$$

ce qui entraîne $d(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$ et toute $h \in W$. La partie H est donc équivariante au point a.

2) Le contre-exemple suivant montre que la réciproque est fausse, même pour un ensemble d'applications équivariant en tout point :

L'ensemble $H = \{h_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ des fonctions définies sur $X = \mathbb{R}_+^*$ par $h_\lambda(x) = \lambda x$ est équivariant en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est équicontinu en aucun point de $\mathbb{R}_+^*$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

– Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha > 0$, soit $W_{\alpha;\{a\}} = \{h_\mu \in H \mid |(h_\mu(a) - h_\lambda(a)| < \alpha\}$ le voisinage élémentaire de h_λ associé à l'écart α et à la partie finie $\{a\}$. Quel que soit μ, on a

$$\begin{aligned} |h_\mu(x) - h_\lambda(x)| &= |\mu x - \lambda x| = |(\mu - \lambda)\,(x - a) + (\mu a - \lambda a)| \\ &\leqslant |\mu - \lambda|\;|x - a| + |h_\mu(a) - h_\lambda(a)|\,. \end{aligned}$$

Si $h_\mu \in W_{\alpha;\{a\}}$, on a $|h_\mu(a) - h_\lambda(a)| = |\mu - \lambda|\, a < \alpha$, donc $|\mu - \lambda| < \dfrac{\alpha}{a}$, et alors

$$|(h_\mu(x) - h_\lambda(x)| \leqslant \frac{\alpha}{a}\,|x - a| + \alpha.$$

En prenant $\alpha = \varepsilon/2$ et $V =]0, 2a[$, il vient que $|(h_\mu(x) - h_\lambda(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in V$ et $h_\mu \in W_{\alpha;\{a\}}$. L'ensemble H est donc équivariant en tout point a de $\mathbb{R}_+^*$.

– Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $h_\mu \in H$, on a : $|(h_\mu(x) - h_\mu(a)| = \mu\,|x - a|$. Quel que soit $b \neq a$, l'ensemble des valeurs prises par $|(h_\mu(b) - h_\mu(a)|$ quand h_μ parcourt H n'est pas borné, donc H n'est pas équicontinu au point a. □

L'équivariance en un point a (resp. en tout point) est donc en général strictement plus faible que l'équicontinuité au point a (resp. en tout point). L'équivalence des deux théorèmes montre cependant que si H vérifie **(i)** et **(ii)**, c'est-à-dire si $H = \prod_{x\in X} H(x)$, produit de compacts, est compact pour la convergence simple, l'équivariance en tout point est équivalente à l'équicontinuité en tout point. Un raisonnement direct permet d'établir que, sous la même hypothèse, l'équivariance en un point a est équivalente à l'équicontinuité en ce point :

Proposition VIII.1.9. *Si H est un ensemble d'applications continues au point a et si H est compact pour la convergence simple, l'équivariance de H au point a entraîne l'équicontinuité de H au point a.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble H étant équivariant au point a, pour toute application $f \in H$, il existe un voisinage V_f de a dans X et un voisinage W_f de f dans H pour la topologie de la convergence simple tels que l'on ait

$$d(h(x), f(x)) < \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } x \in V_f \text{ et tout } h \in W_f.$$

Les intérieurs des voisinages W_f formant un recouvrement ouvert de H pour la topologie de la convergence simple et H étant compact pour cette topologie, il existe une famille finie $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ telle que les voisinages W_{f_i} recouvrent H. En prenant pour V l'intersection (finie) des voisinages V_{f_i}, il en résulte que, pour toute application $h \in H$, il existe j tel que l'on ait

$$d(h(x), f_j(x)) < \varepsilon/3 \quad \text{pour } x \in V. \tag{1}$$

On a donc en particulier

$$d(f_j(a), h(a)) = d(h(a), f_j(a)) < \varepsilon/3. \tag{2}$$

Par ailleurs, la famille $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, étant finie, est équicontinue au point a : il existe un voisinage V' de a tel que l'on ait

$$d(f_j(x), f_j(a)) < \varepsilon/3 \quad \text{pour } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ et } x \in V'. \tag{3}$$

Il résulte de (1), (2) et (3) que, pour tout $h \in H$, on a $d(h(x), h(a)) < \varepsilon$ pour $x \in V \cap V'$, ce qui établit l'équicontinuité de H au point a. □

Remarque VIII.1.10. En vertu de la remarque **II.1.8**, tous les énoncés précédents sont valables lorsqu'on remplace les espaces métriques par des espaces uniformes (en particulier vectoriels topologiques) séparés, la démonstration du théorème **VIII.1.3** utilisant le corollaire **I.1.5** qui nécessite la séparation de l'espace but.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

2. — Parties relativement compactes pour la convergence locale

Classiquement, une version du théorème d'Ascoli caractérise les ensembles d'applications continues de X dans Y qui sont relativement compacts dans Y^X pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact :

Théorème (**Théorème d'Ascoli relatif**). *Soit H un ensemble d'applications continues d'un espace topologique localement compact X dans un espace métrique Y. Pour que H soit relativement compact dans Y^X pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, il faut et il suffit que les deux conditions soient vérifiées :*

(i') *Pour tout $x \in X$, la partie $H(x) = \{h(x) \mid h \in H\}$ est relativement compacte dans Y.*

(ec) *H est équicontinue.*

Nous nous proposons de développer une extension de ce théorème pour des ensembles d'applications non nécessairement continues définies sur un espace quelconque, en substituant la convergence locale à la convergence uniforme sur tout compact. La remarque **VIII.1.10** s'étendra aux énoncés qui vont suivre et qui seront donc valables si Y est un espace uniforme séparé.

La convergence locale n'étant pas toujours associée à une topologie, il faut d'abord donner, dans le cas général, un sens aux notions de fermeture d'une partie et de « partie relativement compacte pour la convergence locale » :

Définition VIII.2.1. *Soit $H \subset Y^X$ un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. Une application $h \in Y^X$ est dite* adhérente à H pour la convergence locale *s'il existe un filtre sur Y^X qui ait une base dans H et qui converge localement vers h.*

L'ensemble $\overline{H}^l$ des applications adhérentes à H pour la convergence locale est appelée fermeture de H pour la convergence locale *et on dit que l'ensemble H est fermé pour la convergence locale si $H = \overline{H}^l$.*

Remarque. On montre aisément que l'ensemble des parties de Y^X qui sont fermées pour la convergence locale vérifient les axiomes des fermés d'une topologie :

- $\varnothing$ et Y^X sont des fermés pour la convergence locale ;
- une intersection quelconque (resp. une réunion finie) de parties fermées est fermée pour la convergence locale.

Cette topologie sur Y^X est la plus fine des topologies telles que tout filtre qui converge localement soit convergent. on pourrait l'appeler la *topologie de la convergence locale* mais ce nom ne doit pas faire illusion : la convergence locale est, en général, strictement plus fine que cette topologie.

Quand la convergence locale est définie par une topologie, cette topologie est évidemment la « topologie de la convergence locale » ; si, par exemple, X est localement compact, la convergence locale coïncide avec la convergence uniforme sur tout compact [Proposition **I.2.5**] et, dans ce cas $\overline{H}^l$ est la fermeture de H pour cette topologie.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Lemme VIII.2.2. *Soit $\overline{H}^s$ la fermeture de H pour la topologie de la convergence simple. On a toujours $H \subset \overline{H}^l \subset \overline{H}^s$.*

Démonstration. Quelle que soit l'application $h \in H$, le filtre des parties de Y^X contenant h converge localement vers h [Proposition **I.4.1**] et a une base dans H, donc l'application h est adhérente à H pour la convergence locale. On a donc $H \subset \overline{H}^l$.

Quelle que soit l'application $h \in \overline{H}^l$, il existe un filtre Ψ sur Y^X, ayant une base dans H, qui converge localement vers h ; la convergence locale étant plus fine que la convergence simple, ce filtre Ψ converge simplement vers h, donc h est adhérente à H pour la convergence simple. On a donc $\overline{H}^l \subset \overline{H}^s$. □

Définition VIII.2.3. *Un ensemble H d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y est dit* relativement compact pour la convergence locale *si $\overline{H}^l$ est compact pour la convergence locale.*

Remarque. En toute rigueur, il faudrait dire « *relativement compact dans Y^X pour la convergence locale* », mais cette précision peut être omise. En effet, si on a $H \subset K \subset Y^X$, on peut restreindre les constructions précédentes à K afin de définir la fermeture $\overline{H}^l_K$ de H dans K pour la convergence locale par : « *$h \in \overline{H}^l_K$ s'il existe un filtre sur K ayant une base dans H et convergeant localement vers h* », et dire que H est *relativement compact dans K pour la convergence locale* si $\overline{H}^l_K$ est compact pour la convergence locale ; mais, dans ce cas, on montre facilement que $\overline{H}^l_K = \overline{H}^l$, donc que $\overline{H}^l$ est compact pour la convergence locale, c'est-à-dire que H est relativement compact pour la convergence locale au sens de la définition **VIII.2.3**.

En résumé, « *H est relativement compact dans K pour la convergence locale* » est équivalent à « *H est relativement compact pour la convergence locale et $\overline{H}^l \subset K$* ».

Exemple VIII.2.4. Si H est compact pour la convergence locale, alors H est relativement compact pour la convergence locale.

Démonstration. L'ensemble H, étant compact pour la convergence locale, est fermé pour la topologie de la convergence simple [Théorème **VIII.1.3 (ii)**]. On a donc $H = \overline{H}^s$ et il résulte du lemme **VIII.2.2** que $H = \overline{H}^l$, donc que $\overline{H}^l$ est compact pour la convergence locale. □

Lemme VIII.2.5. *Si $\overline{H}^l$ ou $\overline{H}^s$ est compact pour la convergence locale, on a $\overline{H}^l = \overline{H}^s$.*

Démonstration. a) Si $\overline{H}^l$ est compact pour la convergence locale, alors $\overline{H}^l$ est fermé pour la topologie de la convergence simple [Théorème **VIII.1.3 (ii)**]. On a donc $\overline{H}^s \subset \overline{H}^l$, le lemme **VIII.2.2** entraîne que $\overline{H}^s = \overline{H}^l$.

b) Soit h une application appartenant à $\overline{H}^s$ et soit Ψ un filtre sur Y^X ayant une base Θ dans H et convergeant simplement vers h. Le filtre Φ sur $\overline{H}^s$ engendré par Θ converge alors simplement vers h et, si $\overline{H}^s$ est compact pour la convergence locale, il converge localement vers h [Théorème **VIII.1.3 (iii)**]. Les filtres Ψ et Φ ayant une même base, il en résulte que Ψ converge localement vers h qui appartient donc à $\overline{H}^l$. On a donc $\overline{H}^s \subset \overline{H}^l$, d'où $\overline{H}^s = \overline{H}^l$. □

Corollaire VIII.2.6. *H est relativement compact pour la convergence locale si et seulement si $\overline{H}^s$ est compact pour la convergence locale.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme **VIII.2.5**. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

La démarche suivie pour le théorème d'Ascoli classique ne convient pas dans le cas d'un ensemble d'applications non nécessairement continues : la condition **(i')** et la condition d'équivariance de H n'entraînent pas, en général, l'équivariance de $\overline{H}^s$, qui est une condition nécessaire pour que cette partie soit compacte pour la convergence locale [Théorème **VIII.1.6**]. En effet, on a le contre-exemple suivant :

Proposition VIII.2.7. *L'ensemble $H = \{h_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ des fonctions puissances définies sur $X = [0,1]$ par $h_n(x) = x^n$ vérifie **(i')**, est équivariant en tout point mais $\overline{H}^s$ n'est pas équivariant.*

Démonstration. a) L'ensemble H vérifie la condition **(i')** : quel que soit $n \geqslant 1$ et quel que soit x, la partie $H(x)$ est bornée, donc relativement compacte dans $Y = \mathbb{R}$.

b) L'ensemble H est discret pour la topologie de la convergence simple : quel que soit $p \geqslant 1$,

$$W_p = \left\{h \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid |h(1/2) - h_p(1/2)| < 1/2^{p+1}\right\}$$

est un voisinage de h_p pour la convergence simple et on a $W_p \cap H = \{h_p\}$. L'ensemble H est donc équivariant en tout point : quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$|h_n(x) - h_p x)| = 0 < \varepsilon \quad \text{pour } x \in [0,1] \text{ et } h_n \in W_p\ .$$

c) L'ensemble $\overline{H}^s$ vérifie la condition **(i)** : la suite (h_n) converge simplement vers la fonction h_∞, nulle sur $[0,1[$ et valant 1 en 1 ; on a donc $h_\infty \in \overline{H}^s$, ce qui entraîne que les parties

$$\overline{H}^s(x) = \begin{cases} \{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} & \text{si } x \in [0,1[\\ \{1\} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sont fermées et bornées, donc compactes dans $\mathbb{R}$. Il est évident que $\overline{H}^s$ vérifie **(ii)**. Alors, si $\overline{H}^s$ était équivariant, cet ensemble serait compact pour la convergence locale [Théorème **VIII.1.6**] et la suite (h_n) convergerait localement [Théorème **VIII.1.3 (iii)** appliqué au filtre des sections de cette suite]. Mais les applications h_n sont continues et leur limite h_∞ ne l'est pas, donc la convergence n'est pas la convergence locale [Corollaire **II.4.2**] et $\overline{H}^s$ n'est pas équivariant. □

Un raffinement de la condition d'équivariance permet de surmonter cette difficulté :

Définition VIII.2.8. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. On dit que H est* uniformément équivariant au point *a si, tout couple $(h,k) \in H^2$ est « uniformément voisin » sur un voisinage $V(a)$ de a dès qu'il est « voisin » pour la topologie de la convergence simple, ce qui s'exprime par : étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a, un $\varepsilon' > 0$ et une partie finie A' de X tels que, pour que deux applications h et k soient ε-voisines en tout point de V, il suffit que h et k soient ε'-voisines en tout point a' de A', c'est-à-dire, plus formellement :*

$$\forall (h,k) \in H \times H,\ \left[\forall a' \in A', d(h(a'),k(a')) < \varepsilon'\right] \Rightarrow \left[\forall x \in V, d(h(x),k(x)) < \varepsilon\right].$$

La différence entre l'équivariance uniforme et l'équivariance simple est que, pour l'équivariance simple, ε', A' et V dépendent de a, de ε et de l'une des deux applications, tandis que, pour l'équivariance uniforme, ils ne dépendent que de a et de ε. Il en résulte évidemment que, si H est uniformément équivariant en un point, alors H est équivariant en ce point.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Contrairement à ce qui se passe pour l'équivariance simple [Proposition **VIII.2.7**], l'équivariance uniforme entraîne celle de $\overline{H}^s$:

Proposition VIII.2.9. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. Si H est uniformément équivariant en un point a, alors $\overline{H}^s$ est uniformément équivariant en ce point.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
L'ensemble H étant uniformément équivariant au point a, il existe un voisinage V de a, un $\varepsilon' > 0$ et une partie finie A' de X tels que l'on ait pour tout $(h,k) \in H \times H$,

$$\Big[\forall a' \in A', d(h(a'),k(a')) < \varepsilon'\Big] \;\Rightarrow\; \Big[\forall x \in V, d(h(x),k(x)) < \varepsilon/3\Big]. \qquad (1)$$

Soient $f \in \overline{H}^s$ et $g \in \overline{H}^s$ vérifiant

$$d(f(a'),g(a')) < \varepsilon'/3 \quad \text{pour tout } a' \in A' \qquad (2)$$

et soit x_0 un point fixé de V. Puisque f et g appartiennent à $\overline{H}^s$, il existe h et k dans H tels que l'on ait

$$\begin{aligned} &d(h(x_0),f(x_0)) < \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad d(h(a'),f(a')) < \varepsilon'/3 \quad \text{pour tout } a' \in A', \\ &d(k(x_0),g(x_0)) < \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad d(k(a'),g(a')) < \varepsilon'/3 \quad \text{pour tout } a' \in A'. \end{aligned} \qquad (3)$$

(2) et (3) entraînent que $d(h(a'),k(a')) < \varepsilon'$ pour tout $a' \in A'$, ce qui entraîne encore que $d(h(x),k(x)) < \varepsilon/3$ pour tout $x \in V$, d'après la condition d'équivariance uniforme (1). En particulier, on a

$$d(h(x_0),k(x_0)) < \varepsilon/3\,. \qquad (4)$$

(3) et (4) entraînent que $d(f(x_0),g(x_0)) < \varepsilon$ pour $x_0 \in V$ si f et g vérifient (2) ; $\overline{H}^s$ est donc uniformément équivariant au point a. □

Ce résultat pourrait être le fait d'une condition d'équivariance très forte, trop forte, non nécessaire pour que H soit relativement compact. Le lemme suivant permet d'établir qu'il n'en est rien [Théorème **VIII.2.11**].

Lemme VIII.2.10. *Un ensemble H d'applications de X dans Y, équivariant au point a et compact pour la convergence simple, est uniformément équivariant au point a.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
L'ensemble H étant équivariant au point a, pour toute application $f \in H$, il existe un voisinage V_f de a, un $\varepsilon'_f > 0$ et une partie finie A'_f de X tels que

$$\forall h \in H, \Big[\forall a' \in A'_f, d(h(a'),f(a')) < \varepsilon'_f\Big] \;\Rightarrow\; \Big[\forall x \in V_f, d((h(x),f(x)) < \varepsilon/2\Big]. \quad (1)$$

Les voisinages

$$W_f = \Big\{h \in H \mid \forall a' \in A'_f, d(h(a'),f(a')) < \varepsilon'_f/2\Big\}$$

formant un recouvrement ouvert du compact H pour la topologie de la convergence simple, il existe une famille finie $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ telle que les voisinages W_{f_i} recouvrent H. On pose $\varepsilon' = \min\limits_{i \leqslant n} \varepsilon'_{f_i}/2$ et $A' = \bigcup\limits_{i \leqslant n} A'_{f_i}$.

Soient h et k deux éléments de H vérifiant

$$d(h(a'),k(a')) < \varepsilon' \quad \text{pour tout } a' \in A'. \qquad (2)$$

Les voisinages W_{f_i} recouvrant H, il existe un indice j tel que $k \in W_{f_j}$, c'est-à-dire que

$$d(k(a'),f_j(a')) < \varepsilon'_{f_j}/2 \quad \text{pour tout } a' \in A'_{f_j}, \qquad (3)$$

on a donc, d'après la condition d'équivariance (1),

$$d(k(x),f_j(x)) < \varepsilon/2 \quad \text{pour tout } x \in V_{f_j}\,. \qquad (4)$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Par ailleurs, (2) entraîne que, pour tout j et pour tout élément a' de A'_{f_j} (donc de A'), on a $d(h(a'),k(a')) < \varepsilon' \leqslant \varepsilon'_{f_j}/2$; en utilisant (3), on obtient

$$d(h(a'),f_j(a')) \leqslant d(h(a'),k(a')) + d(k(a'),f_j(a')) < \varepsilon'_{f_j} \quad \text{pour tout } a' \in A'_{f_j}.$$

Il résulte alors de la condition d'équivariance (1) que l'on a

$$d(h(x),f_j(x)) < \varepsilon/2 \quad \text{pour tout } x \in V_{f_j}\,. \tag{5}$$

Soit V l'intersection des voisinages V_{f_i} de a. Il résulte de (4) et (5) que l'on a

$$d(k(x),f_j(x)) < \varepsilon/2 \text{ et } d(f_j(x),h(x)) = d(h(x),f_j(x)) < \varepsilon/2 \quad \text{pour tout } x \in V,$$

ce qui entraîne $d(k(x),h(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$ pourvu que h et k vérifient la condition (2). H est donc uniformément équivariant au point a. □

Théorème VIII.2.11. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. Pour que H soit relativement compact pour la convergence locale, il faut et il suffit que les deux conditions soient vérifiées :*

(i) *Pour tout $x \in X$, la partie $H(x) = \{h(x) \mid h \in H\}$ est relativement compacte dans Y.*

(uev) *H est uniformément équivariant.*

Démonstration. Condition nécessaire. Si H est relativement compact pour la convergence locale, alors $\overline{H}^s$ est compact pour la convergence locale [Corollaire **VIII.2.6**] et alors, pour tout $x \in X$, $\overline{H}^s(x)$ est compact dans Y [Théorème **VIII.1.3 (i)**]. La partie $H(x)$, contenue dans $\overline{H}^s(x)$, est donc relativement compacte.
$\overline{H}^s$, étant compact pour la convergence locale, est équivariant [Théorème **VIII.1.6**] et compact pour la convergence simple. Le lemme **VIII.2.10** entraîne alors que $\overline{H}^s$ est uniformément équivariant, donc H, qui est contenu dans $\overline{H}^s$, est uniformément équivariant.

Condition suffisante. L'ensemble $\overline{H}^s$ est fermé pour la topologie de la convergence simple. Pour tout $x \in X$, on a $\overline{H}^s(x) \subset \overline{H(x)}$, donc $\overline{H}^s$, fermé contenu dans le produit des compacts, $\overline{H(x)}$ est compact pour la topologie de la convergence simple; il en résulte que $\overline{H}^s(x)$ est compact dans Y. Enfin, $\overline{H}^s$ est uniformément équivariant [Proposition **VIII.2.9**], donc équivariant. Le théorème **VIII.1.6** entraîne que $\overline{H}^s$ est compact pour la convergence locale, donc que H est relativement compact pour la convergence locale [Corollaire **VIII.2.6**]. □

Remarque. Un ensemble d'applications H compact pour la convergence locale est fermé pour la convergence simple [Théorème **VIII.1.3**] et relativement compact pour la convergence locale [Exemple **VIII.2.4**].
Réciproquement, le corollaire **VIII.2.6** entraîne qu'un ensemble d'applications, fermé pour la convergence simple et relativement compact pour la convergence locale, est compact pour la convergence locale.
Un ensemble d'applications H est donc compact pour la convergence locale si et seulement il est fermé pour la convergence simple et vérifie les conditions du théorème **VIII.2.11**, donc si et seulement s'il vérifie :

(i') *Pour tout $x \in X$, la partie $H(x) = \{h(x) \mid h \in H\}$ est relativement compacte dans Y.*

(ii) *H est fermé dans Y^X pour la topologie de la convergence simple.*

(uev) *H est uniformément équivariant.*

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Ces conditions sont nécessairement équivalentes à celles du théorème **VIII.1.6** :

(i) *Pour tout $x \in X$, la partie $H(x) = \{h(x) \mid h \in H\}$ est compacte dans Y.*

(ii) *H est fermé dans Y^X pour la topologie de la convergence simple.*

(ev) *H est équivariant.*

L'affaiblissement de (**i**) en (**i'**) est justifié dans la démonstration du théorème **VIII.2.11** (condition suffisante) ; les conditions (**i**) et (**ii**) entraînant la compacité de H pour la convergence simple, le lemme **VIII.2.10** justifie le renforcement de (**ev**) en (**uev**).

3. — Cas des fonctions réglées ; application

Les conditions d'équivariance ou d'équivariance uniforme sont souvent difficiles à établir directement [Exemple **VIII.1.7**] et il est donc naturel de chercher, pour des ensembles d'applications particulières, des conditions plus facilement vérifiables entraînant l'équivariance. Le théorème d'Ascoli et le théorème d'Ascoli relatif peuvent être interprétés comme des exemples de cette situation : dans le cas particulier des ensembles d'applications continues, l'équicontinuité est une manière simple d'établir l'équivariance. Nous proposons ici une extension de cette démarche aux ensembles d'applications réglées [*cf.* J. Dieudonné, Éléments d'analyse, Fondements de l'analyse moderne, p. 137-138] et donnons pour ces ensembles une caractérisation de la compacité relative [Théorème **VIII.3.1**] sur le modèle du théorème d'Ascoli relatif.

Une application f définie sur un intervalle I, à valeurs dans un espace de Banach F, est *réglée* si elle a une limite à gauche en tout point de $I^- = \{t \in I \mid \exists s \in I, s < t\}$ et une limite à droite en tout point de $I^+ = \{t \in I \mid \exists s \in I, s > t\}$. Soient f^- et f^+ les applications respectivement définies sur I par

$$\forall a \in I^-, f^-(a) = \lim_{\substack{s \to a \\ s<a}} f(s) \qquad \forall a \in I^+, f^+(a) = \lim_{\substack{s \to a \\ s>a}} f(s),$$

et, si I a un plus petit élément α (resp. un plus grand élément β), par

$$f^-(\alpha) = f^+(\alpha) \quad (\text{ resp. } f^+(\beta) = f^-(\beta)).$$

L'application f^- (resp. f^+) est continue à gauche sur I^- (resp. continue à droite sur I^+), elle est réglée et on a $(f^-)^+ = f^+$ (resp. $(f^+)^- = f^-$).

Une application réglée f est bornée sur tout compact $K \subset I$ et on a

$$\sup_{t \in K} \|f^-(t)\| = \sup_{t \in K} \|f^+(t)\| \ ;$$

cette valeur, notée $\|f\|_K$, est la semi-norme de f relativement au compact K. C'est le plus petit majorant de $\|f(t)\|$ quand t parcourt K, à l'exception d'un ensemble dénombrable de points.

Deux applications réglées définies sur I sont dites *équivalentes* si elles coïncident sauf sur un ensemble dénombrable de points de I ; en particulier, f, f^- et f^+ sont équivalentes. On note $R(I, F)$ l'espace vectoriel des classes d'applications réglées de I dans F. Un compact K étant fixé, deux applications réglées

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

équivalentes ont même semi-normes relativement à K. On définit ainsi une famille de semi-normes sur l'espace $R(I,F)$ qui en fait un espace vectoriel localement convexe, séparé et complet. Cet espace est métrisable : si (K_n) est une suite croissante, exhaustive, de compacts de I, la topologie de $R(I,F)$ est définie par la distance suivante entre classes d'applications réglées :

$$\forall \hat{f} \in R(I,F), \forall \hat{g} \in R(I,F), d(\hat{f},\hat{g}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \left\|\hat{f}-\hat{g}\right\|_{K_n} \left(1+\left\|\hat{f}-\hat{g}\right\|_{K_n}\right)^{-1} .$$

Si f et g sont équivalentes, on a $f^- = g^-$ (resp. $f^+ = g^+$) et réciproquement. On définit donc une injection i^- (resp. i^+) de $R(I,F)$ dans l'espace $B_c(I,F)$ des fonctions bornées sur tout compact en associant f^- (resp. f^+) à la classe de f. Cette application est linéaire et c'est un homomorphisme sur son image si on munit $B_c(I,F)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est une isométrie si on munit $R(I,F)$ et $B_c(I,F)$ des distances associées à une même suite exhaustive de compacts de I.

Soit H une partie de $R(I,F)$. On note H^- (resp. H^+) l'image de H par i^- (resp. i^+). Une condition nécessaire et suffisante pour que H soit compact (resp. relativement compact) dans $R(I,F)$ est que H^- (resp. H^+) soit compact (resp. relativement compact) dans $B_c(I,F)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de I, donc pour la convergence locale [Proposition **I.2.5**]. Le théorème **VIII.1.6** (resp. **VIII.2.11**), appliqué à H^- ou à H^+, donne donc des conditions nécessaires et suffisantes pour que H soit compact (resp. relativement compact) dans $R(I,F)$. Par exemple :

Théorème VIII.3.1. *Soit H un sous-espace de l'espace normé $R(I,F)$ des classes d'applications réglées du segment I dans l'espace de Banach F. Pour que H soit relativement compact dans $R(I,F)$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i') *Pour tout $x \in I$, $H^+(x)$ est relativement compact dans F.*

(ec) *H^+ est équicontinu à droite en tout point de I^+ et H^- est équicontinu à gauche en tout point de I^-*

Démonstration. Condition nécessaire. Si la fermeture $\overline{H}$ de H est compacte dans $R(I,F)$, alors $\overline{H}^+ = i^+(\overline{H})$ est compact pour la convergence locale. Il en résulte que

- Les parties $\overline{H}^+(x)$ sont compactes dans F [Théorème **VIII.1.6 (i)**] et l'inclusion $H^+(x) \subset \overline{H}^+(x)$ entraîne que $H^+(x)$ est relativement compact dans F.
- $\overline{H}^+$ est compact pour la convergence simple et est équivariant [Théorème **VIII.1.6**]. En transcrivant la démonstration de la proposition **VIII.1.9** pour la continuité à droite, on établit l'équicontinuité à droite de $\overline{H}^+$, donc celle de $H^+ \subset \overline{H}^+$, en tout point de I^+.

On établit de même l'équicontinuité à gauche de $\overline{H}^-$ en tout point de I^-.

Condition suffisante. Il suffit [Théorème **VIII.2.11**] de montrer que H^+ est uniformément équivariant en tout point $a \in I$. Par hypothèse, H^+ est équicontinu à droite, c'est-à-dire

$$\forall a \in I^+, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a, a+\eta[\,, \forall h \in H, \left\|h^+(x) - h^+(a)\right\| < \varepsilon \qquad (\mathrm{D})$$

et H^- est équicontinu à gauche, c'est-à-dire

$$\forall a \in I^-, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]a-\eta, a]\,, \forall h \in H, \left\|h^-(x) - h^-(a)\right\| < \varepsilon\,. \qquad (\Gamma)$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Comme on a

$$\forall x \in]a-\eta, a[\,,\ h^+(x) = (h^-)^+(x) = \lim_{\substack{s\to x\\ s>x}} h^-(s),$$

la relation (Γ) entraîne

$$\forall a \in I^-, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]a-\eta, a[\,, \forall h \in H, \left\|h^+(x) - h^-(a)\right\| \leqslant \varepsilon\,. \qquad \text{(G)}$$

Trois cas sont à considérer :

1) I a un plus petit élément α et $a = \alpha$.
Le scalaire η étant celui de la relation (D) au point α, pour $(h^+, k^+) \in H^+ \times H^+$ tel que $\left\|h^+(\alpha) - k^+(\alpha)\right\| < \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} &\forall x \in [\alpha, \alpha+\eta[\,,\\ &\left\|h^+(x) - k^+(x)\right\| \leqslant \left\|h^+(x) - h^+(\alpha)\right\| + \left\|h^+(\alpha) - k^+(\alpha)\right\| + \left\|k^+(\alpha) - h^+(x)\right\|\\ &\qquad\qquad < 2\varepsilon + \left\|h^+(\alpha) - k^+(\alpha)\right\| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

donc H^+ est uniformément équivariant au point α.

2) I a un plus grand élément β et $a = \beta$.
Le scalaire η étant celui de la relation (G) au point β, pour $(h^+, k^+) \in H^+ \times H^+$ tel que $\left\|h^+(\beta) - k^+(\beta)\right\| < \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} &\forall x \in]\beta-\eta, \beta[\,,\\ &\left\|h^+(x) - k^+(x)\right\| \leqslant \left\|h^+(x) - h^-(\beta)\right\| + \left\|h^-(\beta) - k^-(\beta)\right\| + \left\|k^-(\beta) - k^+(x)\right\|\\ &\qquad\qquad < 2\varepsilon + \left\|h^-(\beta) - k^-(\beta)\right\| = 2\varepsilon + \left\|h^+(\beta) - k^+(\beta)\right\| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

donc H^+ est uniformément équivariant au point β.

3) a est intérieur à I. Le scalaire η étant le plus petit des deux scalaires déterminés par les relations (D) et (G) au point a, un point b étant fixé dans $]a-\eta, a[$, pour $(h^+, k^+) \in H^+ \times H^+$ tel que

$$\left\|(h^+(a) - k^+(a)\right\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left\|(h^+(b) - k^+(b)\right\| < \varepsilon,$$

On a
– pour tout $x \in]a-\eta, a[$,

$$\begin{aligned} \left\|h^+(x) - k^+(x)\right\| &\leqslant \left\|h^+(x) - h^-(a)\right\| + \left\|h^-(a) - k^-(a)\right\| + \left\|k^-(a) - k^+(x)\right\|\\ &< 2\varepsilon + \left\|h^-(a) - k^-(a)\right\|, \end{aligned}$$

puis, en appliquant en b la relation (G) à h et k,

$$\left\|h^-(a) - k^-(a)\right\| \leqslant \left\|h^-(a) - h^+(b)\right\| + \left\|h^+(b) - k^+(b)\right\| + \left\|k^+(b) - k^-(a)\right\| \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon$$

on obtient

$$\forall x \in]a-\eta, a[\,,\ \left\|h^+(x) - k^+(x)\right\| < 5\varepsilon\,.$$

– pour tout $x \in [a, a+\eta[$,

$$\begin{aligned} \left\|h^+(x) - k^+(x)\right\| &\leqslant \left\|h^+(x) - h^+(a)\right\| + \left\|h^+(a) - k^+(a)\right\| + \left\|k^+(a) - h^+(x)\right\|\\ &< 2\varepsilon + \left\|h^+(a) - k^+(a)\right\| < 3\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Il en résulte que H^+ est uniformément équivariant au point a. □

Corollaire VIII.3.2. *Si F est de dimension finie, une partie H de l'espace $R(I, F)$ des classes d'applications réglées de l'intervalle I dans l'espace F est relativement compacte dans $R(I, F)$ si et seulement si :*

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

(i") *H est une partie bornée de $R(I,F)$.*

(ec) *La partie H^- est équicontinue à gauche en tout point de I^- et la partie H^+ est équicontinue à droite en tout point de I^+.*

Démonstration. Si H est bornée, chacune des parties $H^+(x)$ est bornée dans F de dimension finie, donc est relativement compacte. On applique le théorème **VIII.3.1**. □

Remarque. Un ensemble H d'applications continues de I dans l'espace F s'identifie à son image $H^- = i^-(H)$ (resp. $H^+ = i^+(H)$) dans $R(I,F)$. On a donc $H^+(x) = H(x)$ et dire que H^- est équicontinu à gauche en tout point de I^- et que H^+ est équicontinu à droite en tout point de I^+ est équivalent à dire que H est équicontinu en tout point de I. Le théorème **VIII.3.1** entraine alors que H est relativement compact pour la convergence uniforme sur tout compact si et seulement si :

(i') H est relativement compact dans F pour tout $x \in I$.

(ec) H est équicontinu en tout point de I.

On retrouve le théorème d'Ascoli relatif.

Application VIII.3.3. *Une équation de Volterra non linéaire :*

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t,s,x(s))\, ds,$$

*avec f et g continues, admet une solution continue, non nécessairement unique, sur un segment $[0,b]$ [voir par exemple Miller, 1971]. Une démonstration de ce résultat, basée sur la méthode d'approximations successives de Carathéodory, fait appel au théorème d'Ascoli : la suite des approximations ne converge pas nécessairement mais l'ensemble de ces applications continues est uniformément borné et équicontinu, donc est relativement compact, ce qui permet d'en extraire une sous-suite convergeant uniformément vers une solution de l'équation. Le corollaire **VIII.3.2** permet d'étendre ce raisonnement au cas où f est réglée :*

Soit f une application réglée définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit g une application continue définie sur $\Omega = \{(t,s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p \mid 0 \leqslant s \leqslant t\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Il existe alors $b > 0$ et une application réglée φ définie sur $[0,b]$, solution de l'équation

$$\forall t \in [0,b]\,,\ x(t) = f(t) + \int_0^t g(t,s,x(s))\, ds\,.$$

Démonstration. Un réel $b > 0$ étant donné, pour tout entier n, soit φ_n l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ de la manière suivante :

- Pour $t \in [0, b/n]$, on pose $\varphi_n(t) = f(t)$.
- Si φ_n est définie sur $[0, kb/n]$, on pose

$$\forall t \in [kb/n, (k+1)b/n]\,, \varphi_n(t) = f(t) + \int_0^{t-b/n} g((t-b/n, s, \varphi_n(s))\ ds\,.$$

L'application φ_n ainsi définie est réglée. L'intégrale d'une application réglée ne dépendant que de la classe de cette application, une récurrence élémentaire montre que, si on modifie f sur un ensemble dénombrable de points, alors φ_n

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

n'est modifiée que sur cet ensemble : on peut donc interpréter l'équation comme étant une équation sur l'espace des classes d'applications réglées et raisonner sur l'ensemble des classes des applications φ_n.

1) Un réel $B > 0$ étant fixé, on pose

$$M_0 = \sup_{0\leqslant t\leqslant B} \|f(t)\| \qquad M_1 = \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\leqslant B\\ \|x\|\leqslant 2M_0}} \|g(t,s,x)\| \qquad b = \min\{B, M_0/M_1\}.$$

Les restrictions au segment $[0,b]$ des applications φ_n sont uniformément bornées par $2M_0$. En effet, sur $[0,b/n]$, on a

$$\|\varphi_n(t)\| = \|f(t)\| \leqslant M_0 < 2M_0$$

et, si on a montré que, pour $k < n$, $\|\varphi_n(t)\|$ est majoré par $2M_0$ sur $[0,kb/n]$, on a

$$\forall t \in [kb/n,(k+1)b/n]\,,\ \|\varphi_n(t)\| \leqslant M_0 + \int_0^{t-b/n} M_1\, ds \leqslant M_0 + b\, M_1 \leqslant 2M_0.$$

Il en résulte que la norme de la classe de φ_n dans $R([0,b]\,,\mathbb{R}^p)$ est majorée par $2M_0$.

2) Pour $0 \leqslant a < t < b$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_n^+(t)-\varphi_n^+(a) &= \big(f^+(t)-f^+(a)\big)\\ &+\int_0^{\max\{0,a-b/n\}} \Big(g\big(t-b/n,s,\varphi_n(s)\big)-g\big(a-b/n,s,\varphi_n(s)\big)\Big)\,ds \qquad (0)\\ &+\int_{\max\{0,a-b/n\}}^{\max\{0,t-b/n\}} g\,(t-b/n,s,\varphi_n(s))\;ds\end{aligned}$$

L'application f^+ étant continue à droite au point a, on a

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta'>0,\forall t\in\big[a,a+\eta'\big[\,,\big\|f^+(t)-f^+(a)\big\|<\varepsilon. \qquad (1)$$

L'application g étant uniformément continue sur le compact

$$K = \{(t,s,x)\mid 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b, \|x\|\leqslant 2M_0\}\,,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta'' > 0$ tel que, pour tout couple d'éléments (t_0,s_0,x_0) et (t_1,s_1,x_1) de K, c'est-à-dire tel que

$$(t_0,t_1)\in[0,b]^2\,, s_0\leqslant t_0, s_1\leqslant t_1, \|x_0\|\leqslant 2M_0, \|x_1\|\leqslant 2M_0,$$

satisfaisant aux conditions $|t_0-t_1|<\eta''$, $|s_0-s_1|<\eta''$, $\|x_0-x_1\|<\eta''$, on ait $\|g(t_0,s_0,x_0)-g(t_1,s_1,x_1)\|<\varepsilon$. On a, en particulier,

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta''>0,\\ &\qquad \forall(t_0,t_1)\in[0,b]^2\,,\forall s\leqslant\min\{t_0,t_1\}\,,\forall x\mid\|x\|\leqslant 2M_0,\\ &\qquad \Big[|t_1-t_0|<\eta''\ \Rightarrow\ \|g(t_0,s,x)-g(t_1,s,x)\|<\varepsilon\Big].\end{aligned} \qquad (2)$$

Soit $\eta = \min\{\varepsilon,\eta',\eta''\}$. Si $t\in[a,a+\eta[\,\cap[0,b]$, l'expression (o) de $\varphi_n^+(t)-\varphi_n^+(a)$ et les propriétés (1) et (2) entraînent que

$$\begin{aligned}\big\|\varphi_n^+(t)-\varphi_n^+(a)\big\| &\leqslant \varepsilon+\int_0^{\max\{0,a-b/n\}}\varepsilon\,ds+\int_{\max\{0,a-b/n\}}^{\max\{0,t-b/n\}} M_1\,ds\\ &\leqslant \varepsilon+b\varepsilon+\varepsilon M_1.\end{aligned}$$

Les applications φ_n^+ sont donc équicontinues à droite au point a.
On démontre de même que les applications φ_n^- sont équicontinues à gauche en tout point de $]0,b]$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3) Le corollaire **VIII.3.2** entraîne que l'ensemble des classes des applications φ_n est relativement compact dans $R([0,b]\,;\mathbb{R}^p)$. Cet espace étant métrisable, il existe donc une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite des classes converge dans $R([0,b]\,;\mathbb{R}^p)$. En particulier, la suite $(\varphi^+_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et sa limite est une application réglée φ^+, solution sur $[0,b]$ de l'équation de Volterra relative à f^+. L'application f ne différant de f^+ qu'en un ensemble dénombrable de points, en modifiant φ^+ sur cet ensemble, on obtient une solution sur $[0,b]$ de l'équation relative à f. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Suites convergentes de fonctions continues

1. — Divers modes de convergence

De la fin du dix-neuvième siècle au début du vingtième, de nombreux modes de convergence ont été proposés, un des objectifs étant d'assurer le passage à la limite de certaines propriétés, en particulier la continuité de la limite d'une suite simplement convergente (f_n) d'applications continues. L'essentiel des travaux sur ce sujet est en allemand ou a été traduit en allemand [Dini, Lurötн & Schepp, 1892 ; Arzela & Pohl, 1905 ; Fréchet & Rosenthal, 1923], ce qui montre l'intérêt suscité par ces questions dans la communauté mathématique de langue allemande. Les ouvrages ou articles de synthèse sur l'analyse réelle [Hausdorff, 1914 ; Carathéodory, 1918 ; Hahn, 1921 et 1932 ; Rosenthal *in* Fréchet & Rosenthal, 1923] ont tous présenté ces conditions, sans marquer clairement de préférence entre elles, et ont fixé une nomenclature respectée par les auteurs de langue allemande.

Ces modes de convergence peuvent être classés en deux familles :

- les conditions globales, qui portent sur l'espace source (ou, plus généralement, sur certaines parties de cet espace),
- les conditions locales, qui ne portent que sur le filtre des voisinages d'un point particulier de l'espace source.

Ils sont énoncés lorsque l'espace but est métrique et sont transposables à un espace but uniforme compte tenu de la remarque **II.5.2**.

§ Conditions globales :

– **Convergence uniforme** [Seidel, *Abh. Ak. München* 5 (1848) : 379-393 ; Stokes, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 8 (1849) : 533-583]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

C'est la *gleichmäßige Konvergenz* des auteurs de langue allemande. Seidel et Stokes ont publié indépendamment cette définition.

– **Convergence quasi-uniforme** [Arzela, *Rend. Inst. Bologna* (1) 19 (1883) : 79-84]

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists N' \geqslant N, \forall x \in X, \exists n \in [N, N'], d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

C'est Borel [1905] qui a proposé le nom de *convergence quasi-uniforme* pour la convergence *in egual grado a tratti* d'Arzela. Cette appellation a été reprise en allemand : *quasi-gleichmäßige Konvergenz*.

– **Convergence uniforme simple** [Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa 1898]

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

C'est la *einfach-gleichmäßige Konvergenz* des auteurs de langue allemande que Fréchet a traduit par *convergence uniforme simple*.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

– **Convergence régulière** [Orlando, *Annales Scient. Acad. Polytech. Porto* 6 (1911) : 188-190]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in X, d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Hausdorff a proposé le nom *uniform Konvergenz* pour ce mode de convergence tout en remarquant que « Der obige Sprachgebrauch kollidiert übrigens mit del französischen usw., wo uniform = gleichmäßig ist. ». Nous proposons le nom de *convergence régulière* afin de ne pas persévérer dans le faux-sens.

§ Conditions locales :

– **Convergence uniforme au voisinage du point** a [Weierstrass, *Monatsber. Königl. Ak. Wissenchaften*, 1880].

$$\exists V \in \mathscr{V}_X(a), \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in V, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Le nom proposé par Weierstrass, *gleichmäßlige Konvergenz in der Nähe der Stelle a*, est parfaitement explicite.

– **Convergence locale au point** a [Du Bois-Reymond, *Sitzgsher. Ak. Berlin* (1886) : 360].

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in V, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Le nom initial de cette convergence, *stetige Konvergenz*, a été changé en *gleichmäßige Konvergenz im Punkte a* pour reprendre l'idée de Weierstrass et éviter la confusion avec la convergence suivante définie par Hahn.

Zygmund [1952] a été parmi les derniers à utiliser cette convergence : il n'en motive pas l'introduction et ne s'en sert que pour alléger l'écriture de deux énoncés [*loc. cit.*, §2.601 et §8.51] ; dans la deuxième édition de son ouvrage [1959], il abandonne d'ailleurs cette convergence au profit de la convergence définie par Hahn, sans en tirer plus grand profit.
La dernière mention faite à cette convergence serait due à Schaefer [1955] sous le nom de *lokal-gleichmäßige Konvergenz im Punkte a*.

– **Convergence continue au point** a [Hahn, *Theorie der reellen Funktionen, I Band*, Berlin 1921].

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in V, d(f_n(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Le choix de cette traduction littérale de l'expression *stetige Konvergenz in Punkte a* a été effectué en lieu et place de l'appellation *convergence locale au point a* proposée par Bastiani [1964] pour désigner la convergence au sens de Hahn sur des ensembles de fonctions continues. Cette homonymie est sans conséquence puisque la *gleichmäßige Konvergenz im Punkte a* et la *stetige Konvergenz in Punkte a* coïncident sur les ensembles de fonctions continues [Théorème **I.3.4**].

– **Convergence pseudo-uniforme au point** a [Martinotti, *Rend. Instit. Lombaro* (2) 47 (1914) : 874-875]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \forall x \in V, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Le nom initial « *successione convergente quasi uniformemente nel punto a* » n'est pas cohérent avec ce qu'on appelle la convergence quasi-uniforme, ce qui a

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

sans doute conduit Rosenthal [*loc. cit.*] à proposer le nom de *pseudo-gleimaßige Konvergenz im Punkte a* dont nous avons adopté la traduction. C'est ce même mode de convergence que Hahn [1932] a appelé *völlig uniforme Konvergenz im Punkte a*.

– **Convergence uniforme simple au point** *a* [Rosenthal, *loc. cit.*].

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \forall x \in V, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Rosenthal indique que cette notion, qu'il nomme *einfach-gleichmäßige Konvergenz im Punkte a* est « implicite » chez Dini [*loc. cit.*].

– **Convergence régulière au point** *a* [Orlando, *loc.cit.*].

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \forall x \in V, d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon.$$

C'est bien sûr la convergence que Hausdorff nommait *uniforme Konvergenz im Punkte a*.

2. — Passage à la limite des propriétés de continuité

Parmi les modes de convergence qui viennent d'être cités, deux seulement sont pertinents pour donner une condition nécessaire et suffisante pour le passage à la limite des propriétés de continuité d'une suite simplement convergente : une condition globale, la convergence quasi-uniforme [corollaire **A.2.2**], et une condition locale, la convergence régulière en un point [corollaire **A.2.4**].

Théorème A.2.1. *La convergence quasi-uniforme est une condition suffisante pour que la limite simple d'une suite d'applications continues soit continue. Cette condition est nécessaire si l'espace source est quasi-compact* [27].

Démonstration. Condition suffisante. Soit (f_n) une suite d'applications continues convergeant simplement vers f ; on suppose que cette convergence est quasi-uniforme.

Soit a un point de X et soit $\varepsilon > 0$. La suite $(f_n(a))$ convergeant vers $f(a)$, il existe un entier N tel que l'on ait

$$d(f_n(a), f(a)) < \varepsilon/3 \quad \text{pour } n \geqslant N. \tag{1}$$

Soit N' l'entier associé à $\varepsilon/3$ et N dans la condition de convergence quasi-uniforme. Les applications f_n, avec $N \leqslant n \leqslant N'$, étant en nombre fini et étant continues au point a, il existe un voisinage V de a tel que l'on ait

$$d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3 \quad \text{pour } x \in V \text{ et } n \in [N, N']. \tag{2}$$

Enfin, étant donné le choix de N', quel que soit le point x de X, il existe un entier $n_x \in [N, N']$ tel que l'on ait

$$d(f_{n_x}(x), f(x)) < \varepsilon/3. \tag{3}$$

Les relations (1), (2) et (3) entraînent que l'on a, pour tout $x \in V$,

$$d(f(x), f_{n_x}(x)) < \varepsilon/3\ ,\ d(f_{n_x}(x), f_{n_x}(a)) < \varepsilon/3\ ,\ d(f(a), f_{n_x}(a)) < \varepsilon/3,$$

et on obtient donc, pour tout $x \in V$, $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Le point a et le réel positif ε étant quelconques, il en résulte que f est continue.

(27) C'est-à-dire, vérifie la condition de Borel-Lebesgue.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Condition nécessaire. [Borel,1905]. Soit (f_n) une suite d'applications continues convergeant simplement vers une application continue f. Un réel positif ε étant fixé, les parties

$$\Omega_n = \{x \in X \mid d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\}$$

sont ouvertes. La suite convergeant simplement, pour tout entier N, la famille $\{\Omega_n \mid n \geqslant N\}$ forme un recouvrement ouvert de X. Si X est quasi-compact, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $\{\Omega_{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant p\}$. Si on pose $N' = \max\{n_i \mid 1 \leqslant i \leqslant p\}$, il vient que, pour tout $x \in X$, il existe i tel que $x \in \Omega_{n_i}$ et on a alors $n_i \in [N, N']$ et $d(f_{n_i}(x), f(x)) < \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que la suite (f_n) converge quasi-uniformément. □

Corollaire A.2.2. *La convergence quasi-uniforme sur tout quasi-compact est une condition nécessaire pour que la limite simple d'une suite d'applications continues soit continue. Cette condition est suffisante si l'espace source est un k-espace* [*cf.* Définition **C.3.1**].

Démonstration. Condition nécessaire. Soit (f_n) une suite d'applications continues convergeant simplement vers une application continue. Pour tout quasi-compact K de l'espace source, la suite des restrictions à K des applications f_n converge simplement vers une application continue, donc cette suite converge quasi-uniformément d'après le théorème **A.2.1**. La suite (f_n) converge donc quasi-uniformément sur tout compact.

Condition suffisante. Soit (f_n) une suite d'applications continues convergeant simplement vers f. Si cette suite converge quasi-uniformément sur tout quasi-compact, la restriction de f à tout quasi-compact est continue d'après le théorème. Si l'espace source est un k-espace, il en résulte que f est continue. □

D'un point de vue pratique, la convergence quasi-uniforme présente les inconvénients communs à toutes les convergences de type « uniforme » : ne pas être une propriété locale. Elle ne permet donc pas l'étude de suites d'applications continues seulement en un point et elle introduit des arguments de compacité étrangers au problème. On peut pallier ces défauts par une « localisation » de la quasi-convergence : c'est la convergence régulière en un point. Comme dans la substitution de la convergence locale à la convergence uniforme sur tout compact, cette localisation rend inutiles les hypothèses faites sur l'espace source :

Théorème A.2.3. *La convergence régulière au point a est une condition nécessaire et suffisante pour que la limite simple d'une suite d'applications continues au point a soit continue en ce point.*

Démonstration. Condition nécessaire. Soit (f_n) une suite d'applications continues au point a, convergeant simplement vers une application f continue au point a. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(f_n(a))$ convergeant vers $f(a)$, il existe un entier N tel que l'on ait $d(f_N(a), f(a)) < \varepsilon/3$. Les fonctions f et f_N étant continues au point a, il existe un voisinage V de a tel que l'on ait, pour $x \in V$,

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad d(f_N(x), f_N(a)) < \varepsilon/3\,.$$

On a alors, pour $x \in V$,

$$d(f_N(x), f(x)) \leqslant d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) + d(f(a), f(x)) < \varepsilon\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la suite converge régulièrement au point a.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Condition suffisante. Soit (f_n) une suite d'applications continues au point a, convergeant simplement vers f.

Soit $\varepsilon > 0$. La suite (f_n) convergeant régulièrement au point a, il existe un entier N et un voisinage V de a tels que

$$d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon/3 \quad \text{pour } x \in V.$$

L'application f_N étant continue au point a, il existe un voisinage W de a tel que

$$d(f_N(x), f_N(a)) < \varepsilon/3 \quad \text{pour } x \in W.$$

On a donc, pour tout $x \in V \cap W$,

$$d(f(x), f_N(x)) < \varepsilon/3\ ,\ d(f_N(x), f_N(a) < \varepsilon/3\ ,\ d(f_N(a), f(a)) < \varepsilon/3,$$

ce qui entraîne que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ pour $x \in V \cap W$.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction f est alors continue au point a. □

Corollaire A.2.4. *La convergence régulière en chaque point de l'espace X est une condition nécessaire et suffisante pour que la limite simple d'une suite d'applications continues soit continue.*

Démonstration. C'est évident. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Convergence t-locale

Dans la remarque **II.5.2**, on a indiqué que l'on pouvait étendre la définition de la convergence locale [Définition **I.5.3**] et les propriétés relatives lorsque l'espace but est un espace uniforme (ce que sont les espaces métriques et les espaces vectoriels topologiques).

On cherche maintenant à définir une convergence locale lorsque l'espace but est un espace topologique sans structure uniforme.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

1. — Uniformité sans espace uniforme

Pour définir une convergence « topologique », nous dirons une *convergence t-locale*, il faut substituer une notion topologique à la notion de proximité définie par un entourage. La solution proposée ici a été suggérée par la notion de famille *evenly continuous* introduite par Kelley & Morse [*in* Kelley, 1955] pour un théorème d'Ascoli topologique. Intuitivement, une famille d'applications H est équicontinue au point a si l'image, par n'importe quelle application $f \in H$, d'un point x voisin de a est voisine de $f(a)$. Les points $f(a)$ dépendant évidemment du choix de f, on ne peut pas caractériser « $f(x)$ est voisin de $f(a)$ » par la donnée d'un voisinage de $f(a)$. L'idée de Kelley et Morse a été d'exprimer la proximité de $f(x)$ avec $f(a)$ en établissant une relation entre la proximité de chacun de ces points avec un point de référence : « pour que $f(x)$ soit voisin d'un point b, il suffit que $f(a)$ soit assez voisin de b ». Formalisé, cela donne leur définition d'une famille *evenly continuous au point a* :

$$\forall b \in Y, \forall U \in \mathscr{V}_Y(b), \quad \exists W \in \mathscr{V}_Y(b), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \\ \forall x \in V, \forall f \in H, \Big[\Big(f(a) \in W\Big) \Rightarrow \Big(f(x) \in U\Big)\Big].$$

La substitution d'un schéma de proposition du type

$$\forall b \in Y, \forall U \in \mathscr{V}_Y(b), \exists W \in \mathscr{V}_Y(b), (\ldots), \Big[\Big(z \in W\Big) \Rightarrow \Big(y \in U\Big)\Big]$$

à l'appartenance du couple (y, z) à un entourage de Y se fait aisément dans la définition de la convergence locale au point a d'un filtre Φ vers une application f. On exprime en effet qu'il existe $A \in \Phi$ tel que l'image par toute application $h \in A$ d'un point x voisin de a soit voisine de $f(x)$. Pour des espaces topologiques X et Y quelconques, cela donne :

$$\forall b \in Y, \forall U \in \mathscr{V}_Y(b), \quad \exists W \in \mathscr{V}_Y(b), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists A \in \Phi, \\ \forall x \in V, \forall h \in A, \ \Big[\Big(f(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(h(x) \in U\Big)\Big].$$

La même démarche, appliquée à la convergence locale d'une suite, donne :

$$\forall b \in Y, \forall U \in \mathscr{V}_Y(b), \quad \exists W \in \mathscr{V}_Y(b), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists N \in \mathbb{N}, \\ \forall x \in V, \forall n \geqslant N, \Big[\Big(f(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(h_n(x) \in U\Big)\Big].$$

La convergence ainsi définie est presque satisfaisante : elle entraîne la convergence simple au point a ; si f est continue au point a, elle entraîne la convergence continue au point a [Proposition **B.2.4**] ; si Y est uniforme, elle est entraînée par la convergence locale au point a [Proposition **B.2.3**] – ce qui assure qu'elle est au moins aussi générale que celle-ci, en particulier qu'elle ne souffre pas des limitations de la convergence continue. Une insuffisance apparaît cependant quand, par exemple, on veut démontrer que la limite d'une suite d'applications continues au point a est continue au point a. La difficulté tient à la dissymétrie des rôles joués par la limite f et par les éléments de la suite (ou du filtre) dans l'implication

$$\Big(f(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(h_n(x) \in U\Big).$$

Cette dissymétrie fait que des propriétés de f permettraient éventuellement d'établir des propriétés des h_n, mais que l'inverse n'est pas toujours possible. Une telle situation ne se présente évidemment pas pour la convergence locale, puisqu'une structure uniforme est, par nature, symétrique, autrement dit, « y est voisin de z » est équivalent à « z est voisin de y ».

Une version symétrique du schéma de Kelley et Morse est facile à concevoir. Au lieu de donner un sens à « y est voisin de z » par « pour que y soit voisin d'un point b, il suffit que z soit assez voisin de b », on donne un sens à « y et z sont voisins l'un de l'autre » par « pour que l'un des points soit voisin d'un point b, il suffit que l'autre soit assez voisin de b ». Cela correspond au remplacement du schéma de proposition

$$\forall b \in Y, \forall U \in \mathscr{V}_Y(b), \exists W \in \mathscr{V}_Y(b), (\dots), \Big[\Big(z \in W\Big) \Rightarrow \Big(y \in U\Big)\Big]$$

par le schéma de proposition

$$\forall b \in Y, \forall U \in \mathscr{V}_Y(b), \quad \exists W \in \mathscr{V}_Y(b), (\dots), \Big[\Big(z \in W\Big) \Rightarrow \Big(y \in U\Big)\Big] \text{et} \Big[\Big(y \in W\Big) \Rightarrow \Big(z \in U\Big)\Big].$$

L'emploi de ce schéma permet de proposer une version acceptable d'une convergence t-locale.

2. — Convergence t-locale

Définition B.2.1. *Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace topologique Y. Soit Φ un filtre sur H et soit f un élément de H. On dit que* Φ converge t-localement vers f au point a *si et seulement si Φ vérifie en ce point la condition* (***ctl***) *suivante :*

$$\forall b \in Y, \forall U \in \mathscr{V}_Y(b), \ \exists W \in \mathscr{V}_Y(b), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists A \in \Phi,$$
$$\forall x \in V, \forall h \in A, \Big[\Big(f(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(h(x) \in U\Big)\Big] et \Big[\Big(h(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(f(x) \in U\Big)\Big].$$

La notion de suite convergeant localement en un point en découle naturellement : une suite (h_n) d'applications d'un espace topologique X dans un espace topologique Y *converge t-localement vers f au point a* si le filtre des sections converge t-localement vers f au point a, c'est-à-dire si

$$\forall b \in Y, \forall U \in \mathscr{V}_Y(b), \ \exists W \in \mathscr{V}_Y(b), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists N \in \mathbb{N},$$
$$\forall x \in V, \forall n \geqslant N, \Big[\Big(f(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(h_n(x) \in U\Big)\Big] \text{et} \Big[\Big(h_n(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(f(x) \in U\Big)\Big].$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Proposition B.2.2. *Si le filtre Φ converge t-localement vers f au point a, alors Φ converge simplement vers f au point a.*

Démonstration. Pour $b = f(a)$ et $x = a$ dans **(ctl)**, la condition $f(a) \in W$ est toujours vérifiée. Il vient donc que, quel que soit le voisinage U de $f(a)$, il existe un élément A de Φ tel que l'on ait $h(a) \in U$ pour $h \in A$, c'est-à-dire la convergence simple de Φ vers f au point a. □

Proposition B.2.3. *Si l'espace Y est métrique, la convergence locale au point a entraîne la convergence t-locale au point a.*

Démonstration. Soit Φ un filtre convergeant localement vers f au point a. Soit b un point de Y et soit U un voisinage de b, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte U_ε de centre b et de rayon ε soit incluse dans U. Le filtre Φ convergeant localement vers f au point a, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait

$$d(f(x), h(x)) = d(h(x), f(x)) < \varepsilon/2 \quad \text{pour } x \in V \text{ et } h \in A.$$

Soit $U_{\varepsilon/2}$ la boule ouverte de centre b et de rayon $\varepsilon/2$. Pour $x \in V$ et $h \in A$, deux cas sont à considérer :

1) Si $f(x) \in U_{\varepsilon/2}$, c'est-à-dire $d(f(x), b) < \varepsilon/2$, on a

$$d(h(x), b) \leqslant d(h(x), f(x)) + d(f(x), b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ce qui entraîne $h(x) \in U$.

2) Si $h(x) \in U_{\varepsilon/2}$, c'est-à-dire $d(h(x), b) < \varepsilon/2$, on a

$$d(f(x), b) \leqslant d(f(x), h(x)) + d(h(x), b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ce qui entraîne $f(x) \in U$.

Le filtre Φ vérifie donc la condition **(ctl)** au point a. □

Remarque. La remarque **II.5.2** permet de généraliser cette proposition au cas où l'espace Y est uniforme.

Proposition B.2.4. *Si l'application f est continue au point a, la convergence t-locale au point a entraîne la convergence continue au point a.*

Démonstration. Avec $b = f(a)$ dans la définition de la convergence t-locale, il vient en particulier que :

$$\begin{aligned}\forall U \in \mathscr{V}_Y(f(a)), \quad & \exists W \in \mathscr{V}_Y(f(a)), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists A \in \Phi, \\ & \forall x \in V, \forall h \in A, \Big[\Big(f(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(h(x) \in U\Big)\Big].\end{aligned}$$

L'application f étant continue au point a, il existe un voisinage V' de a tel que l'on ait $f(x) \in W$ pour tout $x \in V'$. Il en résulte que $h(x)$ appartient à U si $x \in V \cap V'$ et $h \in A$. Le filtre converge donc continûment au point a [Définition **I.3.1**]. □

Corollaire B.2.5. *La convergence t-locale vers une application continue entraîne la convergence pour la topologie compact-ouvert* (28).

Démonstration. La convergence t-locale vers une application continue entraîne la convergence continue sur X, qui est plus fine que la convergence pour la topologie compact-ouvert. □

(28) C'est-à–dire la topologie définie sur l'ensemble $C(X, Y)$ des fonctions continues de X dans Y pour laquelle les ouverts élémentaires sont de la forme $\{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$ où K désigne un compact de X et U un ouvert de Y.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Proposition B.2.6. *Si l'espace Y est régulier (au sens anglo-saxon [29].) et si l'application f est continue au point a, la convergence continue au point a entraîne la convergence t-locale au point a.*

Démonstration. Soit b un point de Y et soit U un voisinage de b. La régularité de Y entraîne qu'il existe un voisinage fermé U' de b tel que U soit un voisinage de chaque point de U'. Deux cas se présentent :

1) Ou bien $f(a) \in U'$ et alors U est un voisinage de $f(a)$. L'application f étant continue au point a, il existe un voisinage V' de a tel que l'on ait $f(x) \in U$ pour tout $x \in V'$.
Par ailleurs, la condition de convergence continue au point a entraîne qu'il existe un voisinage V'' de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $h(x) \in U$ pour $x \in V''$ et $h \in A$.
La condition **(ctl)** est donc vérifiée avec $W = Y$, $V = V' \cap V''$ et A.

2) Ou bien $f(a) \notin U'$ et alors, comme U' est fermé, son complémentaire U'^c est un voisinage de $f(a)$. L'application f étant continue au point a, il existe alors un voisinage V' de a tel que l'on ait $f(x) \in U'^c$ pour $x \in V'$.
Par ailleurs, la condition de convergence continue au point a entraîne qu'il existe un voisinage V'' de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $h(x) \in U'^c$ pour $x \in V''$ et $h \in A$.
Pour $W = U'$, $V = V' \cap V''$ et A, quel que soit $x \in V$, ni la condition $f(x) \in W$, ni la condition $h(x) \in W$ pour $h \in A$ ne sont vérifiées, la condition **(ctl)** est donc vérifiée. □

Corollaire B.2.7. *Si l'espace Y est régulier (non nécessairement séparé), la convergence continue est équivalente à la convergence t-locale vers une application continue.*

Démonstration. Si l'espace Y est régulier, la convergence continue entraîne la continuité de f [Cook & Fischer, 1965] et la proposition **B.2.6** entraîne alors que la convergence est t-locale. La réciproque résulte directement de la proposition **B.2.4**. □

Remarque. Un espace uniforme étant régulier, ce corollaire généralise le théorème **I.3.4**.

3. — Quelques propriétés de la convergence t-locale

Proposition B.3.1. *Le filtre des parties de H contenant f converge t-localement vers f en tout point a de X.*

Démonstration. Pour tout point $b \in Y$ et tout voisinage $U \in \mathscr{V}_Y(b)$, on prend $V = X$ et $A = \{f\}$. □

Proposition B.3.2. *Si les filtres Φ_1 et Φ_2 convergent t-localement vers f au point a, alors le filtre $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \{A_1 \cup A_2 \mid A_1 \in \Phi_1, A_2 \in \Phi_2\}$ converge t-localement vers f au point a.*

(29) C'est-à-dire qu'on peut séparer un point et un fermé ne contenant pas ce point par deux ouverts disjoints, ce qui équivalent à la condition : l'ensemble des voisinages fermés d'un point est un système fondamental de voisinages de ce point[Bourbaki, *Topologie générale*, I.6.7].

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Les filtres Φ_1 et Φ_2 convergeant t-localement vers f au point a, on a

$$\forall b\in Y, \forall U\in \mathscr{V}_Y(b),\ \exists W_1\in \mathscr{V}_Y(b), \exists V_1\in \mathscr{V}_X(a), \exists A_1\in \Phi_1,$$
$$\forall x\in V_1, \forall h\in A_1, \Big[\Big(f(x)\in W_1\Big)\Rightarrow \Big(h(x)\in U\Big)\Big] \text{et} \Big[\Big(h(x)\in W_1\Big)\Rightarrow \Big(f(x)\in U\Big)\Big]$$

et

$$\forall b\in Y, \forall U\in \mathscr{V}_Y(b),\ \exists W_2\in \mathscr{V}_Y(b), \exists V_2\in \mathscr{V}_X(a), \exists A_2\in \Phi_2,$$
$$\forall x\in V_2, \forall h\in A_2, \Big[\Big(f(x)\in W_2\Big)\Rightarrow \Big(h(x)\in U\Big)\Big] \text{et} \Big[\Big(h(x)\in W_2\Big)\Rightarrow \Big(f(x)\in U\Big)\Big].$$

Soient $W = W_1\cap W_2\in \mathscr{V}_Y(b), V = V_1\cap V_2$ et $A = A_1\cup A_2\in \Phi_1\cap\Phi_2$. On a

- si $x\in V$ et $f(x)\in W$, alors
  - **a)** $x\in V_1$ et $f(x)\in W_1$, donc $h(x)\in U$ pour tout $h\in A_1$,
  - **b)** $x\in V_2$ et $f(x)\in W_2$, donc $h(x)\in U$ pour tout $h\in A_2$,

  d'où $h(x)\in U$ pour tout $h\in A$.
- si $x\in V$ et $h(x)\in W$ avec $h\in A$, alors
  - **a)** ou bien $h\in A_1$: on a $x\in V_1$ et $h(x)\in W_1$, donc $f(x)\in U$,
  - **b)** ou bien $h\in A_2$: on a $x\in V_2$ et $h(x)\in W_2$, donc $f(x)\in U$,

  d'où $f(x)\in U$.

Le filtre $\Phi_1\cap\Phi_2$ vérifie donc la condition **(ctl)** au point a. □

Proposition B.3.3. *Si le filtre Φ converge t-localement vers f au point a et si Φ' est plus fin que Φ, alors le filtre Φ' converge t-localement vers f au point a.*

Démonstration. Si Φ converge t-localement vers f au point a, on a

$$\forall b\in Y, \forall U\in \mathscr{V}_Y(b),\ \exists W\in \mathscr{V}_Y(b), \exists V\in \mathscr{V}_X(a), \exists A\in \Phi,$$
$$\forall x\in V, \forall h\in A, \Big[\Big(f(x)\in W\Big)\Rightarrow \Big(h(x)\in U\Big)\Big] \text{et} \Big[\Big(h(x)\in W\Big)\Rightarrow \Big(f(x)\in U\Big)\Big].$$

Tout élément de Φ étant un élément de Φ', on a

$$\forall b\in Y, \forall U\in \mathscr{V}_Y(b),\ \exists W\in \mathscr{V}_Y(b), \exists V\in \mathscr{V}_X(a), \exists A\in \Phi',$$
$$\forall x\in V, \forall h\in A, \Big[\Big(f(x)\in W\Big)\Rightarrow \Big(h(x)\in U\Big)\Big] \text{et} \Big[\Big(h(x)\in W\Big)\Rightarrow \Big(f(x)\in U\Big)\Big].$$

donc Φ' converge t-localement vers f au point a. □

Théorème B.3.4. *Sur un ensemble d'applications entre deux espaces topologiques, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre Φ converge t-localement vers f au point a est que tout ultrafiltre plus fin converge t-localement vers f au point a.*

Démonstration. Condition nécessaire. Si Φ converge localement vers f au point a, tout filtre plus fin que Φ, a fortiori tout ultrafiltre plus fin que Φ, converge t-localement vers f au point a d'après la proposition **B.3.2**.

Condition suffisante. On montre que, si Φ ne converge pas t-localement vers f au point a, il existe un ultrafiltre plus fin que Φ ne convergeant pas localement vers f au point a. Par hypothèse, il existe un point $b\in Y$ et un voisinage $U\in \mathscr{V}_Y(b)$ tels que

$$\forall W\in \mathscr{V}_Y(b), \forall V\in \mathscr{V}_X(a), \forall A\in \Phi, \exists x\in V, \exists h\in A,$$
$$\Big[\Big(f(x)\in W\Big) \text{ et } \Big(h(x)\notin U\Big)\Big] \text{ ou } \Big[\Big(h(x)\in W\Big) \text{ et } \Big(f(x)\notin U\Big)\Big].$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

À tout voisinage W de b et tout voisinage V de a, on associe la partie $B_{W,V}$ constituée des applications $h \in H$ telles que

$$\exists x \in V, \Big[\Big(f(x) \in W\Big) \text{ et } \Big(h(x) \notin U\Big)\Big] \text{ ou } \Big[\Big(h(x) \in W\Big) \text{ et } \Big(f(x) \notin U\Big)\Big].$$

Quels que soient $A \in \Phi$, $W \in \mathscr{V}_Y(b)$ et $V \in \mathscr{V}_X(a)$, on a : $A \cap B_{W,V} \neq \varnothing$ d'après l'hypothèse faite. En particulier, $B_{W,V}$ n'est jamais vide et on a

$$B_{W,V} \cap B_{W',V'} \supset B_{W\cap W',V\cap V'}.$$

La réunion de Φ et de l'ensemble des $B_{W,V}$ est donc une base de filtre. Soit Θ un ultrafiltre plus fin que cette base de filtre. Quels que soient $M \in \Theta$, $W \in \mathscr{V}_Y(b)$ et $V \in \mathscr{V}_X(a)$, on a $M \cap B_{W,V} \neq \varnothing$, donc

$$\forall W \in \mathscr{V}_Y(f(a)), \forall V \in \mathscr{V}_X(a), \forall M \in \Theta, \exists x \in V, \exists h \in M, \Big[\Big(f(x) \in W\Big) \text{ et } \Big(h(x) \notin U\Big)\Big] \text{ ou } \Big[\Big(h(x) \in W\Big) \text{ et } \Big(f(x) \notin U\Big)\Big].$$

L'ultrafiltre Θ ne converge donc pas t-localement vers f au point a. □

Remarque. Les propositions **B.3.1**, **B.3.2** et **B.3.3** entraînent que, sur un ensemble d'applications entre deux espaces topologiques, l'ensemble des filtres convergeant t-localement en un point a (resp. convergeant t-localement sur X) définit une structure aux limites. Le théorème **B.3.4** entraîne que la structure aux limites définie sur un ensemble d'applications par la convergence t-locale est une pseudo-topologie au sens de Choquet [1947].

Théorème B.3.5. *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications entre deux espaces topologiques quelconques. Si tout $A \in \Phi$ contient au moins une application continue au point a et si Φ converge t-localement vers f au point a, alors f est continue au point a.*

Démonstration. En prenant $b = f(a)$ dans la définition de la convergence t-locale, on a en particulier

$$\forall U \in \mathscr{V}_Y(f(a)),\ \exists W \in \mathscr{V}_Y(f(a)), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists A \in \Phi, \forall x \in V, \forall h \in A, \Big[\Big(h(x) \in W\Big) \Rightarrow \Big(f(x) \in U\Big)\Big].$$

Soit W' un voisinage de $f(a)$ tel que W soit un voisinage de tout point de W'. Le filtre Φ convergeant simplement au point a [Proposition **B.2.2**], il existe $B \in \Phi$ tel que l'on ait $h(a) \in W'$ pour $h \in B$ et, par hypothèse, il existe une application $h_0 \in A \cap B$ continue au point a. On a $h_0(a) \in W'$, donc W est un voisinage de $h_0(a)$ et, par continuité de h_0, il existe un voisinage V' de a tel que l'on ait $h_0(x) \in W$ pour $x \in V'$. La condition de convergence t-locale entraîne alors que $f(x) \in U$ pour $x \in V \cap V'$, ce qui établit la continuité de f au point a. □

Corollaire B.3.6. *Sous les hypothèses de ce théorème, le filtre Φ converge continûment au point a.*

Démonstration. L'application f étant continue au point a, on applique la proposition **B.2.4**. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Convergence locale et convergence uniforme sur tout compact

La convergence locale en tout point d'un filtre de fonctions définies sur un espace topologique X entraîne, à l'aide de la remarque **I.2.8**, que ce filtre converge uniformément sur tout quasi-compact [30] [Théorème **I.2.3**]. La réciproque est fausse en général [Exemple **I.2.2**] mais vraie pour de nombreux espaces usuels : nous l'avons indiquée [Remarque **I.2.8**] pour les espaces localement quasi-compacts [Proposition **I.2.5**] et, dans le cas des suites, pour les espaces quasi-compacts ayant un système fondamental dénombrable de voisinages [Proposition **I.2.6**].

L'objet de cette annexe et de caractériser les espaces pour lesquels cette réciproque est vraie, pour la convergence des filtres [Théorème **C.2.2**] et pour la convergence des suites [Théorème **C.2.3**].

Comme dans les chapitres et les annexes qui précèdent, les résultats vont être établis pour des espaces buts métriques. Ils s'étendent aux espaces uniformes (donc, en particulier, aux espaces vectoriels topologiques, métrisables ou pas) en utilisant la substitution indiquée dans la remarque **II.5.2**.

1. — Notion de c-espace

Définition C.1.1. *On dit qu'un espace topologique X est un* c-espace *si, pour toute famille filtrante décroissante $\{X_i \mid i \in \boldsymbol{I}\}$ de parties de X [31], les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout quasi-compact K, il existe $i \in \boldsymbol{I}$ tel que $X_i \cap K = \varnothing$.*

(ii) *L'intersection des adhérences $\overline{X_i}$ des parties X_i est vide.*

(30) Un ensemble quasi-compact est un espace topologique tel que, de tout recouvrement par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini (condition de Borel-Lebesgue).

(31) C'est-à-dire que chaque X_i est non vide et que l'on a

$$\forall (i,j) \in \boldsymbol{I}^2, \exists k \in \boldsymbol{I} \mid X_k \subseteq X_i \cap X_j. \tag{1}$$

L'ensemble $\boldsymbol{I}$ est alors muni d'une relation d'ordre définie par « $i \preceq j$ si et seulement si $X_j \subseteq X_i$ » ; la condition (1) est équivalente à la condition

$$\forall (i,j) \in \boldsymbol{I}^2, \exists k \in \boldsymbol{I} \mid [i \preceq k, j \preceq k]. \tag{2}$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Remarque. L'implication **(ii)** $\Rightarrow$ **(i)** est toujours vraie. En effet, quel que soit le quasi-compact K, $\left\{\overline{X_i} \cap K \mid i \in \boldsymbol{I}\right\}$ est une famille décroissante de fermés de K, d'intersection vide puisque

$$\bigcap_{i\in\boldsymbol{I}}\left(\overline{X_i}\cap K\right) = \left(\bigcap_{i\in\boldsymbol{I}}\overline{X_i}\right)\cap K = \varnothing\cap K = \varnothing.$$

La partie K étant quasi-compacte, il en résulte qu'il existe $i \in \boldsymbol{I}$ tel que $\overline{X_i} \cap K = \varnothing$ ce qui entraîne, a fortiori, que $X_i \cap K = \varnothing$.

Un c-espace est donc un espace tel que **(i)** entraîne **(ii)** pour toute famille décroissante de parties.

Proposition C.1.2. *Un espace localement quasi-compact est un c-espace.*

Démonstration. On démontre que **(i)** entraîne **(ii)** pour toute famille filtrante décroissante $\{X_i \mid i \in \boldsymbol{I}\}$ de parties de X.
Soit a un point de X. Si l'espace X est localement quasi-compact, ce point admet un voisinage quasi-compact K et, par hypothèse, il existe un indice $j \in \boldsymbol{I}$ tel que $X_j \cap K = \varnothing$. Il en résulte que a n'appartient pas à l'adhérence de X_j, a fortiori pas à l'intersection des adhérences de tous les X_i.
Ceci étant vrai quel que soit a, cette intersection est vide. □

Définition C.1.3. *On dit qu'un espace topologique X est* séquentiellement un c-espace, *ou qu'il est un sc*-espace, *s'il vérifie la propriété de la définition* ***C.1.1*** *pour $\boldsymbol{I} = \mathbb{N}$, c'est-à-dire pour les suites décroissantes (X_n) de parties de X.*

Proposition C.1.4. *Un espace ayant en tout point un système fondamental dénombrable de voisinages, en particulier un espace métrique, est un sc-espace.*

Démonstration. On démontre que **(i)** entraîne **(ii)** pour toute suite décroissante (X_n) de parties de X. Si **(ii)** était faux, il existerait un point $a \in X$ appartenant à l'intersection des $\overline{X_n}$. Étant donné (V_n) un système fondamental dénombrable de voisinages de a, on aurait donc $V_n \cap X_n \neq \varnothing$ pour tout n et on pourrait construire une suite (a_n) vérifiant $a_n \in V_n \cap X_n$ pour tout n. La partie $K = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ serait quasi-compacte et vérifierait $a_n \in K \cap X_n$, ce qui entraînerait $K \cap X_n \neq \varnothing$ pour tout n, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

Remarque. Il est évident qu'un c-espace est un sc-espace. La réciproque est fausse. En particulier, un espace ayant en tout point un système fondamental dénombrable de voisinages n'est pas, en général, un c-espace :

Exemple C.1.5. Soit $X = \mathbb{R} \coprod \{\omega\}$, muni de la topologie dont les ouverts sont les parties quelconques de $\mathbb{R}$ et les parties $(\mathbb{R} \setminus A) \coprod \{\omega\}$ avec A borné dans $\mathbb{R}$. Cet espace admet en tout point un système fondamental dénombrable de voisinages mais n'est pas un c-espace.

Démonstration. Un point a de $\mathbb{R}$ a un système fondamental de voisinages formé du seul voisinage $\{a\}$ et le point ω admet $\left\{\left(\mathbb{R} \setminus [-n,n]\right) \coprod \{\omega\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ comme système fondamental de voisinages.
Une partie de $\mathbb{R}$ est compacte dans X si et seulement si elle est compacte pour la topologie discrète, donc si et seulement si elle est finie.
Une condition nécessaire pour qu'une partie $A \coprod \{\omega\}$ soit compacte dans X est que, quel que soit n, on puisse extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert

$$\left\{\left(\mathbb{R} \setminus [-n,n]\right) \coprod \{\omega\}\right\} \bigcup \{\{x\} \mid x \in A \cap [-n,n]\},$$

donc que A soit une partie discrète de $\mathbb{R}$. La réciproque est évidente.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des parties discrètes de $\mathbb{R}$ ordonné par inclusion. La famille $\mathscr{D}'$ des parties $\{\mathbb{R}\backslash A \mid A \in \mathscr{D}\}$ est filtrante décroissante puisque la réunion de deux parties discrètes est discrète.
Cette famille vérifie la proposition **(i)** de la définition **C.1.1** : étant donné un compact K de X,

- ou bien K est une partie finie de $\mathbb{R}$ et alors $\mathbb{R}\backslash K$ appartient à $\mathscr{D}'$ et $K \cap (\mathbb{R}\backslash K) = \varnothing$,
- ou bien K est de la forme $K_0 \coprod \{\omega\}$, où K_0 est une partie discrète de $\mathbb{R}$, et alors $\mathbb{R}\backslash K_0$ appartient à $\mathscr{D}'$ et $K \cap (\mathbb{R}\backslash K_0) = \varnothing$.

Mais cette famille ne vérifie pas la proposition **(ii)** de la définition **C.1.1** : quel que soit A discret, la partie $\mathbb{R}\backslash A$ n'est pas bornée, donc son adhérence dans X contient le point ω. L'intersection des adhérences des parties appartenant à la famille n'est donc pas vide. □

2. — Convergence locale sur un c-espace

Lemme C.2.1. *Soit H un ensemble d'applications de X dans un espace métrique Y. Soit Φ un filtre sur H et soit $f \in H$. Pour tout $A \in \Phi$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on pose*

$$F_A^\varepsilon = \{x \in X \mid \exists h \in A, d(h(x), f(x)) \geqslant \varepsilon\}.$$

1) *Pour que Φ converge localement vers f sur X, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intersection des adhérences des parties F_A^ε soit vide.*

2) *Pour que Φ converge uniformément sur tout quasi-compact vers f, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout quasi-compact K, il existe A tel que $K \cap F_A^\varepsilon = \varnothing$.*

Démonstration. **1)** Le filtre Φ converge localement vers f si et seulement si, quels que soient le point a de X et le réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un élément A de Φ tels que l'on ait $d(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V$ et tout $h \in A$, c'est-à-dire tels que l'on ait $V \cap F_A^\varepsilon = \varnothing$.
Le filtre Φ converge donc localement vers f si et seulement si, quel que soit $\varepsilon > 0$, aucun point de X n'est adhérent à toutes les parties F_A^ε, c'est-à-dire si et seulement si, quel que soit $\varepsilon > 0$, l'intersection des adhérences des parties F_A^ε est vide.
2) Le filtre Φ converge uniformément sur tout quasi-compact vers f si et seulement si, quels que soient le quasi-compact K de X et le réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément A de Φ tel que l'on ait $d(h(x), f(x)) < \varepsilon$ pour $x \in K$ et $h \in A$, c'est -à-dire tel que l'on ait $K \cap F_A^\varepsilon = \varnothing$. □

Théorème C.2.2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est un c-espace.*

(ii) *Pour tout ensemble H d'applications de X dans un espace métrique Y, la convergence locale sur X et la convergence uniforme sur tout quasi-compact de X coïncident.*

Démonstration. **(i) ⇒ (ii).** Soit X un c-espace. On sait [Remarque **I.2.8** et théorème **I.2.3**] que la convergence locale entraîne la convergence uniforme sur tout quasi-compact. Il reste à démontrer la réciproque.
Si le filtre Φ converge uniformément sur tout quasi-compact, le lemme **C.2.1** entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout quasi-compact K de X, il existe $A \in \Phi$ tel que $K \cap F_A^\varepsilon = \varnothing$. L'espace X étant un c-espace et la famille $\left\{F_A^\varepsilon \mid A \in \Phi\right\}$ étant filtrante décroissante, il en résulte que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intersection $\bigcap_{A \in \Phi} \overline{F_A^\varepsilon}$ est vide, donc que Φ converge localement [Lemme **C.2.1**].

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

(ii) ⇒ (i). Soit X un espace tel que, pour tout espace métrique Y, la convergence locale et la convergence uniforme sur tout quasi-compact coïncident.
Soit $\{X_i \mid i \in \boldsymbol{I}\}$ une famille filtrante décroissante de parties de X telle que, pour tout quasi-compact K, il existe $i \in \boldsymbol{I}$ tel que $X_i \cap K = \varnothing$. Soit h_i la fonction caractéristique de X_i et soit Φ le filtre sur l'espace $\mathbb{R}^X$ des applications de X dans $\mathbb{R}$, engendré par les sections finissantes $A_i = \left\{h_j \mid i \preceq j\right\}$.
L'hypothèse faite sur les X_i entraîne que, pour tout quasi-compact K, il existe $i \in \boldsymbol{I}$ tel que l'on ait $h(x) = 0$ pour tout $x \in K$ et tout $h \in A_i$; le filtre Φ converge donc uniformément vers 0 sur tout quasi-compact de X. Par hypothèse, cela entraîne que ce filtre converge localement vers 0 sur X, donc, d'après le lemme **C.2.1**, que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intersection $\bigcap_{A\in\Phi} \overline{F^\varepsilon_A}$ est vide ; comme tout $A \in \Phi$ contient un A_i, il en résulte que l'intersection $\bigcap_{i\in\boldsymbol{I}} \overline{F^\varepsilon_{A_i}}$ est vide.Or, si on prend $\varepsilon = 1/2$, on a $F^\varepsilon_{A_i} = X_i$, donc l'intersection des $\overline{X_i}$ est vide. L'espace X est un c-espace. □

On démontre de même le résultat suivant pour la convergence locale des suites :

Théorème C.2.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est un sc-espace.*

(ii) *Une suite d'applications de X dans un espace métrique Y converge localement vers f si et seulement si elle converge vers f uniformément sur tout quasi-compact.*

3. — Relation avec les k-espaces

Soit Φ un filtre d'applications tel que tout élément contienne au moins une application continue. Si Φ converge uniformément sur tout quasi-compact, la restriction de la limite f à tout quasi-compact est continue mais, en général, f n'est pas continue. Pour que ce soit le cas, il faut qu'il y ait « suffisamment » de quasi-compacts pour que la continuité sur tout quasi-compact entraîne la continuité sur l'espace.

Kelley [1955, p. 230] propose d'appeler k-espace un espace topologique X pour lequel : « if a subset A of X intersects each closed compact [32] set in a closed set, then A is closed » ; cette définition assure qu'il y a « suffisamment » de quasi-compacts fermés pour que la continuité sur tout quasi-compact fermé entraîne la continuité sur l'espace, ce qui est une propriété plus forte que ce qui était nécessaire. Kelley n'explique pas la raison de ce raffinement et il suppose toujours par la suite que l'espace est séparé — cas dans lequel tout quasi-compact est fermé. Pour conserver toute sa généralité à cette notion qui, sous la forme proposée par Kelley, serait de toute façon trop restrictive pour notre théorème **C.3.3**, nous proposons d'abandonner la condition de fermeture.

Définition C.3.1. *On dit qu'un espace topologique X est un* k-espace *si une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie de X soit fermée est que son intersection avec toute partie quasi-compacte K soit fermée dans K.*

(32) c'est-à-dire, dans la terminologie française, tout quasi-compact fermé.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Remarques.
– *Tout k-espace au sens de* Kelley *est un k-espace au sens de cette définition et, si X est séparé, les deux définitions sont équivalentes.*
– *Pour un quasi-compact K non fermé, la condition de fermeture dans K n'entraîne pas, en général, la fermeture dans X : c'est peut-être pour éviter cette difficulté technique que Kelley s'est limité aux quasi-compacts fermés.*

Proposition C.3.2. *Un espace localement quasi-compact ou un espace ayant en tout point un système fondamental dénombrable de voisinages est un k-espace.*

Démonstration. Nous allons montrer que, si une partie A n'est pas fermée, il existe un quasi-compact K tel que $A \cap K$ ne soit pas fermé dans K.
Si A n'est pas fermé, il existe un point a adhérent à A et n'appartenant pas à A. Alors,
– si l'espace est localement quasi-compact, le point a a un voisinage quasi-compact K et $A \cap K$ n'est pas fermé dans K puisque a est adhérent à $A \cap K$ dans K mais n'appartient pas à $A \cap K$;
– si le point a a un système fondamental dénombrable de voisinages, il existe une suite (a_n) de points de A convergeant vers a ; la partie $K = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est quasi-compacte et $A \cap K = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas fermé dans K puisque a est adhérent à $A \cap K$ dans K et n'appartient pas à $A \cap K$. □

Remarque. Kelley a démontré cette proposition [*loc. cit.*, p.231] sous l'hypothèse que l'espace était séparé.

Théorème C.3.3. *Tout c-espace est un k-espace.*

Démonstration. Soit A une partie de X dont l'intersection avec tout quasi-compact K est fermée dans K. Nous allons montrer que, si A n'est pas fermée, alors X n'est pas un c-espace.
Soit a un point adhérent à A et n'appartenant pas à A. La famille de parties $\mathscr{A} = \{V \cap A \mid V \in \mathscr{V}_X(a)\}$ ordonné par inclusion, est filtrante décroissante. Étant donné un quasi-compact K de X, la partie $K \cup \{a\}$ est quasi-compacte, donc la partie $A \cap (K \cup \{a\}) = A \cap K$ est un fermé de $K \cup \{a\}$. Ce fermé ne contenant pas a, il existe un voisinage de a dans $K \cup \{a\}$ ne rencontrant pas $A \cap K$, c'est-à-dire :

$$\exists V \in \mathscr{V}_X(a), (V \cap (K \cup \{a\})) \cap (A \cap K) = (V \cap A) \cap K = \varnothing.$$

La famille $\mathscr{A}$ vérifie donc la proposition (**i**) de la définition **C.1.1**. Cependant, a appartient à $\overline{A \cap V}$ quel que soit $V \in \mathscr{V}_X(a)$, donc l'intersection des adhérences des éléments de $\mathscr{A}$ n'est pas vide : la famille de parties $\mathscr{A}$ ne vérifie pas la proposition (**ii**) de la définition **C.1.1**, donc X n'est pas un c-espace. □

Remarque. La réciproque est fausse. Un k-espace, même au sens de Kelley, n'est pas, en général, un c-espace : l'espace de l'exemple **C.1.5** est un k-espace au sens de Kelley, puisque tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages [Proposition **C.3.2**] et que l'espace est séparé, mais n'est pas un c-espace. Dans cet exemple, l'espace est un sc-espace, mais ce n'est pas toujours le cas : l'exemple suivant montre qu'un k-espace, même au sens de Kelley, n'est pas, en général, un sc-espace.

Exemple C.3.4. Soit $X = \mathbb{R} \coprod \{\omega\}$, muni de la topologie dont les ouverts sont les parties de $\mathbb{R}$ et les parties $(\mathbb{R} \setminus D) \coprod \{\omega\}$, D étant une partie fermée au plus dénombrable de $\mathbb{R}$. Cet espace est un k-espace au sens de Kelley mais n'est pas un sc-espace.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Les fermés de X sont les parties fermées au plus dénombrables de $\mathbb{R}$ et les parties $A \coprod \{\omega\}$ avec A fermé dans $\mathbb{R}$.

a) La trace sur $\mathbb{R}$ d'un quasi-compact de X est une partie bornée. En effet,
– ou bien c'est une partie A de $\mathbb{R}$, qui est compacte (on considère les recouvrements formés d'ouverts de $\mathbb{R}$), donc bornée,
– ou bien c'est une partie de la forme $A \coprod \{\omega\}$ et, si A n'était pas bornée, il existerait une partie dénombrable fermée $D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de A, vérifiant, pour tout n, $|a_{n+1}| \geqslant 2 + |a_n|$, et on ne pourrait pas extraire de sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert

$$\Big\{\mathbb{R}\backslash D) \coprod \{\omega\}\Big\} \cup \{]a_n - 1, a_n + 1[\mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Une partie $C \coprod \{\omega\}$ est donc un quasi-compact fermé de X si et seulement si C est un compact de $\mathbb{R}$.

b) Une partie de X est fermée dans X si son intersection avec tout quasi-compact fermé de X est fermée dans X. Deux cas sont à considérer :

– A est une partie de $\mathbb{R}$ dont l'intersection avec tout quasi-compact fermé de X est fermée dans X. Quel que soit le compact C de $\mathbb{R}$, la partie

$$A \cap \Big(C \coprod \{\omega\}\Big) = A \cap C$$

est donc fermée dans X, c'est-à-dire est une partie fermée au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ et, comme $\mathbb{R}$ est un k-espace, il en résulte que A est fermée dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, A est la réunion dénombrable des parties au plus dénombrables $A \cap [0, n]$, donc est au plus dénombrable. La partie A est donc un fermé de X.

– $A \coprod \{\omega\}$ est une partie dont l'intersection avec tout quasi-compact fermé de X est fermée dans X. Pour tout compact C dans $\mathbb{R}$, la partie

$$\Big(A \coprod \{\omega\}\Big) \cap \Big(C \coprod \{\omega\}\Big) = (A \cap C) \coprod \{\omega\}$$

est fermée dans X, donc $A \cap C$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est un k-espace, il en résulte que A est fermée dans $\mathbb{R}$, donc que $A \coprod \{\omega\}$ est fermée dans X.

c) La suite des parties $\{X_n = [n, \infty[\mid n \in \mathbb{N}\}$ est filtrante décroissante et, quel que soit le quasi-compact K de X, partie dont la trace sur $\mathbb{R}$ est bornée, il existe n tel que $X_n \cap K = \varnothing$. Cependant, on a $\overline{X_n} = [n, +\infty[\coprod \{\omega\}$, donc l'intersection des $\overline{X_n}$ n'est pas vide : l'espace X n'est pas un sc-espace. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Convergence locale des suites généralisées

1. — Introduction et historique

Moore et Smith[1922] ont étendu la notion de suite en considérant des « suites généralisées » [33] $(u_i)_{i\in \boldsymbol{I}}$ indexées par un « *ensemble filtré* [34] » $\boldsymbol{I}$. Sur un espace topologique X, la convergence d'une suite généralisée se définit comme celle d'une suite classique : $(x_i)_{i\in \boldsymbol{I}}$ converge vers a si, quel que soit le voisinage V de a dans X, il existe $i_0 \in \boldsymbol{I}$ tel que l'on ait $x_i \in V$ pour tout $i \succ i_0$.

Cette théorie a été initialement conçue pour donner un cadre unitaire à plusieurs modes de convergence usuels de l'analyse : bien sûr, la convergence d'une suite « ordinaire », indexée par $\mathbb{N}$, mais aussi la convergence de sommes partielles d'une famille sommable, indexées par les parties finies de l'ensemble des indices de la famille, ou encore la convergence des sommes de Riemann d'une fonction numérique sur un segment $[a, b]$, indexées par les « partitions pointées » de $[a, b]$, c'est-à-dire la donnée d'une partition $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ et de points $t_k \in [a_k, a_{k+1}]$ (*cf.* intégrale de Henstock).

Un autre domaine d'application de la théorie est apparu ultérieurement [Birkhoff, 1937] : la topologie générale où les suites généralisées permettent d'appliquer aux espaces topologiques quelconques les techniques usuelles, utilisant les suites « ordinaires », de la topologie métrique [Birkhoff, 1937]. Cette approche de la convergence sur les espaces topologiques généraux s'est faite parallèlement au développement de la théorie des filtres :

– Birkhoff [1935] propose une nouvelle définition de la limite :

> « An aggregate Σ of sets of points of H will be said to *converge* to a point p of H if and only if
> (1) the set-theoretical product [35] of any two sets of Σ contains a suitable set of Σ,
> (2) any neighborhood of p contains a suitable set of Σ. »,

c'est-à-dire la définition conjointe d'une base de filtre et de sa convergence, et il annonce trois applications de ce mode de convergence.

(33) « *net* », dans la terminologie introduite par Kelley [1950]
(34) « *directed set* » dans la terminologie introduite par Birkhoff [1937], ensemble préordonné (c'est-à-dire muni d'une relation binaire réflexive et transitive) dans lequel toute partie finie admet un majorant (il suffit bien sûr que cela soit vrai pour toute partie à deux éléments).
Un ensemble « *filtrant à droite* » au sens de Bourbaki [1940] est un ensemble filtré où la relation de préordre est une relation d'ordre.
(35) C'est-à-dire l'intersection.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

– Birkhoff [1937 (janvier)] mentionne la notion de base de filtre :

> « A system Σ of sets S_α of a topological space X will be called *overlapping* if and only if the common part $S_\alpha \cap S_\beta$ of Σ contains some third set S_γ of Σ. »,

qu'il sépare de la définition de sa convergence :

> « Σ will be said to converge to the point $x \in X$ if and only if it is overlapping and every neigborhood U_x of x contains some set S_α of Σ. »,

et il pose le problème de l'équivalence entre cette notion de convergence et la convergence des suites généralisées [(36)] ; cependant, l'essentiel de son article est consacré à l'utilisation des suites généralisées en topologie et les applications énoncées dans l'*abstract* de 1935 ne sont pas traitées en termes de convergence des bases de filtre mais soit en termes d'ouverts, soit en termes de suites généralisées [(37)].

– Cartan [1937a (octobre) ; 1937b] définit les filtres, les bases de filtre et leur convergence, apparemment indépendamment de Birkhoff, qu'il ne cite pas, et en ne mentionnant pas la notion de suite généralisée alors même qu'il introduit ainsi sa première note :

> « Malgré les services rendus en topologie par la considération des *suites dénombrables*, leur emploi n'est pas adapté à l'étude des espaces généraux. Nous voulons indiquer ici quel est l'instrument qui semble devoir les remplacer. »

L'apport fondamental de ces notes est ailleurs : dans la comparaison des filtres, qui débouche sur la notion d'ultrafiltre et ses applications aux espaces compacts.

Ces deux modes de convergence ont été étudiés indépendamment, celui basé sur les suites généralisées par l'école américaine [Tuckey, 1940 ; Kelley, 1950, 1955 ; McShane, 1952], celui basé sur les filtres par l'école française [Bourbaki, 1940 ; Choquet, 1947], dans un très curieux refus réciproque de leurs idées respectives :

– Bourbaki [1940] ne mentionne la convergence au sens de Moore-Smith qu'une seule fois, dans une « note historique » sur la compacité et le théorème de Tychonoff, et c'est pour l'écarter sommairement :

> « Enfin l'introduction des filtres par Henri Cartan, tout en apportant un instrument très précieux en vue de toutes sortes d'applications (où il se substitue avantageusement à la notion de « convergence à la Moore-Smith ») est venue, grâce au théorème des ultrafiltres, achever d'éclaircir et de simplifier la théorie. »

(36) La démonstration [*loc. cit.*, théorème 8, p.45] est malheureusement incomplète (la caractérisation de la convergence d'une suite généralisée par la convergence d'une base de filtre n'est pas évoquée) et elle est entachée d'une erreur logique, mais cela ne remet pas en cause l'exactitude du résultat énoncé : à toute base de filtre est associée une suite généralisée dont la convergence entraîne la convergence de la base de filtre.

(37) De nombreuses incohérences de rédaction (annonces d'utilisations restées sans suite, référence à des formules absentes ; etc.) laissent penser qu'une première version de l'article avait été écrite dans l'esprit de l'*abstract* de 1935, c'est-à-dire en termes de bases de filtre, avant d'être hâtivement remaniée.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

– A contrario, Kelley [1950] ne mentionne la notion de filtre qu'une seule fois, dans l'introduction de son article, et il affirme de suite que :

> « However, the More-Smith theory seems to be the only one which embraces as direct special cases such diverse processes as convergence of sequences and double sequences, computation of infinite unordered sums, and computation of integrals as limits over refinement of subdivision. »

– McShane [1952] ne consacre qu'une note infrapaginale à la notion de filtre :

> « † (...) Here we should also mention the very inclusive theory of limits based on filters, devised by H. Cartan, Théorie des filtres, C.R. Acad. Sci. Paris, vol.205, 1937, pp.595-598, Filtres et ultrafiltres, *ibid.*, pp. 777-779. This same theory was also expounded by H. L. Smith, apparently independently (A general theory of limits, Nat. Math. Mag., vol. 12, 1938, pp. 371-379). »

– Kelley [1955] renvoie la théorie des filtres à un problème [*loc. cit.*, problème L, p. 83] dont la dernière question :

> « (f) One might suspect that filters and nets lead to essentially equivalent theories. Ground for this suspicion may be found in the following facts : (...) »

n'est d'ailleurs qu'une pirouette puisqu'elle ne propose que deux constructions, « part of the folklore of the subject » selon Kelley, celle du filtre engendré par les sections finissantes d'une suite généralisée et celle d'une suite généralisée associée à un filtre, sans qu'aucune mention ne soit faite des propriétés de convergence de ces deux objets. Tout ce qui est dit est que

(i) le premier est un filtre,

(ii) le filtre engendré par les sections finissantes du second coïncide avec le filtre initialement considéré.

L'impasse faite sur les propriétés de convergence ne saurait être que délibérée, nonobstant la tournure conjecturale de la rédaction [« One might suspect (...) », « Ground for this suspicion (...) »] : une démonstration élémentaire montre en effet qu'une suite généralisée converge si et seulement si le filtre engendré par les sections finissantes est convergent et la propriété (ii) assure alors qu'un filtre converge si et seulement si la suite généralisée qui lui est associée est convergente. Les deux théories sont donc « essentially equivalent », c'est-à-dire bel et bien équivalentes.

Birkhoff [1937] ne rejette pas la notion de base de filtre, à laquelle il consacre un paragraphe, mais les applications proposées s'explicitent mieux dans le langage des ouverts ou dans celui des suites que dans le langage des filtres. Il en fait d'ailleurs la remarque dans une note infrapaginale [*loc. cit.*, p.48] :

> « [15] (...) It would be less elegant, but possible, to give an analogous construction involving only systems of sets. »

Cette démarche pragmatique, consistant à choisir sans a priori les outils les mieux adaptés à chaque circonstance, est soutenue explicitement par McShane [1952] :

> « When we are dealing with subspaces of finite dimensional spaces, it is quite convenient to be able to maneuver back and forth between property (I), in « Heine-Borel » arguments, and properties (II) and (III), in

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

> « Bolzano-Weierstrass » arguments. The proof just completed shows that the same kind of convenience is available even in the most general topological spaces, provided that we agree to use nets instead of sequences and adopt Kelley's definition of subsequence. »,

avec plus de réserve par Schwartz [1966] :

> « Pour être correct, il faudrait utiliser les filtres de H. Cartan dans toutes les questions de convergence. Pour ne pas alourdir le texte, nous avons employé le langage « naïf ». Nous dirons : « des distributions T_j convergent vers 0 », comme s'il s'agissait d'une suite (T_j) (dépendant du paramètre entier j et tendant vers 0 pour j tendant vers l'infini), mais on devra comprendre qu'il s'agit d'un filtre convergent quelconque. »,

et par Choquet [1969 ; 2000] :

> « Une première façon de préciser cette idée vague [la convergence d'une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$] consiste à remarquer que l'ensemble ordonné $\mathscr{F}$ [des parties finies de I] étant filtrant croissant, les parties de $\mathscr{F}$ de la forme $\{J \mid J_0 \subset J\}$ constituent une base de filtre $\mathscr{B}$. On dit alors que la famille (a_i) a pour somme A si $A = \lim_{\mathscr{B}} A_J$ (où $A_J = \sum_{i\in J} a_i$).
> Mais, pour éviter le recours aux bases de filtre, nous donnerons de la sommabilité une définition équivalente plus directe :
> **Définition 8-1** On dit qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres réels est *sommable* s'il existe un nombre réel A possédant la propriété suivante : pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $J_0 \in \mathscr{F}$ tel que pour tout $J \in \mathscr{F}$ contenant J_0, on ait $|A - A_J| \leqslant \varepsilon$. »

semble éminemment rationnelle et plus profitable que toute forme d'ostracisme.

Nous avons choisi de privilégier le langage des filtres dans l'exposé de la théorie de la convergence locale parce qu'il est, d'un point de vue technique plus simple à utiliser que celui des suites généralisées. Par ailleurs, les filtres sur un ensemble donné formant un ensemble, la définition d'un mode de convergence par la spécification des filtres convergents ne pose pas de problème logique, ce qui ne serait pas le cas pour une définition par la spécification des suites généralisées convergentes, celles-ci ne formant pas un ensemble. Faut-il pour autant refuser de considérer la notion de suite généralisée convergeant localement en un point ?

Le plus souvent, la convergence locale d'une suite généralisée étant définie par la convergence locale du filtre des sections finissantes [Définition **D.2.2**], les résultats établis dans le langage des filtres se traduisent immédiatement en termes de suites généralisées, sur le modèle de ce que nous avons systématiquement fait pour leur traduction en termes de suites « ordinaires ». Mais certains résultats semblent être propres aux suites, qu'elles soient « ordinaires » ou « généralisées », comme le théorème de Dini [Théorème **D.3.4**], ou ne s'exprimer dans le langage des filtres qu'au prix d'un habillage artificiel et parfois d'une perte de généralité. C'est pourquoi nous proposons ici quelques éléments d'une théorie de la convergence locale des suites généralisées d'applications d'un espace topologique dans un espace uniforme et nous énonçons quelques résultats pour lesquels cette théorie semble pertinente.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

2. — Généralités sur la convergence des suites généralisées

On ne peut pas étendre directement à la convergence locale la définition de la convergence d'une suite généralisée [38] sur un espace topologique, celle-ci utilisant la notion de voisinage, notion qui n'a pas d'homologue en convergence locale. Une reformulation de la convergence des suites généralisées en termes de filtres permet cette extension :

Lemme D.2.1. *Les* sections finissantes $\{u_i \mid i \succ i_0\}$ *d'une suite généralisée* $u_* = (u_i)_{i\in \boldsymbol{I}}$ *dans un ensemble* E *forment une base de filtre sur* E*; on appelle* filtre des sections de u_* *le filtre sur* E *engendré par cette base de filtre. Si* E *est muni d'une topologie, la suite généralisée* u_* *converge si et seulement si le filtre des sections de* u_* *converge vers* a*.*

Démonstration. Deux indices i_1 et i_2 admettant un majorant i_0, l'intersection des sections $\{u_i \mid i \succ i_1\}$ et $\{u_i \mid i \succ i_2\}$ contient la section $\{u_i \mid i \succ i_0\}$. Les sections étant des parties non vides, l'ensemble des sections est bien une base de filtre.

Sur un espace topologique, la suite généralisée u_* converge vers a si et seulement si, quel que soit le voisinage V de a, il existe $i_0 \in \boldsymbol{I}$ tel que l'on ait $u_i \in V$ pour tout $i \succ i_0$, et le filtre des sections de u_* converge vers a si et seulement si, quel que soit le voisinage V de a il existe i_0 tel que la section $\{u_i \mid i \succ i_0\}$ soit contenue dans V. Il n'y a qu'une différence d'écriture entre ces deux propositions. □

Cette réinterprétation de la convergence d'une suite généralisée dans un espace topologique fournit un modèle pour la définition de la convergence locale d'une suite généralisée d'applications en prenant pour E l'espace Y^X des applications de X dans Y :

Définition D.2.2. *Soit* $f_* = (f_i)_{i\in \boldsymbol{I}}$ *une suite généralisée d'applications d'un espace topologique* X *dans un espace uniforme* (*en particulier métrique ou vectoriel topologique*)*. La suite* f_* *converge localement vers* f *au point* a *si le filtre des sections de* f_* *converge localement vers* f *au point* a*, c'est-à-dire si, quel que soit l'entourage* $\mathscr{U}$ *de* Y*, il existe un voisinage* V *de* a *et un indice* $i_0 \in \boldsymbol{I}$ *tels qu'on ait* $(f_i(x), f(x)) \in \mathscr{U}$ *pour* $x \in V$ *et* $i \succ i_0$*; en abrégé*

$$\forall \mathscr{U} \in \mathscr{E}(Y), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists i_0 \in \boldsymbol{I}, \forall i \succ i_0, (f_i(x), f(x)) \in \mathscr{U} \ .$$

La suite f_* *converge localement sur* X *si elle converge localement en tout point de* X*.*

Si les éléments de f_* appartiennent à un sous-ensemble H de Y^X, les sections finissantes de f_* forment une base de filtre sur H et on peut associer à f_* le *filtre des sections de* f_* *dans* H, c'est-à-dire le filtre sur H engendré par cette base. On a alors :

Proposition D.2.3. *Si les éléments de* f_* *appartiennent à un sous-ensemble* H *de* Y^X*, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite* f_* *converge localement vers* f *au point* a (*au sens de la définition* **D.2.2**) *et la limite appartient à* H*.*

(ii) *Le filtre des sections de* f_* *dans* H *converge localement vers* f *au point* a*.*

On dit alors que f_* converge localement vers f au point a dans H*.*

(38) On entendra par suite généralisée dans un ensemble E toute famille d'éléments de E indexée par un ensemble $\boldsymbol{I}$ muni d'une relation d'ordre, notée $\succeq$, telle que tout couple (i, j) d'éléments de $\boldsymbol{I}$ possède un majorant vérifiant $k \succ i$ et $k \succ j$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Évident, le filtre des sections de f_* dans Y^X et le filtre des sections de f_* dans H ayant une base commune. □

Exemple D.2.4. Soit Φ un filtre sur un ensemble H d'applications d'un espace topologique X dans un espace uniforme Y. Ce filtre ordonné par « $A \succ B$ si $A \subset B$ » est un ensemble filtré. Si Φ converge localement vers f au point a, alors toute suite généralisée $f_* = (f_A)_{A\in\Phi}$ vérifiant $f_A \in A$ pour tout $A \in \Phi$ converge localement vers f au point a.

Démonstration. Tout élément A de Φ contient la section $\{f_B \mid B \subset A\}$ de la suite f_*, donc le filtre des sections de f_* dans H est plus fin que Φ. Si Φ converge localement vers f au point a, il en résulte [Proposition **I.4.3**] que le filtre des sections de f_* dans H converge localement vers f au point a, donc que la suite f_* converge localement vers f au point a [Proposition **D.2.3**]. □

La définition **D.2.2** entraîne que la connaissance des filtres convergeant localement en un point détermine entièrement les suites généralisées convergeant localement en ce point. Pour établir que la convergence locale des filtres et celle des suites généralisées donnent la même théorie de convergence sur les espaces d'applications considérés, nous allons montrer que, réciproquement, à tout filtre il est associé une suite généralisée dont la convergence locale en un point est équivalente à la convergence locale du filtre en ce point.

Définition D.2.5. *Soit Φ un filtre sur un ensemble E. L'ensemble*

$$\boldsymbol{I}_\Phi = \{(u, A) \in E \times \Phi \mid u \in A\},$$

préordonné par « $(v, B) \succ (u, A)$ si $B \subset A$ » est un ensemble filtré puisque, quels que soient (u, A) et (v, B) dans $\boldsymbol{I}_\Phi$, on a $A \cap B$ et, si w est un élément quelconque de $A \cap B$, $(w, A \cap B)$ est un élément de $\boldsymbol{I}_\Phi$ qui majore (u, A) et (v, B). On appelle suite généralisée associée au filtre Φ, *et on note ξ_Φ, la suite généralisée $(\xi_{(u,A)})_{(u,A)\in\boldsymbol{I}_\Phi}$ définie par $\xi_{(u,A)} = u$.*

Proposition D.2.6. (**[Kelley, 1955]**). *Un filtre Φ sur un ensemble E coïncide avec le filtre des sections de la suite généralisée ξ_Φ qui lui est associée.*

Démonstration. Quel que soit $A \in \Phi$ et quel que soit $u \in A$, la section finissante $S_{(u,A)}$ de ξ_Φ définie par $(u, A) \in \boldsymbol{I}_\Phi$ coïncide avec l'élément A de Φ. En effet, cette section est l'ensemble des $v = \xi_{(v,B)}$ avec $(v, B) \succ (u, A)$: on a $v \in B$ et $B \subset A$, donc $S_{(u,A)} \subset A$ et, réciproquement, en prenant $(v, B) = (u, A)$, il vient que l'on a $A \subset S_{(u,A)}$. Le filtre Φ est donc une base de filtre des sections de ξ_Φ, ce qui entraîne qu'il coïncide avec ce filtre. □

Le lemme **D.2.1** et cette proposition entraînent que, sur un espace topologique, la convergence des suites généralisées et la convergence des filtres définissent la même théorie de convergence. Il en va de même pour la convergence locale :

Théorème D.2.7. *Un filtre Φ sur un ensemble H d'applications d'un espace topologique dans un espace uniforme converge localement vers $f \in H$ au point a si et seulement si la suite généralisée ξ_Φ converge localement vers f au point a.*

Démonstration. La suite généralisée ξ_Φ converge localement vers $f \in H$ au point a si et seulement si le filtre des sections de ξ_Φ dans H converge localement vers f au point a [Proposition **D.2.3**], donc, ce filtre coïncidant avec Φ [Proposition **D.2.6**], si et seulement si Φ converge localement vers f au point a. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

3. — Critères de convergence

La plupart des critères de convergence établis au paragraphe **2.3**, se transcrivent aisément en termes de suites généralisées en les appliquant au filtre des sections d'une telle suite. Cette démarche est l'extension naturelle de ce qui a déjà été fait au chapitre **2** pour les suites ordinaires. Par exemple, le théorème **II.3.1.u** (critère de Cauchy) et le théorème **II.3.4.u** (convergence continue) donnent respectivement :

Théorème D.3.1. *Soit $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ une suite généralisée d'applications d'un espace topologique dans un espace uniforme. Une condition nécessaire pour que $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ converge localement vers f au point a est qu'elle vérifie la condition de Cauchy locale suivante : pour tout entourage $\mathscr{U}$ de Y, il existe un voisinage V de a et un indice i_0 de $\boldsymbol{I}$ tels que l'on ait $(f_j(x), f_k(x)) \in \mathscr{U}$ pour $x \in V$, $j \succ i_0$ et $k \succ i_0$. En abrégé :*

$$\forall\, \mathscr{U} \in \mathscr{E}(Y), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists i_0 \in \boldsymbol{I}, \forall x \in V, \forall j \succ i_0, \forall k \succ i_0, (f_j(x), f_k(x)) \in \mathscr{U}\ .$$

Cette condition est suffisante si $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ converge simplement vers f sur un voisinage de a.

Théorème D.3.2. *Soit $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ une suite généralisée d'applications d'un espace topologique dans un espace uniforme. Si l'application f est continue au point a, une condition nécessaire et suffisante pour que $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ converge localement vers f au point a est que, pour tout entourage, il existe un voisinage V de a et un indice $i_0 \in \boldsymbol{I}$ tels que l'on ait $(f_j(x), f(a)) \in U$ pour $x \in V$ et $i \succ i_0$. En abrégé :*

$$\forall \mathscr{U} \in \mathscr{E}(Y), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists i_0 \in \boldsymbol{I}, \forall x \in V, \forall i \succ i_0, (f_j(x), f(a)) \in \mathscr{U}\ .$$

Cette opération de traduction doit toujours être menée avec prudence. Un exemple est donné par le théorème **II.3.6.u** et son corollaire **II.3.7.u** [Remarque **II.3.10**]. Le théorème se traduit sans difficulté (*cf. infra*, Théorème **D.3.3**) mais le corollaire n'a pas d'équivalent : pour démontrer la continuité uniforme au point a des applications de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on s'est servi du fait que le complémentaire d'une section était un ensemble fini, ce qui n'est pas vrai en général.

Théorème D.3.3. *Soit $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ une suite généralisée d'applications d'un espace topologique dans un espace uniforme, continues en un point a. Une condition nécessaire pour que $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ converge localement vers f au point a est que $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ vérifie la condition $(\boldsymbol{E}_a)$ suivante : pour tout entourage $\mathscr{U}$, il existe un voisinage V de a et un indice $i_0 \in \boldsymbol{I}$ tels qu'on ait $(f_i(x), f_i(a)) \in \mathscr{U}$ pour $x \in V$ et $i \succ i_0$. En abrégé :*

$$\forall \mathscr{U} \in \mathscr{E}(Y), \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists i_0 \in \boldsymbol{I}, \forall x \in V, \forall i \succ i_0, (f_i(x), f_i(a)) \in \mathscr{U}\ .$$

Cette condition est suffisante si $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ converge simplement vers f au voisinage de a.

Démonstration. La continuité au point a des applications f_i assure que tout élément du filtre des sections de $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ contient au moins une application continue au point a. On applique le théorème **II.3.4.u** à ce filtre. □

Deux critères de convergence [Théorèmes **II.3.9.u** et **II.3.11**] ne sont exprimés que pour les suites ordinaires parce que

– d'une part, l'expression des conditions n'est pas naturelle dans le langage des filtres,

– d'autre part, une théorie de la convergence locale des suites généralisées n'ayant pas été développée, le recours aux suites (ordinaires) est un choix par défaut.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

L'expression de ces critères dans le langage des suites généralisées en étend considérablement le domaine d'application.
Le cas le plus simple est celui du théorème **II.3.11** (théorème de Dini) : de même que la convergence uniforme sur tout compact est, dans la version classique du théorème, un choix par défaut, de même la restriction aux suites indexées par $\mathbb{N}$ est un choix par défaut, résultant de l'absence de traduction simple dans le langage des filtres de l'hypothèse de décroissance de la suite de fonctions $d_Y(f_n, f)$. Dans la démonstration du théorème **II.3.11**, il suffit de substituer $\boldsymbol{I}$ à $\mathbb{N}$ pour démontrer l'extension suivante du théorème :

Théorème D.3.4. (**Théorème de Dini local**). *Soit $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ une suite généralisée d'applications d'un espace topologique dans un espace métrique. Si*

- *la suite $(f_i)(a)_{i\in\boldsymbol{I}}$ converge vers $f(a)$,*
- *sur un voisinage V_0 de a, la suite généralisée des fonctions numériques $d_Y(f_i, f)$ est décroissante,*
- *les applications f_i et f sont continues au point a,*

alors la suite $(f_i)_{i\in\boldsymbol{I}}$ converge localement vers f au point a.

Le cas du théorème **II.3.9** est plus complexe. Même si historiquement ce n'est pas ainsi que la théorie de la convergence continue s'est développée, ce théorème peut être considéré comme une réponse partielle au problème suivant :

> « Un filtre Φ converge continûment vers f au point a si le filtre image par l'application d'évaluation du produit de Φ avec le filtre des voisinages de a est un filtre convergeant vers $f(a)$ [Définition **I.3.1**]. Peut-on caractériser de manière analogue la convergence continue vers f au point a d'une suite (f_n) par la convergence vers a de l'image des suites convergeant vers a par les applications f_n ? »

La limitation aux suites ordinaires, indexées par $\mathbb{N}$, introduit des contraintes considérables :
– Les suites convergentes ordinaires étant insuffisantes pour rendre compte de la topologie de l'espace source, il est a priori improbable qu'elles soient suffisantes pour caractériser la convergence de la suite (f_n) ; ceci explique la distinction, dans le théorème **II.3.9** d'une condition nécessaire, valide quel que soit l'espace source, et d'une condition suffisante énoncée sous réserve que le point a ait un système fondamental dénombrable de voisinages.
– L'image par la suite (f_n) d'une suite (ordinaire) (x_n) est une suite généralisée $\big(f_p(x_q)\big)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; le recours, dans le théorème **II.3.9**, à la suite diagonale $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ permet une formulation conforme à la norme des suites ordinaires, mais introduit, dans la démonstration de la condition suffisante, une réindexation que seules les propriétés très particulières de $\mathbb{N}$ rendent possible.
L'utilisation des suites généralisées lève ces difficultés :
– Les suites généralisées convergentes sont suffisantes pour caractériser la convergence sur un espace topologique ; il n'y a donc pas besoin de se restreindre à des espaces particuliers.
– Il n'est pas plus exotique de considérer la suite généralisée $\big(f_i(x_j)\big)_{(i,j)\in\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{J}}$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

que les suites généralisées $(f_i)_{i\in I}$ et $(x_j)_{j\in J}$; il n'y a donc plus de raison pour introduire a priori une « suite diagonale », qu'il est difficile de concevoir lorsque les ensembles d'indices I et J sont différents, et pour laquelle, quand ces ensembles d'indices sont égaux, on ne peut en général pas faire la réindexation conduisant à la condition suffisante du théorème **II.3.9**. Compte tenu de ces remarques, on peut énoncer [Théorème **D.3.5**] une condition nécessaire et suffisante, valable dans le cas général mais non conforme à l'esprit du théorème **II.3.9**, et étendre au cas général [Corollaire **D.3.6**] la condition nécessaire de ce théorème :

Théorème D.3.5. *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite généralisée d'applications d'un espace topologique X dans un espace uniforme Y. Si f est continue au point a, une condition nécessaire et suffisante pour que $(f_i)_{i\in I}$ converge localement vers f au point a est que, quelle que soit la suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ convergeant vers a, la suite généralisée $\big(f_i(x_j)\big)_{(i,j)\in I\times J}$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. Condition nécessaire. L'application f étant continue au point a, la convergence locale de $(f_i)_{i\in I}$ vers f au point a est équivalente à la convergence continue de $(f_i)_{i\in I}$ vers f au point a [Théorème **D.3.2**]. Quel que soit l'entourage $\mathscr{U}$ de Y, il existe donc un voisinage V de a et un indice $i_0 \in I$ tels qu'on ait $(f(x_i), f(a)) \in \mathscr{U}$ pour $x \in V$ et $i \succ i_0$.
La suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ convergeant vers a, il existe $j_0 \in J$ tel qu'on ait $x_j \in V$ pour tout $j \succ j_0$.
Il en résulte qu'on a $(f_i(x_j), f(a)) \in \mathscr{U}$ pour tout $(i,j) \succ (i_0, j_0)$, ce qui démontre que la suite généralisée $\big(f_i(x_j)\big)_{(i,j)\in I\times J}$ converge vers $f(a)$.

Condition suffisante. La suite généralisée associée au filtre $\mathscr{V}_X(a)$ des voisinages de a est indexée par l'ensemble $J = \{(x,V) \mid V \in \mathscr{V}_X(a)\}$, préordonné par $(x,V) \succ (x',V')$ si $V \subset V'$, et est définie par $\xi_{x,V} = x$ [Définition **D.2.5**].
Le filtre des sections de cette suite coïncide avec le filtre $\mathscr{V}_X(a)$ [Proposition **D.2.6**], donc converge vers a, ce qui entraîne que $(\xi_{x,V})_{(x,V)\in J}$ converge vers a.
Alors, par hypothèse, la suite $(f_i(\xi_{x,V}))_{(i,(x,V))\in I\times J}$ converge vers $f(a)$, c'est-à-dire :

$$\forall \mathscr{U} \in \mathscr{E}(Y), \exists i_0 \in I, \exists (x_0, V_0) \in J, \forall i \succ i_0, \forall (x,V) \succ (x_0, V_0), (f_i(\xi_{x,V}), f(a)) \in \mathscr{U}.$$

On a $\xi_{x,V} = x$ et la condition $(x,V) \succ (x_0, V_0)$ impose seulement qu'on ait $x \in V_0$, donc

$$\forall \mathscr{U} \in \mathscr{E}(Y), \exists i_0 \in I, \exists V_0 \in \mathscr{V}_X(a), \forall i \succ i_0, \forall x \in V_0, (f_i(x), f(a)) \in \mathscr{U},$$

ce qui entraîne la convergence locale de $(f_i)_{i\in I}$ vers f au point a puisque f est continue au point a [Théorème **D.3.2**]. □

Corollaire D.3.6. *Si f est continue au point a, une condition nécessaire pour qu'une suite généralisée $(f_i)_{i\in I}$ converge localement vers f au point a est que, quelle que soit la suite $(x_i)_{i\in I}$ convergeant vers a, la suite $(f_i(x_i))_{i\in I}$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. Le théorème entraîne que la suite $(f_i(x_{i'}))_{(i,i')\in I\times I}$ converge vers $f(a)$: quel que soit le voisinage W de $f(a)$, il existe $(i_0, i'_0) \in I \times I$ tel que l'on ait $f_i(x_{i'}) \in W$ pour $i \succ i_0$ et $i' \succ i'_0$.
L'ensemble I étant filtré, il existe un majorant j_0 de i_0 et de i'_0.
On a donc $f_i(x_i) \in W$ pour $i \succ j_0$, ce qui démontre que $(f_i(x_i))_{i\in I}$ converge vers $f(a)$. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

4. — Propriétés de la limite d'une suite convergeant localement

La notion de suite généralisée et son utilisation dans les démonstrations sont implicites dans certains énoncés des chapitres précédents. C'est par exemple le cas des théorèmes **II.4.1.u**, **II.4.3** et **II.4.6** qui ont en commun une hypothèse du type suivant :

($\mathbf{H}_a$) « Tout élément du filtre Φ contient au moins une application vérifiant la propriété $(\mathbf{P}_a)$ »

ainsi qu'une conclusion analogue :

($\mathbf{C}_a$) « Si Φ converge localement vers f au point a, alors f vérifie $(\mathbf{P}_a)$ ».

Les hypothèses renvoient sans le dire, à un théorème correspondant pour les suites généralisées. En effet,

- supposer que dans tout $A \in \Phi$ il existe une application h_A vérifiant $(\mathbf{P}_a)$ entraîne qu'il existe une suite généralisée $(h_A)_{A\in\Phi}$ d'applications vérifiant $(\mathbf{P}_a)$;
- supposer que le filtre Φ converge localement vers f au point a, entraîne que cette suite converge localement vers f au point a [Exemple **D.2.4**].

Un théorème du type :

> « Si une suite généralisée de fonctions vérifiant $(\mathbf{P}_a)$ converge localement vers f au point a, alors f vérifie $(\mathbf{P}_a)$ ».

est donc suffisant pour conclure.

De fait, les démonstrations proposées pour les théorèmes **II.4.1**, **II.4.3** et **II.4.6** comportent à chaque fois deux arguments :

- une démonstration de **D.2.4** adaptée à la suite généralisée $(h_A)_{A\in\Phi}$;
- la démonstration de ce que f, limite locale de la suite généralisée $(h_A)_{A\in\Phi}$, vérifie $(\mathbf{P}_a)$.

Cette démarche est imposée, puisque, pour chaque $A \in \Phi$, l'hypothèse « vérifie la propriété $(\mathbf{P}_a)$ » n'est vérifiée que par certains éléments de A, éventuellement par un seul élément h_A : c'est cette information, portée en pratique par les seuls termes de la suite $(h_A)_{A\in\Phi}$, qui doit suffire pour démontrer que la limite vérifie $(\mathbf{P}_a)$.

On pourrait objecter que cette intrusion des suites généralisées est due à un choix malheureux de l'hypothèse $(\mathbf{H}_a)$ et qu'il serait peut-être possible de trouver une formulation et une démonstration de ces théorèmes ne relevant que de la théorie des filtres. Cela ne semble pas possible, en tout cas pas de manière évidente. Il serait en effet sans intérêt de considérer « un filtre d'applications vérifiant $(\mathbf{P}_a)$ » : l'ensemble sur lequel le filtre est défini étant un élément du filtre, cet ensemble serait un ensemble d'applications vérifiant $(\mathbf{P}_a)$ et la limite du filtre, qui en est un élément, vérifierait nécessairement $(\mathbf{P}_a)$, sans qu'il n'y ait rien à démontrer. Il serait plus intéressant de considérer « un filtre ayant une base formée d'applications vérifiant $(\mathbf{P}_a)$ », mais cette hypothèse n'a pour elle que d'être en conformité avec le langage des filtres : ce n'est en fait qu'une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que l'hypothèse $(\mathbf{H}_a)$ soit vérifiée, puisque tout élément de Φ contient un élément de cette base, donc au moins une application vérifiant $(\mathbf{P}_a)$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Le langage des filtres n'est donc ici qu'un habillage inutile, ne faisant qu'alourdir la démonstration. Les résultats fondamentaux sont ceux relatifs aux suites généralisées et les résultats relatifs aux filtres n'en sont que des corollaires. On a ainsi :

Théorème D.4.1. *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite généralisée d'applications d'un espace topologique dans un espace uniforme, continues au point a. Si $(f_i)_{i\in I}$ converge localement vers f, alors f est continue au point a.*

Corollaire D.4.2. (**Théorème II.4.1**). *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications d'un espace topologique dans un espace uniforme. Si tout $A \in \Phi$ contient au moins une application h_A continue au point a et si Φ converge localement vers f au point a, alors f est continue au point a.*

Théorème D.4.3. *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite généralisée d'applications à valeurs dans un espace métrique, localement bornées au point a. Si $(f_i)_{i\in I}$ converge localement vers f au point a, alors f est localement bornée au point a.*

Corollaire D.4.4. (**Théorème II.4.3**). *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications à valeurs dans un espace métrique. Si tout $A \in \Phi$ contient au moins une application h_A localement bornée au point a et si Φ converge localement au point a, alors f est localement bornée bornée au point a.*

Théorème D.4.5. *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite généralisée d'applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique, $\mathcal{T}$-bornées pour la convergence locale au point a. Si $(f_i)_{i\in I}$ converge localement vers f au point a, alors f est $\mathcal{T}$-bornée pour la convergence locale au point a.*

Corollaire D.4.6. (**Théorème II.4.6**). *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique. Si tout $A \in \Phi$ contient au moins une application h_A $\mathcal{T}$-bornée pour la convergence locale au point a et si Φ converge localement vers f au point a, alors f est $\mathcal{T}$-bornée pour la convergence locale au point a.*

Ces théorèmes peuvent être démontrés directement en adaptant les démonstrations des théorèmes **II.4.1**, **II.4.3** et **II.4.6**, mais ce sont aussi des corollaires de ces théorèmes : dans chaque cas, le filtre des sections de $(f_i)_{i\in I}$ vérifie en effet les conditions du théorème correspondant.

Pour ce qui est des corollaires **D.4.2**, **D.4.4** et **D.4.6**, un schéma de démonstration directe à partir des théorèmes **D.4.1**, **D.4.3** et **D.4.5** est le suivant : Si Φ converge localement vers f au point a, alors la suite généralisée $(h_A)_{A\in\Phi}$ converge localement vers f au pont a [Exemple **D.2.4**] ; on applique alors le théorème correspondant à cette suite.

Le théorème **II.4.9** donne des conditions pour que la limite locale d'un filtre en un point a soit différentiable en ce point. Il se prête à la même analyse : ce n'est qu'un corollaire d'un théorème général sur la différentiabilité de la limite d'une suite généralisée d'applications différentiables. Cependant, contrairement aux exemples précédents, son expression n'est pas aussi générale qu'on aurait pu le souhaiter : elle ne dit pas sous quelle(s) condition(s) la limite d'un filtre est différentiable en un point quand on sait seulement que, dans chaque élément du filtre, il y a au moins une application différentiable. La réponse

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

est simple : une condition suffisante est que la suite généralisée $(h_A)_{A\in\Phi}$ d'applications différentiables dont on suppose l'existence, vérifie les hypothèses du théorème de différentiabilité de la limite d'une suite généralisée d'applications différentiables [*cf.* Théorème **D.4.7**]. Mais ces hypothèses ne s'expriment pas naturellement dans le langage des filtres : l'hypothèse de convergence locale ne porte pas sur les applications, c'est-à-dire sur le filtre, mais sur les différentielles de ces applications ; si on ne connaît qu'une suite généralisée $(h_A)_{A\in\Phi}$ d'applications différentiables, on ne connaît aussi qu'une suite d'applications différentielles dont la convergence ne s'exprime naturellement que dans le langage des suites généralisées.

Théorème D.4.7. *Soit $f_i)_{i\in I}$ une suite généralisée d'applications différentiables définies sur un ouvert d'un espace normé, à valeurs dans un espace normé. Si $(f_i)_{i\in I}$ converge simplement vers f sur un voisinage de a et si la suite généralisée $(Df_i)_{i\in I}$ converge localement vers g au point a, alors $(f_i)_{i\in I}$ converge localement au point a, alors l'application f est différentiable au point a et $Df(a) = g(a)$.*

Ce théorème peut être démontré en adaptant la démonstration du théorème **II.4.9** ou en le considérant comme corollaire de ce théorème : le filtre des sections de $(f_i)_{i\in I}$ en vérifie les hypothèses.

Corollaire D.4.8. *Soit Φ un filtre sur un ensemble d'applications définies sur un ouvert d'un espace normé, à valeurs dans un espace normé. Si*

- *tout élément A de Φ contient au moins une application h_A différentiable au point a,*
- *Φ converge simplement vers f sur un voisinage de a*
- *la suite généralisée $(Dh_A)_{A\in\Phi}$ converge localement vers g au point a,*

alors l'application f est différentiable au point a et $Df(a) = g(a)$.

Démonstration. Si Φ converge simplement vers f au voisinage de a, alors la suite généralisée $(h_A)_{A\in\Phi}$ converge simplement vers f au voisinage du point a : en effet, si Φ converge simplement vers f au point b, quel que soit le voisinage W de $f(b)$, il existe $A \in \Phi$ tel que $h(b) \in W$ pour tout $h \in A$, donc en particulier, $h_B(b) \in W$ pour tout $B \subset A$, c'est-à-dire pour tout $B \succ A$. On applique alors le théorème **D.4.7** à cette suite. □

Remarque. Les hypothèses sont insuffisantes ici pour démontrer que Φ converge localement vers f au point a. Ce résultat fait l'intérêt propre du théorème **II.4.9**.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Approximations dans le cas vectoriel

L'extension de la théorie des suites d'opérateurs approximantes [Chapitres V à VII] à des suites d'opérateurs sur un espace d'applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique E relève soit d'une démarche entièrement différente, faisant l'économie des propriétés de positivité, soit d'une restriction à des espaces E munis d'une relation d'ordre convenable.

Nous avons retenu ici la première approche et donnons dans cette annexe un théorème général [Théorème **E.1.2**], valable pour les applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique quelconque et qui, contrairement au théorème **V.1.9**, ne nécessite pas d'hypothèse de continuité sur les applications considérées. Ce théorème est illustré par deux exemples :

- l'approximation des applications à variation bornée de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach par les opérateurs de convolution associés à une approximation de l'unité [Exemple **E.1.5**], résultat qui généralise le théorème **VII.2.1** ;
- l'approximation des applications réglées de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach par une suite d'opérateurs à valeurs dans l'espace des fonctions en escalier [Exemple **E.1.6**], résultat sans équivalent parmi les applications du théorème **V.1.9**, puisqu'il permet d'établir la convergence locale de la suite $(L_n(h))$ en des points de discontinuité de h.

Pour retrouver les résultats des chapitres V et VI, nous caractérisons [Paragraphe **E.2**] une classe d'espaces vectoriels normés ordonnés pour lesquels nous établissons, comme corollaire du théorème **E.1.2**, un théorème de convergence [Théorème **E.2.7**] qui étend le théorème **V.1.9**.

1. — Approximation locale d'une application à valeurs vectorielles

Les théorèmes de Korovkin et le théorème **V.1.9** font appel à deux types d'hypothèses que nous avons appelées conditions **C1** et **C2** dans le chapitre **5**. La condition **C1** est naturelle et s'étend sans difficultés à tout espace d'applications : un point a étant fixé, on suppose l'existence d'un sous-ensemble Φ de $H(X, \mathbb{R})$ tel que, pour tout $\varphi \in \Phi$, la suite $(L_n(\varphi))$ converge localement vers φ au point a.
La condition **C2** est plus mystérieuse : c'est la positivité des opérateurs pour les théorèmes de Korovkin et la semi-positivité de la suite (L_n) pour le théorème **V.1.9**, toutes conditions dont le rapport avec la convergence des suites $(L_n(h))$ n'est, a priori, pas évident.

La démonstration du théorème **V.1.9**, c'est-à-dire la démonstration de la convergence locale de $(L_n(h))$ vers h au point a pour toute application

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

$h \in H_a(X, \mathbb{R})$, se fait en deux étapes, utilisant successivement les conditions **C1** et **C2** :

- on construit, grâce à **C1**, une application φ localement équivalente à h au point a [Définition **I.1.6**] et telle que la suite $(L_n(\varphi))$ converge localement vers φ au point a ;
- on établit, grâce à **C2**, que la suite $(L_n(h-\varphi))$ converge localement vers 0 au point a, ce qui permet de conclure.

Sachant que φ est localement équivalente à h au point a si et seulement si $h-\varphi$ est continue au point a et nulle en ce point, il apparaît que **C2** n'a servi qu'à démontrer la propriété suivante : pour toute application $\vartheta \in H(X, \mathbb{R})$ continue au point a et nulle en ce point, la suite $(L_n(\vartheta))$ converge localement vers 0 au point a. Cette propriété permet de conclure et elle est, par ailleurs, clairement nécessaire pour que la suite (L_n) soit approximante au point a. Rien ne s'oppose donc à ce qu'on la substitue à la semi-positivité comme condition **C2**.

En général, cette substitution n'est pas souhaitable dans le théorème **V.1.9**, la nouvelle condition étant, a priori, plus difficile à établir que ne le sont la positivité des opérateurs ou la semi-positivité de la suite d'opérateurs. Par contre, cette condition présente un avantage déterminant pour la théorie de l'approximation des applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique quelconque : elle ne suppose pas l'existence d'une relation d'ordre et elle s'étend donc sans difficulté à tout espace d'applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique quelconque. Nous la retiendrons donc comme condition **C2** dans ce cas :

Définition E.1.1. *Soit X un espace topologique, a un point de X et soit $H(X, E)$ un espace vectoriel d'applications de X dans un espace vectoriel topologique E. On dit qu'une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X, E)$ est* semi-approximante au point *a si, pour toute application $h \in H(X, E)$ continue au point a et nulle en ce point, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers 0 au point a.*

Théorème E.1.2. *Soient X un espace topologique, a un point de X, $H(X, E)$ un espace vectoriel d'applications de X dans un espace vectoriel topologique E, et Φ un sous-espace vectoriel de $H(X, E)$; on note $H_{a,\Phi}(X, E)$ le sous-espace de $H(X, E)$ des applications localement équivalentes au point a à une application $\varphi \in \Phi$* [39].
Étant donné une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X, E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *La suite (L_n) est semi-approximante au point a et, quelle que soit l'application $\varphi \in \Phi$, la suite $(L_n(\varphi))$ converge vers φ au point a.*

(ii) *Quelle que soit l'application $h \in H_{a,\Phi}(X, E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii).
Soit $h \in H_{a,\Phi}(X, E)$ fixé. Il existe une application $\varphi \in \Phi$ telle que h et φ soient localement équivalentes au point a, donc telle que $h-\varphi$ soit continue au point a et nulle en ce point. La suite (L_n) étant semi-approximante au point a, la suite $(L_n(h-\varphi))$ converge localement vers 0 au point a. Par hypothèse, la suite $(L_n(\varphi))$ converge localement vers φ au point a, donc la suite $(L_n(h))$ de terme général

(39) [Définition **I.1.6.v**]

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

$L_n(h-\varphi)+L_n(\varphi)$ converge localement vers φ au point a. Les applications h et φ étant localement équivalentes au point a, il en résulte que la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a [Proposition **I.1.7.v**].

(ii) ⇒ (i).

a) Toute application $h \in H(X,E)$ continue au point a et nulle en ce point est localement équivalente au point a à l'application nulle. L'application nulle appartenant à Φ, il en résulte que h appartient à $H_{a,\Phi}(X,E)$ et **(ii)** entraîne alors que la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a, donc converge localement vers 0 au point a puisque h est localement équivalente à l'application nulle en ce point.

b) Toute application $\varphi \in \Phi$ appartient à $H_{a,\Phi}(X,E)$, donc **(ii)** entraîne que la suite $(L_n(\varphi))$ converge localement vers φ au point a. □

Les notions d'espace de fonctions réelles localisable en un point et de suite d'opérateurs localisante en un point [Définition **V.1.8**], qui conduisaient à un théorème de convergence locale vers h en tout point de continuité de h, s'étendent naturellement aux espaces d'applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique quelconque :

Définition E.1.3. *Soient X un espace topologique, a un point de X et $H(X,E)$ un espace vectoriel d'applications de X dans un espace vectoriel topologique E ; on note $H_a(X,E)$ le sous-espace des applications continues au point a et appartenant à $H(X,E)$.*
1) *$H(X,E)$ est localisable au point a si, quel que soit $y \in E$, il existe une application $\varphi_{a,y} \in H_a(X,E)$ telle que $\varphi_{a,y}(a) = y$.*
2) *Si $H(X,E)$ est localisable au point a, une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,E)$ est* localisante au point *a si, quel que soit $y \in E$, la suite $\big(L_n(\varphi_{a,y})\big)$ converge localement vers $\varphi_{a,y}$ au point a.*

Remarque. Si $E = \mathbb{R}$, la définition **E.1.3** est équivalente à la définition **V.1.8** : on pose $\varphi_{a,y} = y\varphi_a$ avec $\varphi_a \in H_a(X,\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi_a(a) = 1$; quel que soit $y \in \mathbb{R}$, la suite $\big(L_n(\varphi_{a,y})\big) = (yL_n(\varphi_a))$ converge localement vers $\varphi_{a,y}$ au point a si et seulement si la suite $(L_n(\varphi_a))$ converge localement vers φ_a au point a.

Proposition E.1.4. *Soient X un espace topologique, a un point de X et $H(X,E)$ un espace vectoriel d'applications de X dans un espace vectoriel topologique E ; on note $H_a(X,E)$ le sous-espace des applications continues au point a et appartenant à $H(X,E)$.*
Si $H(X,E)$ est localisable au point a, étant donné une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X,E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *La suite (L_n) est semi-approximante au point a et elle est localisante au point a.*

(ii) *Quelle que soit l'application $h \in H_a(X,E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.*

Démonstration. Soit Φ le sous-espace vectoriel de $H(X,E)$ engendré par les applications $\varphi_{a,y}$. Toute application $h \in H_{a,\Phi}(X,E)$ est localement équivalente au point a à une application $\varphi \in \Phi$, donc à une application continue au point a, ce qui entraîne que $h \in H_a(X,E)$. Réciproquement, toute application $h \in H_a(X,E)$ est localement équivalente au point a à l'application $\varphi_{a,h(a)}$, donc appartient à $H_{a,\Phi}(X,E)$. On a donc $H_{a,\Phi}(X,E) = H_a(X,E)$.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

(i)⇒ (ii).
Pour toute application $\varphi = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i \varphi_{a,y_i}$, on a $L_n(\varphi) = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i L_n(\varphi_{a,y_i})$; si (L_n) est localisante au point a, il en résulte que, pour toute application $\varphi \in \Phi$, la suite $(L_n(\varphi))$ converge localement vers φ au point a. Si (L_n) est semi-approximante au point a, le théorème **E.1.2** entraîne alors que, pour toute application h appartenant à $H_{a,\Phi}(X,E) = H_a(X,E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.
(ii)⇒ (i).
Si, pour toute application h appartenant à $H_{a,\Phi}(X,E) = H_a(X,E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a, en particulier la suite $(L_n(\varphi_{a,y}))$ converge localement vers $\varphi_{a,y}$ au point a, donc (L_n) est localisante au point a, et le théorème **E.1.2** entraîne que la suite (L_n) est semi-approximante au point a. □

Remarque. Cette proposition est l'extension au cas vectoriel du théorème **V.1.9** après substitution de la semi-approximation à la semi-positivité.

Exemple E.1.5. *Soit (g_n) une approximation de l'unité* [Définition **VII.1.1**], *soit $VB(\mathbb{R},E)$ l'espace des applications à variation bornée de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, et soit (L_n) la suite des opérateurs de convolution définis sur $VB(\mathbb{R},E)$ par*

$$L_n(h,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ h(x-t)\ dt\ .$$

Quelle que soit l'application $h \in VB(\mathbb{R},E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de continuité de h.

Remarque. L'intégrale utilisée ici est l'intégrale de Bochner [40]. On justifie que, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, l'application

$$k_{n,x} : t \mapsto g_n(t)\ h(x-t)$$

est intégrable grâce au théorème de Bochner : l'application

$$t \mapsto \|k_{n,x}(t)\| = |g_n(t)|\ \|h(x-t)\|$$

est intégrable (évident puisque $g_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et que $t \mapsto \|h(x-t)\|$ est à variation bornée) et $k_{n,x}$ est fortement mesurable d'après le théorème de Pettis, puisque $k_{n,x}$ est faiblement mesurable (*i.e.* $\xi \circ k_{n,x}$ est mesurable quelle que soit la forme linéaire continue ξ) et d'image séparable, l'application h étant réglée.

Démonstration. On montre que les hypothèses de la proposition **E.1.4** sont vérifiées.
a) $VB(\mathbb{R},E)$ contient les applications constantes, donc est localisable en tout point.
b) Quel que soit $y \in E$, l'image par L_n de l'application constante de valeur y est l'application constante de valeur $\gamma_n y$, où γ_n est l'intégrale de g_n sur $\mathbb{R}$. on a $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 1$, donc la suite $(L_n(y))$ converge uniformément vers y : la suite (L_n) est donc localisante en tout point.
c) Les évaluations faites dans la démonstration du théorème **VII.2.1** reposent sur la décomposition d'une fonction réelle, à variation bornée, en la somme de deux fonctions monotones, cette décomposition permettant d'utiliser le deuxième théorème de la moyenne. On ne peut évidemment pas étendre directement cette technique aux applications à valeurs dans un espace vectoriel normé, mais on peut l'utiliser

(40) Qui étend la définition de l'intégrale de Lebesgue aux applications à valeurs dans un espace de Banach comme limite d'intégrales d'applications en escalier.

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

pour les fonctions réelles $\xi \circ h$, où ξ est une forme linéaire continue et trouver ainsi des estimations cohérentes de

$$\xi\left(L_n(h;x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ \ \xi \circ h(x-t)\ dt$$

qui conduisent à une évaluation de $\|L_n(h;x)\|$.

Étant donné une application f à variation bornée, à valeurs réelles ou vectorielles, on note $V_f(x)$ sa variation totale sur $]-\infty, x]$ et $V(f) = \lim\limits_{x\to+\infty} V_f(x)$ sa variation totale sur $\mathbb{R}$. La fonction V_f est continue à gauche et a une limite à droite en tout point. (41)

Soit h une application appartenant à $VB(\mathbb{R}, E)$. Pour toute forme linéaire continue ξ sur E, de norme 1, la fonction réelle $\xi \circ h$ est à variation bornée puisque l'on a

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi \circ h(t_i) - \xi \circ h(t_{i-1})| \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \|h(t_i) - h(t_{i-1})\|$$

pour toute famille finie de points vérifiant $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, donc

$$V(\xi \circ h) \leqslant V(h). \tag{0}$$

Plus précisément, en se limitant aux familles vérifiant $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant x$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$V_{\xi\circ h}(x) \leqslant V_h(x)\ ; \tag{1}$$

en se limitant aux familles vérifiant

$$x \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant y \quad (\text{resp. } y \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant x),$$

on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|V_{\xi\circ h}(y) - V_{\xi\circ h}(x)\right| \leqslant \left|V_h(y) - V_h(x)\right|, \tag{2}$$

et, par un passage à la limite à droite, on obtient, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|V_{\xi\circ h}(y) - V^+_{\xi\circ h}(x)\right| \leqslant \left|V_h(y) - V^+_h(x)\right|. \tag{3}$$

Classiquement, la décomposition d'une fonction réelle f, à variation bornée en la somme de deux fonctions monotones est donnée par $f = V_f + (f - V_f)$, la fonction V_f étant croissante et la fonction $V - V_f$ étant décroissante.

Un point $a \in \mathbb{R}$ étant fixé, on définit deux nouvelles fonctions monotones f_c croissante et f_d décroissante, continues au point a, par

$$f_c(x) = \begin{cases} V_f(x) & \text{si} \quad x \leqslant a \\ V_f(x) + V_f(a) - V^+_f(a) & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

et

$$f_d(x) = \begin{cases} f(x) - V_f(x) & \text{si} \quad x \leqslant a \\ \big(f(x) - V_f(x)\big) + \big(f(a) - V_f(a)\big) - \big(f^+(a) - V^+_f(a)\big) & \text{si} \quad x > a. \end{cases}$$

Si f est continue au point a, on a $f(a) = f^+(a)$, donc

$$f_c(x) + f_d(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \leqslant a \\ f(x) + f(a) - f^+(a) = f(x) & \text{si} \quad x > a. \end{cases}$$

(41) Les démonstrations classiques pour les fonctions réelles à variation bornée [*cf.* Rudin, 1966, Real and Complex Analysis] s'étendent sans difficulté aux applications à variation bornée fortement mesurables à valeurs dans un espace de Banach.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Les fonctions f_c et f_d donnent donc une décomposition de f en la somme de deux fonctions monotones, continues au point a et bornées sur $\mathbb{R}$ puisque l'on a

$$\|f_c\|_\infty \leqslant 3\ V(f) \quad \text{et} \quad \|f_d\|_\infty \leqslant 3\,(\|f\|_\infty + V(f))\,. \tag{4}$$

Étant donné une application $h \in VB_a(\mathbb{R}, E)$ et une forme linéaire continue ξ de norme 1, on utilise ce type de décomposition pour $\xi \circ h$. Les majorations (0) et (4) entraînent que l'on a

$$\begin{aligned} \|(\xi\circ h)_c\|_\infty &\leqslant 3\ V(\xi\circ h) \leqslant 3\ V(h) \\ \text{et}\quad \|(\xi\circ h)_d\|_\infty &\leqslant 3\,(\|\xi\circ h\|_\infty + V(\xi\circ h)) \leqslant 3\,(\|h\|_\infty + V(h))\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Les majorations (2) et (3) entraînent que les modules de continuité de $(\xi \circ h)_c$ et de $(\xi \circ h)_d$ au point a sont reliés au module de continuité de h et au comportement de V_h au point a de la manière suivante :

$$|(\xi\circ h)_c(x) - (\xi\circ h)_c(a)| = \begin{cases} \left|V_{\xi\circ h}(x) - V_{\xi\circ h}(a)\right| \leqslant |V_h(x) - V_h(a)| & \text{si } x \leqslant a \\ \left|V_{\xi\circ h}(x) - V^+_{\xi\circ h}(a)\right| \leqslant \left|V_h(x) - V_h^+(a)\right| & \text{si } x > a \end{cases}$$

et

$$|(\xi\circ h)_d(x) - (\xi\circ h)_d(a)| = \begin{cases} \left|\xi\circ h(x) - V_{\xi\circ h}(x) - \xi\circ h(a) + V_{\xi\circ h}(a)\right| \\ \quad \leqslant \|h(x) - h(a)\| + |V_h(x) - V_h(a)| & \text{si } x \leqslant a \\ \left|\xi\circ h(x) - V_{\xi\circ h}(x) - \xi\circ h(a) + V^+_{\xi\circ h}(a)\right| \\ \quad \leqslant \|h(x) - h(a)\| + \left|V_h(x) - V_h^+(a)\right| & \text{si } x > a. \end{cases}$$

L'application h étant continue au point a, l'application V_h étant continue à gauche et l'application V_h^+ étant continue à droite, il en résulte que, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour toute forme linéaire continue ξ de norme 1 et pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|s-a| \leqslant 2\alpha$ et $|t-a| \leqslant 2\alpha$, on ait

$$|(\xi\circ h)_c(s) - (\xi\circ h)_c(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |(\xi\circ h)_d(s) - (\xi\circ h)_d(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

On peut alors reprendre, pour les applications monotones $(\xi \circ h)_c$ et $(\xi \circ h)_d$, la minoration (5) établie en **2.1**) dans la démonstration du théorème **VII.2.1** : étant donné $\alpha_0 > 0$ tel que $|G_n(x,y)| \leqslant A$ pour $|x| \leqslant \alpha_0$ et $|y| \leqslant \alpha_0$, compte tenu de (5) et (6), pour tout β vérifiant $0 \leqslant \beta \leqslant \min\{\alpha, \alpha_0\}$, il existe un entier N, ne dépendant que de l'approximation de l'unité (g_n), de l'application h et de ε, tel que, pour toute forme linéaire continue ξ de norme 1, pour tout $n \geqslant N$ et tout x vérifiant $|x-a| \leqslant \beta$, on ait

$$\begin{aligned} L_n\left((\xi\circ h)_c; x\right) &\geqslant -12\ V(h)\ \varepsilon - A\varepsilon + (\xi\circ h)_c^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta) \\ L_n\left((\xi\circ h)_d; x\right) &\geqslant -12\,(\|h\|_\infty + V(h))\,\varepsilon - A\varepsilon + (\xi\circ h)_d^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta). \end{aligned}$$

En posant $B = \|h\|_\infty + 2V(h)$, en remarquant que

$$(\xi\circ h)_c^+ + ((\xi\circ h)_d^+ = (\xi\circ h_c + \xi\circ h_d)^+ = (\xi\circ(h_c+h_d))^+ = (\xi\circ h)^+$$

(puisque ξ est linéaire et h est continue en a), on obtient

$$\xi\left(L_n(h;x)\right) = L_n(\xi\circ h; x) \geqslant -12\ B\varepsilon - 2A\varepsilon + (\xi\circ h)^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta). \tag{7}$$

Enfin, si on fait l'hypothèse supplémentaire que h est nulle au point a, la continuité de h en a entraîne qu'on peut prendre β assez petit pour que l'on ait $\|h(s)\| \leqslant \varepsilon$ pour $s \in]a-2\beta, a+2\beta[= I_\beta$ et on a alors, pour tout x tel que $|x-a| \leqslant \beta$,

$$\left|(\xi\circ h)^+(x-\beta)\ G_n(-\beta,\beta)\right| \leqslant \sup_{s\in I_\beta} |\xi\circ h)(s)|\ A \leqslant \sup_{s\in I_\beta} \|h(s)\|\ A \leqslant \varepsilon A.$$

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

La minoration (7) entraîne

$$\xi\left(L_n(h;x)\right) \geqslant -12\ B\ \varepsilon\ -\ 3A\varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant N \text{ et } |x-a| \leqslant \beta. \tag{8}$$

L'application $-h$ vérifie les mêmes hypothèses que h, elle a le même module de continuité au point a et on a $V(-h) = V(h)$. On a donc

$$-\xi\left(L_n(h;x)\right) = \xi\left(L_n(-h;x)\right) \geqslant -12B\varepsilon - 3A\varepsilon \ \text{ pour } n \geqslant N \text{ et } |x-a| \leqslant \beta. \tag{9}$$

Les relations (8) et (9) entraînent alors que

$$|\xi\left(L_n(h;x)\right)| \leqslant 12B\varepsilon + 3A\varepsilon \ \text{ pour } n \geqslant N \text{ et } |x-a| \leqslant \beta \tag{10}$$

pour toute forme linéaire continue de norme 1. Une proposition [42] découlant du théorème de Hahn-Banach, appliquée en chaque élément $L_n(h;x)$, entraîne que

$$\|L_n(h;x)\| \leqslant 12\ B\varepsilon + 3\varepsilon \ \text{ pour } n \geqslant N \text{ et } |x-a| \leqslant \beta,$$

ce qui démontre ainsi que $(L_n(h))$ converge localement vers 0 au point a. □

Non seulement le théorème **E.1.2** permet d'étendre au cas vectoriel le théorème de convergence locale en tout point de continuité d'une fonction h, ainsi que nous venons de le voir, mais il permet aussi dans certains cas de lever cette hypothèse de continuité qui paraît autrement incontournable [Exemple **V.2.1**] :

Exemple E.1.6. *Soit $Rég(\mathbb{R}, E)$ l'espace des applications réglées, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach E. À toute application $h \in Rég(\mathbb{R}, E)$, on associe l'application h^+ définie sur $\mathbb{R}$ par $h^+(x) = \lim_{t \to x^+} h(t)$.*
Pour toute partie finie A contenant q_A éléments a_p $(1 \leqslant p \leqslant q_A)$ de $\mathbb{R}$ rangés par ordre croissant et pour toute application $h \in Rég(\mathbb{R}, E)$, on définit sur $\mathbb{R}$ une fonction en escalier h_A de la manière suivante :

$$h_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a_1 \\ h^+(a_p) & \text{si} \quad a_p \leqslant x < a_{p+1} \text{ et } 1 \leqslant p \leqslant q_A - 1 \\ h^+(a_{q_A}) & \text{si} \quad a_{q_A} \leqslant x. \end{cases}$$

On désigne par $\boldsymbol{A}$ une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, réunion d'une suite croissante de parties finies A_n, et on associe à toute application $h \in Rég(\mathbb{R}, E)$ la suite des fonctions en escalier $L_n(h) = h_{A_n}$.
Si $\boldsymbol{A}$ est dense, pour toute application $h \in Rég(\mathbb{R}, E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h^+ en tout point de $\boldsymbol{A}$, que h soit continue ou non en ces points.

Démonstration. Pour n fixé, l'application L_n de $Rég(\mathbb{R}, E)$ dans $E^{\mathbb{R}}$ est un opérateur linéaire et, par construction, pour tout $h \in Rég(\mathbb{R}, E)$, on a $L_n(h) = L_n(h^+)$. Il suffit donc de ne considérer que le sous-espace $Rég^+(\mathbb{R}, E)$ des fonctions réglées vérifiant $h = h^+$ et de montrer que, en chaque point a de $\boldsymbol{A}$, la suite des restrictions L_n^+ des opérateurs L_n à $Rég^+(\mathbb{R}, E)$ vérifie les conditions **i)** du théorème **E.1.2** relativement à un sous-espace Φ_a tel que toute application $h \in Rég^+(\mathbb{R}, E)$ soit localement équivalente au point a à une application appartenant à Φ_a.

(42) *cf.* H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, chapitre 1, p. 1 à 4 ; W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, chapitre 3, p. 55 à 58 ; G. Choquet, *Cours de topologie*, p. 284.]

Proposition. *Étant donné un espace E normé sur $\mathbb{R}$, pour tout élément y de E, il existe une forme linéaire ξ continue de norme 1, telle que $\xi(y) = \|y\|$.*

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

a) Soit a un point de $\mathbb{R}$ et soit h une application appartenant à $Rég^+(\mathbb{R}, E)$, continue au point a et nulle en ce point. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $t \in [a-\alpha, a+\alpha]$, on ait $\|h(t)\| \leqslant \varepsilon$.
La partie $\boldsymbol{A}$ étant dense, il existe un point a' de $\boldsymbol{A}$ tel que l'on ait $a' \in [a-\alpha, a[$ et, la partie $\boldsymbol{A}$ étant réunion des parties A_n, il existe N tel que a' appartienne à A_N.
Pour tout $n \geqslant N$, les valeurs prises par h_{A_n} sur le voisinage $[a', a+\alpha]$ de a sont des valeurs prises par $h^+ = h$ sur $[a', a+\alpha]$, donc sont de norme inférieure à ε, ce qui démontre que $\big(L_n^+(h)\big)$ converge localement vers 0 au point a. La suite (L_n) est donc semi-approximante en tout point a de $\mathbb{R}$, a fortiori en tout point de $\boldsymbol{A}$.
b) Soit a un point de $\boldsymbol{A}$.
À $(y,z) \in E^2$ on associe l'élément $\varphi_{a,y,z}$ de $Rég^+(\mathbb{R}, E)$ défini par

$$\varphi_{a,y,z}(x) = \begin{cases} y & \text{si} \quad x < a \\ z & \text{si} \quad x \geqslant a\,. \end{cases}$$

La partie $\boldsymbol{A}$ étant dense, il existe un point a' de $\boldsymbol{A}$ tel que l'on ait $a' < a$; soit N tel que a et a' appartiennent à A_N. Quel que soit $n \geqslant N$, on a

$$L_n^+(\varphi_{a,y,z}; x) = \begin{cases} y & \text{si} \quad a' \leqslant x < a \\ z & \text{si} \quad x \geqslant a, \end{cases}$$

$L_n^+(\varphi_{a,y,z})$ coïncide donc avec $\varphi_{a,y,z}$ sur le voisinage $[a', +\infty[$ de a, ce qui démontre que la suite $\big(L_n^+(\varphi_{a,y,z})\big)$ converge localement vers $\varphi_{a,y,z}$ au point a.
Le sous-espace vectoriel

$$\Phi_a = \big\{\varphi_{a,y,z} \mid (y,z) \in E^2\big\}$$

est donc tel que, quelle que soit l'application $\varphi \in \Phi_a$, la suite $\big(L_n^+(\varphi)\big)$ converge localement vers φ au point a.
c) Une application quelconque $h \in Rég^+(\mathbb{R}, E)$ a une limite à gauche $h^-(a)$ et une limite à droite $h^+(a) = h(a)$ au point a ; elle est donc équivalente au point a à l'élément $\varphi_{a,h^-(a),h^+(a)}$ de Φ_a. □

Remarque. Puisque les applications constantes appartiennent à $Rég(\mathbb{R}, E)$, cet espace est localisable en tout point au sens de la définition **E.1.3** ; on vérifie aisément que la suite (L_n) est localisante en tout point. La suite (L_n) étant semi-approximante en tout point d'après **a)**, la proposition **E.1.4** entraîne que, quelle que soit l'application $h \in Rég(\mathbb{R}, E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de continuité de h.

Si l'ensemble des points de discontinuité de h, ensemble qui est au plus dénombrable, est contenu dans $\boldsymbol{A}$, alors la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h en tout point de $\mathbb{R} \setminus \boldsymbol{A}$ et localement vers h^+ en tout point de $\boldsymbol{A}$. Les applications h et h^+ étant localement équivalentes en tout point de continuité de h, la convergence locale vers h en ces points est équivalente à la convergence locale vers h^+ et on a donc : *si l'ensemble des points de discontinuité de h est contenu dans* $\boldsymbol{A}$, *la suite* $(L_n(h))$ *converge localement vers* h^+ *en tout point de* $\mathbb{R}$, *donc converge uniformément sur tout compact vers* h^+.

2. — Cas des espaces vectoriels normés ordonnés

Une relation d'ordre (partiel) sur E, compatible avec la structure d'espace vectoriel topologique, est définie par la donnée d'un cône convexe fermé E_+ de E, vérifiant $E_+ \cap -E_+ = \{0\}$: on a $y \leqslant z$ si et seulement si $z - y \in E_+$. En particulier, on a $z \in E_+$ si et seulement si $0 \leqslant z$, d'où le nom de *cône positif de* E donné à E_+. Cette relation d'ordre vérifie les propriétés suivantes :

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Compatibilité avec l'addition. Si $y \leqslant z$ et $y' \leqslant z'$, alors $y + y' \leqslant z + z'$; l'inégalité est donc invariante par translation : si $y \leqslant z$, alors $y + a \leqslant z + a$ pour tout $a \in E$.

Compatibilité avec le produit par un scalaire. Si $y \leqslant z$ et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (resp. $\lambda \in \mathbb{R}_-$), alors $\lambda y \leqslant \lambda z$ (resp. $\lambda z \leqslant \lambda y$).
En particulier, $y \leqslant z$ entraîne $-z \leqslant -y$.

Compatibilité avec la convergence. Si la suite (y_n) (resp. (z_n)) converge vers y (resp. z) et si $y_n \leqslant z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $y \leqslant z$.

Étant donné un tel espace vectoriel normé ordonné par un cône E_+, on appelle *cône positif dual*, et on note E'_+, l'ensemble des formes linéaires continues positives, c'est-à-dire des formes linéaires continues ξ telles que l'on ait $\xi(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E_+$; cet ensemble est un cône convexe fermé du dual topologique E' de E.

En analysant la démonstration du théorème **V.1.9** en termes de relation d'ordre, il apparaît que deux propriétés usuelles de l'ordre sur $\mathbb{R}$ sont utilisées :

- d'une part, la notion de stricte positivité, qui permet d'établir qu'une fonction continue et strictement positive en un point est positive au voisinage de ce point,
- d'autre part le lien entre la relation d'ordre et la topologie de $\mathbb{R}$.

Il est aisé d'étendre la première propriété aux espaces vectoriels ordonnés, la condition « $f(a)$ *est strictement positif* » étant, dans $\mathbb{R}$, équivalente à « $f(a)$ *est intérieur au cône positif* ». Si on prend cette deuxième formulation comme définition de la stricte positivité dans E, étant donné une application f à valeurs dans E, la continuité au point a entraîne que, si $f(a)$ est strictement positif (c'est-à-dire intérieur à E_+), alors f prend ses valeurs dans E_+ (c'est-à-dire est positive) au voisinage de a. Pour utiliser cette propriété, il faut évidemment que l'intérieur de E_+ soit non vide. Une hypothèse ad hoc est donc nécessaire :

Hypothèse de stricte positivité. *L'intérieur du cône positif de E est non vide.*

La deuxième propriété est moins facile à étendre, puisqu'elle tient, dans $\mathbb{R}$ à la confusion entre norme et valeur absolue : $\|y\| \leqslant \varepsilon$ signifie que $|y| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $-\varepsilon \leqslant y \leqslant \varepsilon$. Dans le cas vectoriel, on ne peut traduire ainsi la condition $\|y\| \leqslant \varepsilon$ puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre entre $y \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Pour lever la difficulté, il faudrait qu'un encadrement $-z \leqslant y \leqslant z$, avec y et z éléments de E, permette de comparer la norme de y à celle de z. C'est le cas si l'évaluation classique de la norme grâce aux formes linéaires continues [Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. IV, § 5, N° 2]

$$\forall y \in E, \|y\| = \sup_{\xi \in E' \setminus \{0\}} \frac{|\xi(y)|}{\|\xi\|}$$

peut être menée uniquement avec les formes linéaires continues positives sur E_+, celles-ci respectant la relation d'ordre. Une nouvelle hypothèse est donc nécessaire :

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Hypothèse de suffisance pour la norme du cône positif dual. *La norme définie sur E par*

$$\forall y \in E, |||y||| = \sup_{\xi \in E'_+ \setminus \{0\}} \frac{|\xi(y)|}{\|\xi\|}$$

est équivalente à la norme initiale.

Remarque. On a toujours $|||y||| \leqslant \|y\|$. Le cône positif dual est donc suffisant pour la norme si et seulement s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $y \in E$, $\|y\| \leqslant A\,|||y|||$.

Ainsi que prévu, l'hypothèse de suffisance pour la norme du cône positif dual permet de faire le lien entre la relation d'ordre et la topologie de E :

Proposition E.2.1. *Si le cône positif dual est suffisant pour la norme, il existe une constante $A > 0$ telle que tout encadrement $-z \leqslant y \leqslant z$ dans E entraîne que l'on a $\|y\| \leqslant A\,\|z\|$.*

Démonstration. Quelle que soit la forme linéaire positive ξ, on a $-\xi(z) \leqslant \xi(y) \leqslant \xi(z)$, c'est-à-dire $|\xi(y)| \leqslant |\xi(z)|$, donc

$$|||y||| = \sup_{\xi \in E'_+ \setminus \{0\}} \frac{|\xi(y)|}{\|\xi\|} \leqslant \sup_{\xi \in E'_+ \setminus \{0\}} \frac{|\xi(z)|}{\|\xi\|} = |||z|||\,.$$

L'hypothèse de suffisance pour la norme entraîne qu'il existe $A > 0$ tel que l'on ait $\|y\| \leqslant A\,|||y|||$; on a donc $\|y\| \leqslant A\,|||y||| \leqslant A\,|||z||| \leqslant A\,\|z\|$. □

Il peut être difficile de vérifier directement l'hypothèse de suffisance pour la norme du cône positif dual. Des conditions suffisantes plus faciles à mettre en œuvre sont données dans le lemme suivant et son corollaire :

Lemme E.2.2. *S'il existe une constante $C > 0$ telle que toute forme linéaire continue $\xi \in E'$ puisse s'écrire $\xi = \xi^+ - \xi^-$ où ξ^+ et ξ^- sont des éléments de E'_+ tels que $\|\xi^+\| \leqslant C\,\|\xi\|$ et $\|\xi^-\| \leqslant C\,\|\xi\|$, alors le cône positif dual est suffisant pour la norme.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que, pour tout y, on ait $\|y\| \leqslant A\,|||y|||$.
Pour un y_0 fixé, il existe une forme linéaire continue ξ_0 de norme 1 telle que $\xi_0(y_0) = \|y_0\|$ [proposition de la note de la page 159] ; par hypothèse, il existe $\xi_0^+ \in E'_+$ et $\xi_0^- \in E'_+$ tels que

$$\xi_0 = \xi_0^+ - \xi_0^-, \quad \|\xi_0^+\| \leqslant C\,\|\xi_0\| = C \text{ et } \|\xi_0^-\| \leqslant C\,\|\xi_0\| = C.$$

On a $\xi_0^+(y_0) - \xi_0^-(y_0) = \xi_0(y_0) = \|y_0\|$, ce qui entraîne que l'on a

$$\|\xi_0^-(y_0)\| \geqslant \frac{1}{2}\,\|y_0\| \quad \text{ou bien} \quad \|\xi_0^+(y_0)\| \geqslant \frac{1}{2}\,\|y_0\|\,,$$

puisqu'on aurait sinon

$$|\xi_0^+(y_0) - \xi_0^-(y_0)| \leqslant |\xi_0^+(y_0)| + |\xi_0^-(y_0)| < \|y_0\|\,,$$

ce qui est impossible. On a alors

$$|||y_0||| = \sup_{\xi \in E'_+ \setminus \{0\}} \frac{|\xi(y_0)|}{\|\xi\|} \geqslant \max\left\{ \frac{|\xi_0^+(y)|}{\|\xi_0^+\|}, \frac{|\xi_0^-(y_0)|}{\|\xi_0^-\|} \right\} \geqslant \frac{\frac{1}{2}\,\|y_0\|}{C}.$$

Ceci étant vrai pour tout y_0, il suffit de prendre $A = 2C$. □

Corollaire E.2.3. *Si E'_+ est d'intérieur non vide, alors le cône positif dual est suffisant pour la norme.*

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Démonstration. Soit ξ_0 une forme linéaire continue intérieure à E'_+ et soit $r_0 > 0$ tel que la boule fermée de centre ξ_0 et de rayon r_0 soit contenue dans E'_+. Quelle que soit la forme linéaire continue non nulle ξ, la forme $\xi_0 + \dfrac{r_0}{\|\xi\|}\xi$ appartient à cette boule, donc à E'_+ : les formes

$$\xi^+ = \frac{\|\xi\|}{r_0}\left(\xi_0 + \frac{r_0}{\|\xi\|}\xi\right) = \frac{\|\xi\|}{r_0}\xi_0 + \xi \quad \text{et} \quad \xi^- = \frac{\|\xi\|}{r_0}\xi_0$$

appartiennent donc à E'_+ et on a

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,\ \|\xi^+\| \leqslant C\,\|\xi\| \text{ et } \|\xi^-\| \leqslant C\,\|\xi\| \text{ avec } C = 1 + \frac{\|\xi_0\|}{r_0}\,.$$

La forme linéaire nulle ayant évidemment une même décomposition (on prend $\xi^+ = \xi^- = 0$), le cône E'_+ vérifie les hypothèses du lemme **E.2.2**, donc le cône positif dual est suffisant pour la norme. □

Exemple E.2.4. *Soit $E = B(X)$ l'espace des fonctions réelles bornées définies sur un ensemble X, muni de la norme $\|h\|_\infty = \sup_{x\in X} |h(x)|$ et de la relation d'ordre définie par le cône $E_+ = B_+(X)$ des fonctions bornées positives. Cet espace vérifie l'hypothèse de stricte positivité et l'hypothèse de suffisance pour la norme du cône positif dual.*

Démonstration. a) La boule de rayon 1 et de centre la fonction constante de valeur 1 est contenue dans $B_+(X)$, donc l'intérieur du cône positif n'est pas vide.

b) Soit $vb(X)$ l'espace vectoriel des fonctions φ à valeurs réelles, définies sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X, vérifiant les deux propriétés suivantes :

- si A_1 et A_2 sont deux parties disjointes de X, on a
$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)\ ;$$
- les sommes $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\varphi(A_i)|$, où les parties A_i sont deux à deux disjointes, sont bornées.

La borne supérieure $V(\varphi)$ de ces sommes, la *variation totale de φ*, définit une norme sur $vb(X)$.

Le dual de $B(X)$ est isométrique à $vb(X)$ muni de cette norme [Hildebrandt, 1934 ; Fichtenholz & Kantorovitch, 1934] : à toute forme linéaire continue ξ sur $B(X)$, on associe l'application $\varphi_\xi \in vb(X)$ définie par $\varphi_\xi = \xi(\chi_A)$, où χ_A est la fonction caractéristique de A ; réciproquement, à toute fonction $\varphi \in vb(X)$, on associe la forme linéaire continue ξ_φ extension à $B(X)$ de la forme définie sur le sous-espace dense des fonctions en escalier par

$$\xi_\varphi\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i\,\chi_{A_i}\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i\,\varphi(A_i).$$

Dans cette isométrie, le cône positif dual correspond, dans $vb(X)$, au cône $vb_+(X)$ des applications positives.

Soit $\varphi \in vb(X)$. La fonction φ^+ définie sur $\mathscr{P}(X)$ par $\varphi^+(A) = \sup_{B\subset A} \varphi(B)$ est positive, puisque $\varnothing \subset A$ et que la propriété d'additivité entraîne que $\varphi(\varnothing) = 0$, et elle appartient à l'espace $vb(X)$:

- si A_1 et A_2 sont deux parties disjointes de X, toute partie $B \subset A_1 \cup A_2$ est réunion des parties disjointes $B_1 = B \cap A_1$ et $B_2 = B \cap A_2$, d'où
$$\begin{aligned}\varphi^+(A_1 \cup A_2) = \sup_{B\subset A_1\cup A_2} \varphi(B) &= \sup_{B_1\subset A_1} \varphi(B_1) + \sup_{B_2\subset A_2} \varphi(B_2)\\ &= \varphi^+(A_1) + \varphi^+(A_2)\ ;\end{aligned}$$

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

- étant donné un ensemble fini $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de parties deux à deux disjointes de X, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe des parties $B_i \subset A_i$ telles que l'on ait $|\varphi^+(A_i)| \leqslant |\varphi(B_i)| + \varepsilon/n$ pour tout i, d'où

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\varphi^+(A_i)| \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (|\varphi(B_i)| + \varepsilon/n) \leqslant V(\varphi) + \varepsilon\,;$$

la variation totale de φ^+ est donc bornée ; elle est majorée par $V(\varphi)$, puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $V(\varphi^+) \leqslant V(\varphi) + \varepsilon$.

La fonction $\varphi^- = \varphi^+ - \varphi$ appartient à l'espace vectoriel $vb(X)$, sa variation est majorée par $V(\varphi^+) + V(\varphi) + \leqslant 2V(\varphi)$ et elle est positive puisque, pour tout A, l'inclusion $A \subset A$ entraîne $\varphi^+(A) \geqslant \varphi(A)$.

On a évidemment $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$; on applique le lemme **E.2.2** avec $C = 2$. □

Remarque. En prenant X fini, on démontre ainsi que $E = \mathbb{R}^p$, ordonné par le « premier quadrant » $E_+ = \mathbb{R}^p_+$, vérifie l'hypothèse de stricte positivité et l'hypothèse de suffisance pour la norme du cône positif dual, a priori si $\mathbb{R}^p$ est muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i|$, en fait quelle que soit la norme sur $\mathbb{R}^p$ puisque ces normes sont équivalentes.

On aurait pu démontrer ce résultat particulier plus rapidement grâce au corollaire **E.2.3** : l'espace dual s'identifie à $\mathbb{R}^p$ et le cône dual au premier quadrant $\mathbb{R}^p_+$, dont l'intérieur est non vide.
Cette simplification est impossible si X est infini, par exemple pour $l^\infty = B(\mathbb{N})$, le cône positif dual étant, dans ce cas, d'intérieur vide. En effet, étant donné une suite (x_n) de points distincts de X, quelle que soit la fonction $\varphi \in vb(X)$, la série de terme général $\varphi(\{x_n\})$ est absolument convergente, puisque les sommes partielles $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\varphi(\{x_i\})|$ sont majorées par $V(\varphi)$; quel que soit $r > 0$, il existe donc un indice N tel que $|\varphi(\{x_N\})| \leqslant r/2$ et on a alors $(\varphi - r\,\delta_N)(\{x_N\}) \leqslant -r/2$ où δ_N est l'élément de $vb(X)$ représentant l'évaluation au point x_N sur $B(X)$; la fonction δ_N étant de norme 1 dans $vb(X)$, il en résulte que, quel que soit $r > 0$, la boule de centre φ et de rayon r n'est pas contenue dans le cône positif dual, donc que la fonction φ n'est pas intérieure à ce cône ; ceci étant démontré pour toute fonction $\varphi \in vb(X)$, l'intérieur du cône positif dual est vide.

Nous supposerons désormais que E est ordonné par un cône convexe fermé E_+ d'intérieur non vide et que le cône positif dual est suffisant pour la norme.

Définition E.2.5. *Soient X un espace topologique, $H(X, E)$ un espace vectoriel d'applications de X dans E et $H_a(X, E)$ le sous-espace des applications continues au point a. Une suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X, E)$ est dite semi-positive au point a s'il existe un point y_0 intérieur à E_+ tel que, pour toute application $h \in H_a(X, E)$ positive au voisinage du point a, la suite $(L_n(h))$ vérifie la propriété suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'ait $L_n(h; x) \geqslant -\varepsilon y_0$ pour $x \in V$ et $n \geqslant N$, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathscr{V}_X(a), \exists N, \forall x \in V, \forall n \geqslant N, L_n(h; x) \geqslant -\varepsilon y_0.$$

Remarque. Cette définition semble faire dépendre de y_0 la semi-positivité et il faudrait donc parler de « semi-positivité relativement à y_0 » ; ce n'est pas le cas. En effet, si y_1 est un autre point intérieur à E_+ et si la boule fermée de

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

centre y_1 et de rayon $r_1 > 0$ est contenue dans E_+, en posant $\lambda = r_1 / \|y_0\|$, on a $y_1 - \lambda y_0 \in E_+$, donc $y_0 \leqslant \frac{1}{\lambda} y_1$; si (L_n) est semi-positive au point a relativement à y_0, étant donné $h \in H_a(X, E)$ positive au voisinage du point a, il existe un voisinage V de a et un entier N tels que l'on ait $L_n(h; x) \geqslant -\varepsilon y_0$, donc $L_n(h; x) \geqslant -\frac{\varepsilon}{\lambda} y_1$, pour $x \in V$ et $n \geqslant N$, ce qui démontre que (L_n) est semi-positive au point a relativement à y_1.

Proposition E.2.6. *Soit (L_n) une suite d'opérateurs sur $H(X, E)$, semi-positive au point a. S'il existe une application $\varphi_0 \in H_a(X, E)$ telle que $y_0 = \varphi_0(a)$ soit intérieur à E_+ et que $(L_n(\varphi_0))$ converge localement vers φ_0 au point a, alors la suite (L_n) est semi-approximante au point a.*

Démonstration. Soit h une application appartenant à $H_a(X, E)$, nulle au point a. Quel que soit $\varepsilon > 0$, l'application $h_\varepsilon = h + \varepsilon\varphi_0$ est continue au point a et $h_\varepsilon(a) = \varepsilon y_0$ est intérieur au cône positif, ce qui entraîne que l'application h_ε est positive au voisinage de a. La suite (L_n) étant semi-positive au point a, il existe alors un voisinage V' de a et un entier N' tels que l'on ait $L_n(h_\varepsilon; x) \geqslant -\varepsilon y_0$ pour $x \in V'$ et $n \geqslant N'$, donc, par linéarité

$$L_n(h; x) \geqslant -\varepsilon\,(y_0 + L_n(\varphi_0; x)) \quad \text{pour } x \in V' \text{ et } n \geqslant N'.$$

L'application $-h$ vérifie les mêmes hypothèses que h. On démontre donc de même qu'il existe un voisinage V'' de a tel que l'on ait

$$L_n(-h; x) \geqslant -\varepsilon\,(y_0 + L_n(\varphi_0; x)) \quad \text{pour } x \in V'' \text{ et } n \geqslant N''.$$

On a donc, pour $x \in V' \cap V''$ et $n \geqslant \max\{N', N''\}$,

$$-\varepsilon\,(y_0 + L_n(\varphi_0; x)) \leqslant L_n(h; x) \leqslant \varepsilon\,(y_0 + L_n(\varphi_0; x))$$

et le lemme **E.2.2** entraîne alors que

$$\|L_n(h; x)\| \leqslant \varepsilon A\,\|y_0 + L_n(\varphi_0)\| \quad \text{pour } x \in V' \cap V'' \text{ et } n \geqslant \max\{N', N''\}.$$

Par hypothèse, la suite $(L_n(\varphi_0))$ converge localement vers φ_0 au point a, donc converge continûment vers φ_0 en ce point puisque φ_0 est continue au point a [Théorème **I.3.3.v**] : il existe un voisinage V_0 de a et un entier N_0 tels que l'on ait $\|L_n(\varphi_0; x) - y_0\| \leqslant 1$, donc $\|L_n(\varphi_0; x)\| \leqslant 1 + \|y_0\|$ pour $x \in V_0$ et $n \geqslant N_0$.
En posant $V = V' \cap V'' \cap V_0$ et $N = \max\{N', N'', N_0\}$, on a donc

$$\|L_n(h; x)\| \leqslant \varepsilon A\,(1 + 2\,\|y_0\|) \quad \text{pour } x \in V \text{ et } n \geqslant N,$$

ce qui démontre que la suite $((L_n(h))$ converge localement vers 0 au point a. □

Remarque. Les hypothèses faites sur φ_0 dans cette proposition sont trop fortes : il suffirait de supposer que $y_0 = \varphi_0(a)$ est intérieur à E_+ et que les applications $L_n(\varphi_0)$ sont uniformément localement bornées pour n assez grand. Le choix fait ici se justifie parce que la proposition n'est utilisée que dans le théorème suivant où les hypothèses de localisation entraînent nécessairement l'existence d'une application φ_0 vérifiant les hypothèses fortes de la proposition **E.2.6**.

Théorème E.2.7. *Soit X un espace topologique, soit E un espace vectoriel normé, ordonné par un cône convexe fermé d'intérieur non vide, tel que le cône positif dual soit suffisant pour la norme, et soit $H(X, E)$ un espace vectoriel d'applications de X dans E.*
Si $H(X, E)$ est localisable en un point a de X, pour toute suite (L_n) d'opérateurs sur $H(X, E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

(i) *La suite (L_n) est semi-positive au point a et elle est localisante au point a.*

(ii) *Quelle que soit l'application h appartenant à $H_a(X,E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii)

Si (L_n) est semi-positive au point a, la proposition **E.2.6**, avec $\varphi_0 = \varphi_{a,y_0}$, entraîne que (L_n) est semi-approximante au point a. Si, de plus, (L_n) est localisante au point a, la proposition **E.1.4** entraîne alors que, pour toute application h appartenant à $H_a(X,E)$, la suite $(L_n(h))$ converge localement vers h au point a.

(ii) ⇒ (i)

a) Soit $r_0 > 0$ tel que la boule fermée de centre y_0 et de rayon r_0 soit contenue dans E_+. Soit h une application appartenant à $H_a(X,E)$, positive sur un voisinage V' de a. Par hypothèse, $L_n(h)$ converge localement vers h au point a, donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe au voisinage V'' de a et un entier N tels que l'on ait $\|L_n(h;x) - h(x)\| < \varepsilon r_0$ pour $x \in V''$ et $n \geqslant N$. On a donc, pour $x \in V'$ et $n \geqslant N$,

$$y_0 + \frac{1}{\varepsilon}\,(L_n(h;x) - h(x)) \in E_+, \ \text{ c'est-à-dire } \ \varepsilon y_0 + L_n(h;x) - h(x) \geqslant 0.$$

L'application h étant positive sur V', il en résulte que l'on a

$$L_n(h;x) \geqslant h(x) - \varepsilon y_0 \geqslant -\varepsilon y_0 \quad \text{pour } \ x \in V' \cap V'' \text{ et } \ n \geqslant N,$$

ce qui montre que la suite (L_n) est semi-positive sur $H_a(X,E)$ au point a.

b) Les fonctions $\varphi_{a,y}$ appartenant à $H_a(X,E)$, **(ii)** entraîne que $L_n(\varphi_{a,y})$ converge localement vers $\varphi_{a,y}$ au point a. La suite (L_n) est donc localisante au point a. □

Si on fait $E = \mathbb{R}$ dans ce théorème et si on prend $y_0 = 1$ pour la définition de la semi-positivité, on retrouve à l'identique le théorème **V.1.9**.

Si on fait $E = \mathbb{R}^p$, ordonné par le premier quadrant $\mathbb{R}^p_+$, et si $H(X,\mathbb{R}^p)$ vérifie l'hypothèse **V.3.1**, on retrouve le théorème **V.3.4**. En effet, les hypothèses de localisation faites sur les espaces dans les deux théorèmes sont équivalentes [Lemme **E.2.8**, *infra*] et, sous ces hypothèses, chacun des deux théorèmes donne des conditions nécessaires et suffisantes [Proposition **(i)** de ces théorèmes] pour un même résultat : la convergence locale au point a de $(L_n(h))$ vers h pour toute application h appartenant à $H_a(X,E)$ [Proposition **(ii)** de ces théorèmes]. Les propositions **(i)** des deux théorèmes sont donc équivalentes quand $H(X,\mathbb{R}^p)$ vérifie l'hypothèse **V.3.1**.

Lemme E.2.8. *Si $H(X,\mathbb{R}^p)$ vérifie l'hypothèse* **V.3.1**, *une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace $H(X,\mathbb{R}^p)$ soit localisable au point a, au sens de la définition* **E.1.3**, *est que l'espace $H(X,\mathbb{R})$ soit localisable au point a, au sens de la définition* **V.1.8**.

Démonstration. Condition nécessaire. Soit y_0 l'élément de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

Si l'espace $H(X,\mathbb{R}^p)$ est localisable au point a, il existe $\varphi_{a,y_0} \in H(X,\mathbb{R}^p)$, continue au point a et telle que $\varphi_{a,y_0}(a) = y_0$. La première composante φ^1_{a,y_0} de φ_{a,y_0} est continue au point a, elle vérifie $\varphi^1_{a,y_0}(a) = 1$ et elle appartient à $H(X,\mathbb{R})$ [Hypothèse **V.3.1**]. L'espace $H(X,\mathbb{R})$ est donc localisable au point a : on pose $\varphi_a = \varphi^1_{a,y_0}$.

Condition suffisante. Si l'espace $H(X,\mathbb{R})$ est localisable au point a, il existe $\varphi_a \in H(X,\mathbb{R})$ telle que $\varphi_a(a) = 1$. Quel que soit $y = (y^1, y^2, \ldots, y^p) \in \mathbb{R}^p$, l'application $\varphi_{a,y}$ dont la i-ième composante est donnée par $\varphi^i_{a,y} = y^i \varphi_a$ appartient à $H(X,\mathbb{R}^p)$ [Hypothèse **V.3.1**], elle est continue au point a et on a $\varphi_{a,y}(a) = y$, donc $H(X,\mathbb{R}^p)$ est localisable au point a. □

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Bibliographie

Arens (R.), 1950. A topology for spaces of transformations. *Ann. Math.* **47** : 480-495.

Bastiani (A.), 1964. Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie. *Journ. Analyse Math. Jerusalem* **13** : 1-114.

Bernstein (S.), 1912-1913. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Kharkow* **13** : 1-2.

Birkhoff (G.), 1935. A new definition of limit. *Abstracts of papers 365, Bull. Amer. Math. Soc.* **41** : 636.

Birkhoff (G.), 1937. Moor-Smith convergence in general topology. *Ann. Math.* **38** : 39-56.

Borel (É.), 1905. *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes.*, Paris.

Bourbaki, 1940. Topologie générale, ch 1 et 2. *Actualités Scientifiques et industrielles* **858**, Hermann, Paris.

Bourbaki, 1951. *Topologie générale, ch. I et II*. Hermann, Paris.

Bourbaki, 1955. *Espaces vectoriels topologiques, ch. III-V*. Hermann, Paris.

Brézis (H). *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson 1983, Paris.

Carathéodory (C.), 1918. *Vorlesungen über reelle Funktionen.* Leipzig & Berlin.

Carathéodory (C.), 1929. Stetige Konvergerz und normalen Familien von Funktionen. *Math. Ann* **101** : 515-533.

Carathéodory (C.), 1950. *Funktionentheorie*. Birkhauser AG., Basel.

Cartan (H.), 1937a. Théorie des filtres. *C. R. Acad. Sci.* **205** : 595-598.

Cartan (H.), 1937b. Filtres et ultrafiltres. *C. R. Acad. Sci.* **205** : 777-779.

Cartan (H.). *Calcul différentiel*, Hermann 1967.

Cartan (H.). *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

Charles (J.), Mbekhta (M.), Queffélec (H.), 2010. *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, Dunod.

Chlodovsky (I.), 1937. Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynômes de M.S. Bernstein. *Compositio Math.* **4** : 380-393.

Choquet (G.), 1947. Convergences. *Ann. Univ. Grenoble* **23** : 57-112.

Choquet (G.). *Cours de topologie*, 2e édition, Dunod 2000, Paris.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Cook (C.H.) & Fischer (H.R.), 1965. On Equicontinuity and Continuous Convergence. *Math. Ann.* **159** : 94-104.

Dieudonné (J.), *Éléments d'analyse, Fondements de l'analyse moderne*.

Dini (U.), Lüroth (J.) & Schepp (A.), 1892. *Grunlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Größe.* Leipzig.

Du Bois-Reymond (P.), 1886. Über die Integration der Reihen. *Sitzgsber. Ak. Wiss. Berlin* 1886 : 359-371.

Fichtenholtz (G.) & Kantorovitch (L.), 1934. Sur les opérations dans l'espace des fonctions bornées. *Studia Math.* **5** : 69-98.

Fischer (H.R.), 1959. Limesräume. *Math. Ann.* **137** : 269-303.

Fréchet (M.), 1909. Développements en série *in* : J. Molk, H. Bulkhart & W. Wirtinger [Eds], *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées* II 1, édition française, Paris-Leipzig : 210-241.

Fréchet (M.) & Rosenthal (A.), 1923. Funktionenfolgen. *in* : H. Burkhart, W. Wirtinger, R. Fricke & E. Hilbs [Eds], *Encyklopädie der mathemaischen Wissenschaften* II 3, Leipzig : 210-241.

Hahn (H.), 1921. *Theorie der reellen Funktionen*. Leipzig.

Hahn (H.), 1932. *Reellen Funktionen*. Leipzig.

Hausdorff (F.), 1914. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig.

Hildebrandt (T.H.), 1934. On bounded linear functionnal operations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** : 868-875.

Kelley (J.L.), 1950. Convergence in topology. *Duke Math. J.* **17** : 277-283.

Kelley (J.L.), 1955. *General Topology*. D. Van Nostrand Company Inc;, Toronto, New York, London.

Kamowitz (H), 1984. *A property of compact operators*, Proc. Am. Math. Soc. 91 (2).

Korovkin (P.P.), 1960. *Linear Operators and Approximation Theory*, Gordon & Breach, New-York / Hindunstan Publishing Corp., Delhi.

Kowalski (H.J.), 1954. Limesrâume und Kompletierung. *Math. Nach.* **12** : 301-340.

Kuratowski (K.), 1933. *Topologie I*, Monografie Matemayczne, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Lorentz (G. G.), 1953. *Bernstein Polynomials.* University of Toronto Press.

McShane (E.J.), 1952. Partial ordering and Moore-Smith limits. *Amer. Math. Monthly* **59** : 1-11.

Miller (R.K.), 1971. Nonlinear Volterra Integral Equations. W.A. Benjamin Inc., Memlo Park, California.

Moore (E.H.), 1915. Definition of limit in general integral analysis. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **1** : 628-632.

Moore (E.H.) & Smith (H.L.), 1922. A general theory of limits. *Amer. J. Math.* **44** : 102-121.

Queffélec (H.), 2020. *Topologie, 6e édition*, Dunod, Paris.

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Rudin (W.). *Analyse fonctionnelle*, Ediscience International 1991.

Schaefer (H.), 1955. Stetige Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen. *Arch. Math.* **6** : 423-427.

Schwartz (L.), 1966. *Analyse, tome 1*, Hermann, Paris.

Schwartz (L.), 1966. *Théorie des distributions*, Hermann, Paris.

Spanier (E.), 1963. Quasi-topologies. *Duke Math. J.* **30** : 1-14.

Tukey (J.W.), 1940. Convergence and Uniformity in Topology. Princeton University Press.

Weierstrass (K.), 1880. Zur Funktionenllerhe. *Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften*.

Yosida (K.), 1966. *Functional Analysis.* Springer Verlag, Berlin, Heideberg, New-York.

Zygmund (A.), 1952. *Trigonometrical Series.* Chelsea Publishing Company, New-York.

Zygmund (A.), 1959. *Trigonometrical Series,* Vol. I. Cambridge University Press, Cambridge.

www.spartacus-idh.com

© Spartacus-Idh 2025

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Index

A

adhérence pour la convergence locale 111
application
  $\mathscr{T}$-bornée pour la convergence locale 20
  localement bornée 29
  localement $\mathscr{T}$-bornée 19
  localement équivalente en un point 3
  réglée 116
  strictement différentable 31
approximation de l'unité 88
  à support compact 98, 103
  presque à support compact . 100, 103

B

borne supérieure essentielle 61

C

compact pour la convergence locale 106, 107
compatibilité avec la convergence locale 83
condition de Cauchy locale . . 24, 147
cône
  positif 160
  positif dual 161
    suffisant pour la norme . . . 162
convergence
  continue 6
  continue en un point 124
  locale 2, 9
  locale en un point 124
  pseudo-uniforme en un point 124
  quasi-uniforme 123
  régulière 124
  régulière en un point 125
  simple 2
  t-locale 130
  uniforme 123
  uniforme au voisinage d'un point 124
  uniforme simple 123
  uniforme simple en un point 125
  uniforme sur un voisinage 2
convergence locale 2, 9

E

ensemble
  filtré 141
  quasi-compact 5, 125
entourage 10
équation de Volterra 119
équivariance
  en un point 107
  uniforme en un point 113
espace
  c-espace 135
  complet 24
  fortement localisable 75
  k-espace 138
  localisable en un point . . . 63, 155
  quasi-normé 41
  régulier 132
  sc-espace 136
  uniforme 10, 129

F

famille filtrante décroissante 135
fermé pour la convergence locale . 111
fermeture pour la convergence locale 111

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

filtre 1
base de filtre 1
convergent 6, 13
de Cauchy 24
moins fin, plus fin 8
filtre des sections d'un suite généralisée 145
fonction
essentiellement bornée 61
essentiellement continue en un point 92
essentiellement positive 61
fonctions tests 59

I

inégalité de Bienaymé-Tchebychev 48, 55

O

opérateur positif 59
opérateurs
de Dirichlet 59, 87, 98

S

section finissante 1, 145
sommes de Fejér 66, 80
sous-ensemble $\mathscr{T}$-borné 19
stricte posivité 161
suite
généralisée 141
généralisée associée à un filtre 143, 146
suite d'opérateurs
annulante en un point 70
approximante en un point . . . 60
fortement localisante 75
localisante en un point . . . 63, 72, 155
semi-approximante 154
semi-positive en un point 61, 72, 164
suite généralisée 145

T

théorème
d'Ascoli 109
d'Ascoli relatif 111
de Banach-Steinhaus 43
de Dini 28
de Dini local 28, 148
de Korovkin 77, 79, 153
de la borne uniforme 42
de la limite simple de Baire . . 36
de Vitali-Hahn-Saks 44
topologie de la convergence locale 111

U

ultrafiltre 8, 106

V

voisinage équilibré 20

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

Table des matières

Sommaire . . . . . **v**
Préface . . . . . **vii**

I Notion de convergence locale **1**
1 Définitions 1
2 Convergence locale et convergences uniformes 3
3 Convergence locale et convergence continue 6
4 Propriétés de l'ensemble des filtres convergeant localement 7
5 Extension de la définition de la convergence locale 9
II Propriétés de la convergence locale **13**
1 Image directe et image réciproque d'un filtre convergeant localement. . 13
2 Applications à valeurs dans un espace vectoriel topologique 18
3 Critères de convergence locale 24
4 Propriétés de la limite d'un filtre convergeant localement 28
III Convergence locale sur un espace de Baire **35**
1 Suite convergeant localement sur un espace de Baire 35
2 Applications à l'analyse fonctionnelle 41
IV Polynômes de Bernstein **47**
1 Convergence des polynômes de Bernstein 48
2 Convergence des opérateurs B_n 49
3 Changements de variable 54
V Opérateurs linéaires et approximation **59**
1 Approximation locale d'une fonction 60
2 Observations critiques sur le théorème **V.1.9** 67
3 Extension aux applications à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ 70
VI Approximation par des opérateurs positifs **75**
1 Localisation forte 75
2 Application aux théorèmes de Korovkin 77
3 Observations critiques sur le théorème **VI.1.4** 82
VII Approximation par des opérateurs de convolution **87**
1 Approximation de l'unité 88
2 Approximation par des opérateurs de convolution sur $VB(\mathbb{R})$ 90
3 Approximation par des opérateurs de convolution sur $VB_{loc}(\mathbb{R})$ . . . 95
VIII Équivariance et théorème d'Ascoli **105**
1 Parties compactes pour la convergence locale 105
2 Parties relativement compactes pour la convergence locale 111
3 Cas des fonctions réglées ; application 116

© Spartacus-Idh 2025 www.spartacus-idh.com

A Suites convergentes de fonctions continues 123
1 Divers modes de convergence 123
2 Passage à la limite des propriétés de continuité 125
B Convergence *t*-locale 129
1 Uniformité sans espace uniforme 129
2 Convergence *t*-locale 130
3 Quelques propriétés de la convergence *t*-locale 132
C Convergence locale et convergence uniforme sur tout compact . . 135
1 Notion de *c*-espace 135
2 Convergence locale sur un *c*-espace 137
3 Relation avec les *k*-espaces 138
D Convergence locale des suites généralisées 141
1 Introduction et historique 141
2 Généralités sur la convergence des suites généralisées 145
3 Critères de convergence 147
4 Propriétés de la limite d'une suite convergeant localement 150
E Approximations dans le cas vectoriel 153
1 Approximation locale d'une application à valeurs vectorielles 153
2 Cas des espaces vectoriels normés ordonnés 160

Bibliographie 167
Index 171
Table des matières 173

www.spartacus-idh.com
© Spartacus-Idh 2025

© Spartacus-Idh 2025

N° d'édition : 440452881-1
Dépôt Légal : mars 2024
Achevé d'imprimer : mars 2024

Imprimé en France par

AQUIPRINT

33520 Bruges
www.impression-edition-gironde.com

© Spartacus-Idh 2025

www.spartacus-idh.com